Equations de Fokker-Planck

Denis Gialis*

1 Quelques définitions

1.1 Processus stochastiques

Définition 1 - On appelle *processus stochastique*, tout processus dont l'évolution temporelle peut être définie selon un formalisme probabiliste. Un processus stochastique peut être vectoriel, à valeurs discrètes ou continues.

Considérons un processus stochastique scalaire à valeurs continues, notées $x(t)$ à un instant t et égales à x_0 à l'instant initial t_0. On procède à N ($\gg 1$) réalisations de ce processus avec la même condition initiale. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'instants, strictement croissante, et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles de réalisation telle que $I_n = [x_n, x_n+\mathrm{d}x_n]$. La densité de probabilité, notée $W(x_1,t_1;...;x_n,t_n)$, de trouver $\{x(t_1)\in I_1,...,x(t_n)\in I_n\}$ est telle que

$$(1)\qquad W(x_1,t_1;...;x_n,t_n)\,\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n = \frac{\text{Nombre de réalisations passant par } I_1,...,I_n}{\text{Nombre total de réalisations}}\,,$$

$$(2)\qquad W(x_1,t_1;...;x_n,t_n) \geq 0\,,$$

$$(3)\qquad \forall(t_1,...,t_n)\in\mathbb{R}^n,\ \int_{\mathbb{R}^n} W(x_1,t_1;...;x_n,t_n)\,\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n = 1\,,$$

$$(4)\qquad W \text{ est une fonction symétrique par permutation des couples } (x_i,t_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\,,$$

$$(5)\qquad \int_{\mathbb{R}} W(x_1,t_1;...;x_n,t_n)\,\mathrm{d}x_n = W(x_1,t_1;...;x_{n-1},t_{n-1})\,.$$

Le processus stochastique est donc défini par l'ensemble $\{W(x_1,t_1;...;x_n,t_n)\}_{n\in\mathbb{N}^\star}$ des densités de probabilité.
Un processus stochastique est dit *stationnaire* si, par définition, $\forall\tau\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, $W(x_1,t_1;...;x_n,t_n) = W(x_1,t_1+\tau;...;x_n,t_n+\tau)$.
Conséquence: $W(x_1,t_1) = W(x_1)$ est indépendant du temps.

*Docteur en Astrophysique - Université J. Fourier, Grenoble.

La densité de probabilité conditionnelle, $P(x_1, t_1; ...; x_k, t_k | x_{k+1}, t_{k+1}; ...; x_n, t_n)$, est telle que $P(x_1, t_1; ...; x_k, t_k | x_{k+1}, t_{k+1}; ...; x_n, t_n)\, \mathrm{d}x_{k+1}...\mathrm{d}x_n$ est égal à la probabilité de trouver $\{x(t_{k+1}) \in I_{k+1}, ..., x(t_n) \in I_n\}$ sachant que $\{x(t_1) \in I_1, ..., x(t_k) \in I_k\}$. On peut la définir par

$$P(x_1, t_1; ...; x_k, t_k | x_{k+1}, t_{k+1}; ...; x_n, t_n) = \frac{W(x_1, t_1; ...; x_n, t_n)}{W(x_1, t_1; ...; x_k, t_k)}\,, \tag{1}$$

avec les mêmes propriétés que $W(x_1, t_1; ...; x_n, t_n)$;

(1) $P(x_1, t_1; ...; x_k, t_k | x_{k+1}, t_{k+1}; ...; x_n, t_n) \geq 0\,,$

(2) $\forall (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n,\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-k}} P(x_1, t_1; ...; x_k, t_k | x_{k+1}, t_{k+1}; ...; x_n, t_n)\, \mathrm{d}x_{k+1}...\mathrm{d}x_n = 1\,,$

(3) P est une fonction symétrique par permutation des couples $(x_i, t_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ et $(x_i, t_i)_{i \in [\![k+1,n]\!]}\,,$

(4) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(x_1, t_1; ...; x_k, t_k | x_{k+1}, t_{k+1}; ...; x_n, t_n)\, \mathrm{d}x_n = P(x_1, t_1; ...; x_k, t_k | x_{k+1}, t_{k+1}; ...; x_{n-1}, t_{n-1})\,.$

Le moment d'ordre n de la densité de probabilité définit la *fonction de corrélation d'ordre* n du processus. On la note

$$C(t_1, ..., t_n) \equiv < x(t_1), ..., x(t_n) > = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 ... \, x_n \, W(x_1, t_1; ...; x_n, t_n)\, \mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n\,. \tag{2}$$

Comme $\lim_{t_2 \to t_1} W(x_1, t_1; x_2, t_2) = W(x_1, t_1)\, \delta(x_1 - x_2)$, on aura

$$\lim_{t_2 \to t_1} C(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{R}} x_1^2 \, W(x_1, t_1)\, \mathrm{d}x_1 = < x^2(t_1) > \ . \tag{3}$$

Quant à la *fonction d'autocorrélation*, K, elle est telle que

$$K(t_1, t_2) \equiv \big\langle \, (x(t_1) - < x(t_1) >)\ (x(t_2) - < x(t_2) >) \, \big\rangle = C(t_1, t_2) - C(t_1)\, C(t_2)\,. \tag{4}$$

1.2 Processus markovien

Définition 2 - Un processus stochastique est *markovien* (ou de Markov) lorsque, pour toute suite d'instants, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, strictement croissante, on a

$$P(x_1, t_1; ...; x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n) = P(x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n)\,. \tag{5}$$

Autrement dit, chaque événement $\{x_n, t_n\}$ ne dépend que de l'événement $\{x_{n-1}, t_{n-1}\}$ qui le précède. Un processus de Markov est donc entièrement déterminé par $W(x, t)$

et $P(x_1, t_1; x_2, t_2)$.

Lors d'un processus markovien, les densités de probabilité P et W vérifient *l'équation de Chapman-Kolmogorov*[1],

$$\begin{aligned} P(x_1, t_1|x_3, t_3) &= \int P(x_1, t_1|x_2, t_2)\, P(x_2, t_2|x_3, t_3)\, \mathrm{d}x_2\,, & (6) \\ W(x_2, t_2) &= \int W(x_1, t_1)\, P(x_1, t_1|x_2, t_2)\, \mathrm{d}x_1\,. & (7) \end{aligned}$$

Un processus markovien est *homogène*, si et seulement si, on a

$$P(x_1, t_1|x_2, t_2) = P(x_1, 0|x_2, t_2 - t_1),$$

ou plus simplement, $= P(x_1|x_2, t_2 - t_1)$. Il est *stationnaire* si, en plus, $W(x, t) = W(x)$.

1.3 Processus gaussien

Définition 3 - Un processus stochastique est un processus *gaussien* de moyenne nulle si toutes les densités de probabilité W sont des distributions gaussiennes normalisées de la forme suivante

$$W(x_1, t_1; ...; x_n, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, (\det\, A)^{1/2}\, \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} x_i\, A_{ij}\, x_j\right), \qquad (8)$$

avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, inversible, et strictement définie positive $\sum_{i,j=1}^{n} x_i\, A_{ij}\, x_j > 0$.

[1]appelée aussi *équation de Smolukowsky*

2 Processus markovien diffusifs

2.1 L'équation de Fokker-Planck unidimensionnelle

Définition 4 - Un processus markovien homogène est *diffusif* s'il existe deux fonctions $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telles que

$$\begin{aligned} < \Delta x >_{x_0} &= \int_{\mathbb{R}} (x - x_0)\, P(x_0|x,t) &=& \; a(x_0)\, t + \mathcal{O}(t^\alpha)\,, \\ < (\Delta x)^2 >_{x_0} &= \int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2\, P(x_0|x,t) &=& \; b(x_0)\, t + \mathcal{O}(t^\alpha)\,, \\ < (\Delta x)^k >_{x_0} &= \int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^k\, P(x_0|x,t) &=& \; \mathcal{O}(t^\alpha)\,, \end{aligned} \tag{9}$$

avec $\alpha > 1$ et $k > 2$. La fonction a est appelée *fonction de dérive* et la fonction b *fonction de diffusion* du processus.

Quelle est l'équation d'évolution de $P(x_0|x,t)$?

D'après l'équation de Chapman-Kolmogorov, et pour un instant $t + \Delta t$, on a

$$\begin{aligned} P(x_0|x,t+\Delta t) &= \int_{\mathbb{R}} P(x_0|x_1,t)\, P(x_1,t|x,t+\Delta t)\, \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(x_0|x_1,t)\, P(x_1|x,\Delta t)\, \mathrm{d}x_1\,, \end{aligned} \tag{10}$$

le processus étant homogène. Pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infiniment différentiable et à support compact, on peut écrire (avec la substitution $x \to x_1$ dans le membre de gauche)

$$\int_{\mathbb{R}} P(x_0|x_1,t+\Delta t)\, \phi(x_1)\, \mathrm{d}x_1 = \int_{\mathbb{R}} P(x_0|x_1,t) \left[\int_{\mathbb{R}} P(x_1|x,\Delta t)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}x_1. \tag{11}$$

Comme $\lim_{\Delta t \to 0} P(x_1|x,\Delta t) = \delta(x - x_1)$, et $\phi(x) = \phi(x_1) + (x - x_1)\, \phi'(x_1) + \frac{1}{2}\, (x - x_1)^2\, \phi''(x_1) + \mathcal{O}((x - x_1)^3)$, on déduit des équations (9) et (11),

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} P(x_0|x_1,t+\Delta t)\, \phi(x_1)\, \mathrm{d}x_1 = \\ &\qquad \int_{\mathbb{R}} P(x_0|x_1,t) \left[\phi(x_1) + \phi'(x_1)\, a(x_1)\, \Delta t + \frac{1}{2}\, \phi''(x_1)\, b(x_1)\, \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^\alpha) \right] \mathrm{d}x_1. \end{aligned}$$

Cette dernière relation peut se ré-écrire

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} \int_{\mathbb{R}} \left[P(x_0|x_1,t+\Delta t) - P(x_0|x_1,t) \right] \phi(x_1)\, \mathrm{d}x_1 = \\ &\qquad \int_{\mathbb{R}} P(x_0|x_1,t) \left[\phi'(x_1)\, a(x_1) + \frac{1}{2}\, \phi''(x_1)\, b(x_1) + \mathcal{O}((\Delta t)^{\alpha-1}) \right] \mathrm{d}x_1\,, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, lorsque $\Delta t \to 0$ et en intégrant par parties le membre de droite,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} P(x_0|x_1,t)\,\phi(x_1)\,\mathrm{d}x_1 = \int_{\mathbb{R}} \left[-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(x_1)\,P(x_0|x_1,t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(b(x_1)\,P(x_0|x_1,t)\right) \right] \phi(x_1)\,\mathrm{d}x_1\,.$$

Ainsi, on obtient l'*équation de Fokker-Planck* qui s'écrit ici

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x_0|x_1,t) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(x_1)\,P(x_0|x_1,t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(b(x_1)\,P(x_0|x_1,t)\right)\,, \tag{12}$$

avec la condition initiale $P(x_0|x, t = 0) = \delta(x - x_0)$, appelée *solution fondamentale*.

L'équation de Fokker-Planck est dite *linéaire* (resp. *quasi-linéaire*) si a est une fonction linéaire (resp. *non-linéaire*) et b une fonction constante. Lorsque cette équation est linéaire, la solution est gaussienne. De plus, on a

$$P(x,t) = \int_{\mathbb{R}} W(x_0,t_0)\,P(x_0,t_0|x,t)\,\mathrm{d}x_0\,, \tag{13}$$

et $P(x,t)|_{t=t_0} = W(x,t_0)$.

Une densité de probabilité $P(x,t)$ est stationnaire si $\partial P/\partial t = 0$. Elle vérifie alors

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \left(b(x)\,P(x)\right) = a(x)\,P(x)\,. \tag{14}$$

2.2 Exemple 1: Processus de Wiener

Le processus de Wiener (ou mouvement brownien) caractérise le mouvement désordonné de particules soumises à des collisions aléatoires dans le temps et dans l'espace. Il s'agit d'un processus markovien, la variable spatiale x correspondant à la distance depuis un point origine ($= |x|$) à $t = 0$. La densité de probabilité conditionnelle vérifie l'équation de Fokker-Planck (12) avec $a(x) = 0$ et $b(x) = 2D$, où D est appelé coefficient de diffusion. La solution de cette équation linéaire est donc gaussienne et l'on a, pour $t_2 > t_1$ et $t > 0$,

$$\begin{aligned} P(x_1,t_1|x_2,t_2) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\,D\,(t_2-t_1)}} \exp\left(-\frac{(x_2-x_1)^2}{4D\,(t_2-t_1)}\right)\,, \\ W(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\,D\,t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D\,t}\right)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Autrement dit, c'est un processus homogène, non-stationnaire, gaussien et de moyenne nulle. Par ailleurs, $< x^2 >= 2D\,t$.

2.3 L'équation de Fokker-Planck en dimension n

Dans cette section, on s'intéresse à la situation physique suivante: une population de N particules, dont chaque élément est décrit par un ensemble de paramètres représentés par un vecteur $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ dans un espace des phases X quelconque (par exemple, position-impulsion), est placée dans un champ de force aléatoire, $\vec{F}(\vec{x}, t)$, tel que $\vec{F}(\vec{x}, t) = \dot{\vec{x}}$.

Dans l'espace X, la fonction de distribution des N particules, notée $f(\vec{x}, t)$, est définie de la façon suivante:

$$f(\vec{x}, t) \equiv < \sum_{k=1}^{N} \delta\left(\vec{x} - \vec{x}_k(t)\right) > , \tag{16}$$

où la moyenne, $< \cdot >$, est effectuée sur l'ensemble des réalisations du champ de force aléatoire, et la normalisation de f est telle que

$$\int_X f(\vec{x}, t)\, \mathrm{d}\vec{x} = < \sum_{k=1}^{N} \int_X \delta\left(\vec{x} - \vec{x}_k(t)\right) \mathrm{d}\vec{x} > = N\,. \tag{17}$$

Pour une particule quelconque, la variation de position dans X, entre les instants t' et $t > t'$, est simplement

$$\Delta\vec{x}(t, t') = \vec{x}_k(t) - \vec{x}_k(t') = \int_{t'}^{t} \vec{F}(\vec{x}_k, \tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \tag{18}$$

avec $\Delta\vec{x}(t, t') \to 0$, lorsque $t \to t'$. On peut donc écrire

$$\delta\left(\vec{x} - \vec{x}_k(t)\right) = \delta\left(\vec{x} - \vec{x}_k(t') - \Delta\vec{x}(t, t')\right) = \int_X \delta\left(\vec{x} - \vec{x}' - \Delta\vec{x}(t, t')\right)\, \delta\left(\vec{x}' - \vec{x}_k(t')\right)\, \mathrm{d}\vec{x}'\,,$$

et l'on déduit

$$f(\vec{x}, t) = \int_X < \delta\left(\vec{x} - \vec{x}' - \Delta\vec{x}(t, t')\right) \sum_{k=1}^{N} \delta\left(\vec{x}' - \vec{x}_k(t')\right) > \, \mathrm{d}\vec{x}'\,. \tag{19}$$

L'hypothèse d'un processus markovien conduit à supposer que l'échelle temporelle des fluctuations de trajectoire est très faible devant le temps d'évolution des grandeurs moyennes comme la fonction de distribution: les fonctions d'autocorrélations des grandeurs $\vec{x}_k(t)$ tendent rapidement vers 0 lorsque $|t - t'| > \tau_c$, avec τ_c, le temps de corrélation, tel que $\tau_c \ll \tau_f$, le temps d'évolution de la fonction de distribution. En d'autres termes, la variation de position d'une particule, à l'instant t, est indépendante de ses positions précédentes aux instants t' tels que $|t - t'| > \tau_c$. La fonction de distribution s'écrit donc

$$f(\vec{x}, t) = \int_X P(\vec{x}', t' | \vec{x}, t)\, f(\vec{x}', t')\, \mathrm{d}\vec{x}' \tag{20}$$

avec
$$P(\vec{x}', t'|\vec{x}, t) \equiv < \delta\left(\vec{x} - \vec{x}' - \Delta\vec{x}(t, t')\right) > , \tag{21}$$
la densité de probabilité de transition de $(\vec{x}', t')$ à $(\vec{x}, t)$, qui satisfait la relation (6).

Pour $|t - t'| \ll \tau_f$, et comme $\lim_{t\to 0} P(\vec{x}', t'|\vec{x}, t) = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$, **une hypothèse de petits changements de position, $\Delta\vec{x}$, dans** X, conduit au développement limité suivant
$$\begin{aligned} P(\vec{x}', t'|\vec{x}, t) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') + < \Delta\vec{x} > \frac{\partial}{\partial \vec{x}'}\left(\delta(\vec{x} - \vec{x}')\right) + \\ \frac{1}{2} < (\Delta\vec{x})^2 > \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}'^2}\left(\delta(\vec{x} - \vec{x}')\right) + o\left(< (\Delta\vec{x})^3 >\right). \end{aligned} \tag{22}$$
D'après l'équation (20), on obtient ainsi
$$\begin{aligned} f(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t') + \int_X < \Delta\vec{x} > \frac{\partial}{\partial \vec{x}'}\left(\delta(\vec{x} - \vec{x}')\right) f(\vec{x}', t')\,\mathrm{d}\vec{x}' + \\ \frac{1}{2}\int_X < (\Delta\vec{x})^2 > \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}'^2}\left(\delta(\vec{x} - \vec{x}')\right) f(\vec{x}', t')\,\mathrm{d}\vec{x}' + o\left(< (\Delta\vec{x})^3 >\right), \end{aligned}$$
ce qui donne l'*équation de Fokker-Planck* suivante[2], dans laquelle ont été supprimés les termes d'ordre 3,
$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{< \Delta x_i >}{\Delta t} f(\vec{x}, t)\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\Gamma_{i\,j}\, f(\vec{x}, t)\right), \tag{23}$$
avec les composantes du tenseur de diffusion
$$\Gamma_{i\,j} \equiv \frac{< \Delta x_i\, \Delta x_j >}{2\,\Delta t} = \frac{1}{2\,\Delta t} < \int_{t-\Delta t}^{t} F_i(\vec{x}(t_1), t_1)\,\mathrm{d}t_1 \int_{t-\Delta t}^{t} F_j(\vec{x}(t_2), t_2)\,\mathrm{d}t_2 > . \tag{24}$$
En effectuant le changement de variables suivant $\tau_1 = t_1 - t_2$ et $\tau_2 = (t_1 + t_2)/2$, on obtient $(\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 = \mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2)$
$$\Gamma_{i\,j} = \frac{1}{2\,\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t}\left(\int_{-\Delta t}^{\Delta t} < F_i(\vec{x}(t_1), t_1)\, F_j(\vec{x}(t_2), t_2) > \mathrm{d}\tau_1\right)\mathrm{d}\tau_2 , \tag{25}$$
avec $t_1 = t_1(\tau_1, \tau_2)$ et $t_2 = t_2(\tau_1, \tau_2)$. Pour un processus homogène et quasi-stationnaire, la faible dépendance en τ_2 et la fonction de corrélation paire en τ_1 (car $\tau_c \ll \Delta t \ll \tau_f$) conduisent à
$$\begin{aligned} \Gamma_{i\,j} &\simeq \int_0^{\Delta t} < F_i(\vec{x}(t), t)\, F_j(\vec{x}(t - \tau_1), t - \tau_1) > \mathrm{d}\tau_1 \\ &\simeq \int_0^{+\infty} < F_i(\vec{x}(t), t)\, F_j(\vec{x}(t - \tau_1), t - \tau_1) > \mathrm{d}\tau_1 . \end{aligned} \tag{26}$$
Enfin, les termes $\frac{<\Delta x_i>}{\Delta t}$ définissent les composantes d'une force de friction généralisée dans l'espace des phases.

[2]en notation d'Einstein.

2.4 Exemple 2: Particules dans un champ électrostatique

On considère une population de particules, de masse m, dans l'espace des phases position-impulsion, $\{\vec{x}, \vec{p}\}$, soumises à un champ de force électrostatique aléatoire. On suppose que ce champ de force ne provoque que de faibles déflexions de l'impulsion $\vec{p}$ sur une échelle de temps Δt. En outre, ce champ de force, noté $\vec{F}(\vec{x}(t), t)$, ne dépendant pas de l'impulsion, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} &= \vec{v}(t)\,, \\ \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &= \vec{F}(\vec{x}(t), t)\,. \end{aligned} \tag{27}$$

A un instant $\tau \geq t - \Delta t$, on peut écrire

$$\vec{x}(\tau) = \vec{x}(t - \Delta t) + (\tau - t + \Delta t)\,\vec{v}(t - \Delta t) + \delta\vec{x}(\tau)\,, \tag{28}$$

avec

$$\delta\vec{x}(\tau) = \int_{t-\Delta t}^{\tau} \delta\vec{v}(t_1)\,\mathrm{d}t_1\,, \tag{29}$$

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}(t - \Delta t) + \frac{1}{m}\int_{t-\Delta t}^{t_1} \vec{F}(t_2)\mathrm{d}t_2\,, \tag{30}$$

où $\vec{F}(t_2) = \vec{F}(\vec{x}(t_2), t_2)$ et, par définition,

$$\delta\vec{v}(t_1) = \frac{1}{m}\int_{t-\Delta t}^{t_1} \vec{F}(t_2)\mathrm{d}t_2\,. \tag{31}$$

Par ailleurs, le saut en impulsion entre les instants $t - \Delta t$ et t, faible par hypothèse sur une échelle de temps plus grande que celle du temps de corrélation du champ, notée τ_c, s'écrit

$$\Delta\vec{p}(t, t - \Delta t) = \int_{t-\Delta t}^{t} \vec{F}(\vec{x}(\tau), \tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{32}$$

Les composantes du tenseur de diffusion dans l'espace des impulsions sont donc

$$\Gamma_{i\,j} = \frac{< \Delta p_i\,\Delta p_j >}{2\,\Delta t} \simeq \int_0^{+\infty} < F_i(\vec{x}(t), t)\,F_j(\vec{x}(t) - \vec{v}\tau, t - \tau) > \,\mathrm{d}\tau\,. \tag{33}$$

Dans ce même espace, les composantes de la force de friction sont définies par

$$\frac{< \Delta p_i >}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t} < F_i(t_1) > \mathrm{d}t_1\,. \tag{34}$$

Comme $F_i(t_1) = F_i(\vec{x}(t-\Delta t) + (t_1 - t + \Delta t)\,\vec{v}(t-\Delta t) + \delta\vec{x}(t_1), t_1)$, on déduit

$$\begin{aligned} F_i(t_1) = F_i(\vec{x}(t-\Delta t) + (t_1 - t + \Delta t)\,\vec{v}(t-\Delta t), t_1) + \\ \delta x_j(t_1)\,\frac{\partial}{\partial x_j} F_i(\vec{x}(t-\Delta t) + (t_1 - t + \Delta t)\,\vec{v}(t-\Delta t), t_1)\,, \end{aligned} \quad (35)$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_i(\vec{x}(t-\Delta t) + (t_1 - t + \Delta t)\,\vec{v}(t-\Delta t), t_1) \simeq \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(t_1)\,. \quad (36)$$

Ainsi, nous pouvons décomposer les composantes de la force de friction de la façon suivante:

$$\frac{< \Delta p_i >}{\Delta t} = A_i + \Gamma_i\,, \quad (37)$$

avec

$$\begin{aligned} A_i &\equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t} < F_i(\vec{x}(t-\Delta t) + (t_1 - t + \Delta t)\,\vec{v}(t-\Delta t), t_1) > \mathrm{d}t_1\,, \\ \Gamma_i &\equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t} < \delta x_j(t_1)\,\frac{\partial}{\partial x_j} F_i(t_1) > \mathrm{d}t_1\,. \end{aligned} \quad (38)$$

Le coefficient Γ_i peut s'exprimer autrement: en effet, d'après les relations (29) et (31), on a

$$\Gamma_i = \frac{1}{m\,\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t-\Delta t}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int_{t-\Delta t}^{t_2} \mathrm{d}t_3 < F_j(t_3)\,\frac{\partial}{\partial x_j} F_i(t_1) >\,, \quad (39)$$

avec

$$< F_j(t_3)\,\frac{\partial}{\partial x_j} F_i(t_1) > = < F_j(0)\,\frac{\partial}{\partial x_j} F_i(t_1 - t_3) >\,,$$

le processus étant homogène et quasi-stationnaire.
Donc, comme $\vec{x}(t_1) - \vec{x}(t_3) \simeq (t_1 - t_3)\,\vec{v}(t-\Delta t) \simeq (t_1 - t_3)\,\vec{v}(t)$, le coefficient Γ_i devient

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t-\Delta t}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int_{t-\Delta t}^{t_2} \mathrm{d}t_3\, \frac{1}{t_1 - t_3} < F_j(t_3)\, F_i(t_1) > \\ &= \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t} G_{ij}(t_1)\mathrm{d}t_1\,, \end{aligned} \quad (40)$$

avec

$$\begin{aligned} G_{ij}(t_1) &\equiv \int_{t-\Delta t}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int_{t-\Delta t}^{t_2} \mathrm{d}t_3\, \frac{C_{ij}(t_1 - t_3)}{t_1 - t_3}\,, \\ C_{ij}(t_1 - t_3) &\equiv < F_j(t_3)\, F_i(t_1) >\,. \end{aligned} \quad (41)$$

Posons $f : t \mapsto C_{i\,j}(t)/t$, on a

$$G_{i\,j}(t_1+h) - G_{i\,j}(t_1) = \int_{t-\Delta t}^{t_1} \left[\int_{t-\Delta t}^{t_2} \left(f(t_1+h-t_3) - f(t_1-t_3) \right) \, \mathrm{d}t_3 \right] \mathrm{d}t_2 + \int_{t_1}^{t_1+h} \left[\int_{t-\Delta t}^{t_2} f(t_1+h-t_3) \, \mathrm{d}t_3 \right] \mathrm{d}t_2 \,. \tag{42}$$

Donc, avec $\tau = t_1 - t_3$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}G_{i\,j}(t_1)}{\mathrm{d}t_1} &= \lim_{h\to 0} \frac{G_{i\,j}(t_1+h) - G_{i\,j}(t_1)}{h} \\ &= \int_{t-\Delta t}^{t_1} \left[\int_{t_1-t+\Delta t}^{t_1-t_2} -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} \, \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}t_2 + \int_{t-\Delta t}^{t_1} f(t_1-t_3) \, \mathrm{d}t_3 \\ &= (t_1 - t + \Delta t) \, f(t_1 - t + \Delta t) \\ &= C_{i\,j}(t_1 - t + \Delta t) \,. \end{aligned} \tag{43}$$

Conclusion, on obtient

$$G_{i\,j}(t_1) = \int_0^{t_1-t+\Delta t} C_{i\,j}(\tau) \, \mathrm{d}\tau \,, \tag{44}$$

et, comme $t_1 - t + \Delta t > \tau_c$, $G_{i\,j}(t_1) \simeq \Gamma_{i\,j}$ et

$$\Gamma_i = \frac{\partial}{\partial p_j} \Gamma_{i\,j} \,. \tag{45}$$

Si l'on s'intéresse, à présent, aux termes de friction et de diffusion contenant des sauts de position spatiale:

$$< \Delta x_i > \simeq v_i \, \Delta t + \int_{t-\Delta t}^{t} < \delta v_i(t_1) > \, \mathrm{d}t_1 \,, \tag{46}$$

avec

$$\delta v_i(t_1) = \delta v_i(t-\Delta t) + (t_1 - t + \Delta t) \, F_i(t - \Delta t) + ... \tag{47}$$

et

$$\int_{t-\Delta t}^{t} < \delta v_i(t-\Delta t) > \, \mathrm{d}t_1 = \Delta t \, < \delta v_i(t-\Delta t) > \,. \tag{48}$$

Or, d'après la relation (31),

$$\delta v_i(t-\Delta t) = \frac{1}{m} \int_{t-2\Delta t}^{t-\Delta t} F_i(t_2) \, \mathrm{d}t_2 = \frac{1}{m} \int_0^{\Delta t} F_i(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau \,, \tag{49}$$

ce qui implique que $< \delta v_i(t-\Delta t) >= \frac{1}{m} A_i \Delta t$.

Ainsi, le saut de position spatiale devient

$$< \Delta x_i > \simeq v_i \, \Delta t + \frac{1}{m} A_i \, (\Delta t)^2 + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \,, \tag{50}$$

et, au premier ordre,

$$\frac{< \Delta x_i >}{\Delta t} \simeq v_i \,. \tag{51}$$

On montre, de façon similaire, que les composantes du tenseur de diffusion contenant des termes de la forme $< \Delta x_i \, \Delta x_j >$ et $< \Delta x_i \, \Delta p_j >$, sont égales à $\mathcal{O}(\Delta t)$. Ces composantes sont donc également négligeables.

L'équation de Fokker-Planck s'écrit donc

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{< \Delta p_i >}{\Delta t} \, f \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{< \Delta x_i >}{\Delta t} \, f \right) + \frac{\partial^2}{\partial p_i \, \partial p_j} \left(\frac{< \Delta p_i \, \Delta p_j >}{2\Delta t} \, f \right) \,,$$

ou, de façon plus compacte,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \, \frac{\partial}{\partial x_i} f = -\frac{\partial}{\partial p_i} (A_i \, f) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\Gamma_{i\,j} \, \frac{\partial}{\partial p_j} f \right) \,. \tag{52}$$

2.5 Exemple 3: Particules dans un champ magnétique

Comme dans l'exemple précédent, on considère une population de particules, de masse m, dans l'espace des phases position-impulsion, $\{\vec{x}, \vec{p}\}$, soumises à un champ de force magnétique irrégulier. On suppose encore que ce champ de force, noté $\vec{F}(\vec{p}(t), t)$ et qui ne dépend que de l'impulsion, ne provoque que de faibles déflexions de l'impulsion $\vec{p}$ sur une échelle de temps Δt.
Dans le cas d'une distribution isotrope des irrégularités magnétiques, le champ de force s'écrira simplement $\vec{F}(p, t)$ avec $p = |\vec{p}|$. On montre facilement que l'évolution de la fonction de distribution $f(p, t)$ suit alors l'équation de Fokker-Planck suivante[3]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 \, D_{pp} \, \frac{\partial f}{\partial p} \right] \,, \tag{53}$$

avec D_{pp} le coefficient de diffusion dans l'espace des impulsions, et où $4\pi \, p^2 \, f(p, t) \, \mathrm{d}p$ représente le nombre de particules dont l'impulsion est comprise entre p et $p + \mathrm{d}p$ à l'instant t.

[3] S'il n'y pas de terme source.