Formalisme tensoriel

Denis Gialis*

Ces préliminaires mathématiques n'ont pour but que de préparer le lecteur au langage de la théorie de la Relativité (Restreinte et Générale). Ils essaient de faire une synthèse des notions, définitions, et théorèmes qu'il faut connaître avant de pouvoir aller plus loin.

1 Les espaces vectoriels et affines

Les *vecteurs* sont parmi les objets mathématiques les plus utilisés par les physiciens. Ils permettent, notamment, d'exprimer des grandeurs physiques auxquelles on associe une direction (et un sens) dans l'espace.

1.1 Définition

Un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ généralement...) est un ensemble non vide E muni :

1. D'une loi de composition interne, noté $+$ et appelée *addition*, telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif.
2. D'une loi de composition externe, application de $\mathbb{K} \times E$ dans E, notée $\cdot$ et appelée *produit externe*, qui est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition. Elle possède en outre un élément neutre, noté 1.

C'est ainsi que l'on définit les *vecteurs* comme les éléments d'un tel ensemble muni d'une *structure* d'espace vectoriel.
Supposons que l'on ne puisse trouver au maximum qu'un nombre fini, n, de vecteurs *linéairement indépendants*. L'espace vectoriel est alors de dimension finie, cette *dimension* étant, par définition, égale à n. Par ailleurs, ces n vecteurs, que l'on notera $\mathbf{e}_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$, constituent une *base* $\mathcal{B}$, notée $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$, de l'espace vectoriel, dont on dira qu'il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Aussi, il est facile de montrer que la décomposition d'un vecteur quelconque de E suivant la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ est unique. Un vecteur $\mathbf{x}$ de E s'écrira :

$$\mathbf{x} = x^1\,\mathbf{e}_1 + ... + x^n\,\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x^i\,\mathbf{e}_i\,, \tag{1}$$

*Docteur en Astrophysique - Université J. Fourier, Grenoble.

où les éléments $\{x^i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ appartiennent à $\mathbb{K}$ et sont appelés *coordonnées contravariantes* du vecteur $\mathbf{x}$.

Enfin, les vecteurs sont souvent associés à des *points* d'un espace quelconque. On appelle *espace affine* ou *espace ponctuel*, un couple $(\mathcal{E}, E)$ dans lequel $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide dont les éléments s'appellent les *points*, et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, tel qu'il existe une loi $\mathcal{E} \times E \to \mathcal{E}$, notée $+$ telle que ;
(1) Pour tout $M \in \mathcal{E}$, l'application $\mathbf{x} \mapsto M + \mathbf{x}$ est une bijection de E sur $\mathcal{E}$,
(2) Pour tout $M \in \mathcal{E}$ et $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, $(M + \mathbf{x}) + \mathbf{y} = M + (\mathbf{x} + \mathbf{y})$.
E est l'espace vectoriel associé à l'espace affine $(\mathcal{E}, E)$. L'espace affine sera noté abusivement $\mathcal{E}$ et pourra même être confondu avec E. Tout couple de points (M, N) de $\mathcal{E}$ est un *bi-point* : un unique vecteur $\mathbf{x}$ de E lui est associé, on le note $\overrightarrow{MN}$.

1.2 La notation d'Einstein

La notation d'Einstein permet d'alléger l'écriture de l'équation (1) qui devient simplement

$$\mathbf{x} = x^i \, \mathbf{e}_i \,. \tag{2}$$

Autrement dit, la règle est la suivante : la répétition de la lettre i, une et une seule fois en exposant et, une et une seule fois en indice, implique automatiquement une sommation pour i allant de 1 à n. Nous allons voir, dans les paragraphes suivants, la différence de sens entre une lettre placée en indice et une lettre placée en exposant. Dans la suite, nous utiliserons cette notation.

1.3 Les changements de bases

Considérons une seconde base $\mathcal{B}'$ de E définie par $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$. La matrice de passage P, ou *matrice de changement de base*, de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est telle que sa j-ième colonne ($j \in [\![1, n]\!]$) représente le j-ième vecteur de la base $\mathcal{B}'$ décomposé dans la base $\mathcal{B}$. En notant $P = (P^i_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ cette matrice, on aura, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{e}'_j = P^i_j \, \mathbf{e}_i \tag{3}$$

De même, la matrice inverse de P, notée Λ, permet d'écrire, avec les mêmes notations,

$$\mathbf{e}_j = \Lambda^i_j \, \mathbf{e}'_i \tag{4}$$

Pour un vecteur quelconque $\mathbf{x}$ de E, la décomposition dans chacune des bases donne

$$\mathbf{x} = x^i \, \mathbf{e}_i = x'^i \, \mathbf{e}'_i \,. \tag{5}$$

On déduit donc facilement les relations suivantes :

$$x^i = P^i_j \, x'^j \,, \tag{6}$$

$$x'^i = \Lambda^i_j \, x^j \,. \tag{7}$$

Si une grandeur physique a des composantes qui obéissent à ces deux dernières relations, alors cette grandeur peut être représentée par un vecteur.

1.4 Les applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel, une application f de E dans F est dite *linéaire* si et seulement si, $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in E^2$ et $\forall\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(1) \qquad f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})\,, \tag{8}$$

$$(2) \qquad f(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda\,\mathbf{x}\,. \tag{9}$$

Si $E = F$, l'application linéaire f est un endomorphisme. Sa matrice associée, $M = (M^i_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, relativement à une base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E est telle que sa j-ième colonne ($j \in [\![1,n]\!]$) représente $f(\mathbf{e}_j)$. Avec les notations du paragraphe précédent, un changement de base aura pour conséquence de modifier tous les coefficients M^i_j de M. Suivant la nouvelle base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$, la nouvelle matrice associée à f, notée M', sera définie par la relation :

$$M' = \Lambda\,M\,P\,. \tag{10}$$

1.5 Les formes linéaires

Par définition, *une forme linéaire* sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires sur E est un espace vectoriel. Cet espace est appelé *dual* de E, et il est souvent noté $E^\star$. Une forme linéaire ϕ de $E^\star$ s'écrira, par exemple,

$$\begin{aligned} \phi : \quad E &\rightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{x} &\mapsto \phi(\mathbf{x}) = <\phi,\mathbf{x}> \end{aligned} \tag{11}$$

Si E est de dimension n alors $E^\star$ est également de dimension n, et, à toute base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E est associée une base $\mathcal{B}^\star = \{\phi^i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ de $E^\star$, dite *base duale*, telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\phi^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j\,, \tag{12}$$

avec δ^i_j, le symbole de Kronecker, qui est égal à 1 si $i = j$ et 0 sinon.
Pour un vecteur quelconque de E, $\mathbf{x} = x^i\,\mathbf{e}_i$, on a donc

$$\phi^i(\mathbf{x}) = x^i\,. \tag{13}$$

La forme linéaire ϕ^i sera très souvent notée $\mathrm{d}x^i$.
Enfin, toute forme linéaire ω de $E^\star$ peut se décomposer dans la base $\mathcal{B}^\star$,

$$\omega = \omega_i\,\phi^i\,, \tag{14}$$

où les ω_i sont appelés *coordonnées covariantes* de la forme linéaire ω.
Tout changement de base dans E, comme celui du paragraphe (1.3), entraînera un changement de la base duale. Les nouveaux vecteurs de la base duale $\mathcal{B}^\star$ associée à la nouvelle base de E seront définis par

$$\phi'^{\,i} = \Lambda^i_j\,\phi^i\,, \tag{15}$$

pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Ainsi, les coordonnées covariantes d'une forme linéaire ω de $E^\star$ se transformeront, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, suivant la relation

$$\omega'_j = P^i_j\,\omega_i\,. \tag{16}$$

Elles suivent donc la même loi de transformation que les vecteurs de la base $\mathcal{B}$: cela justifie l'adjectif *co*-variantes.

La matrice $M = (M^i_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, associée à un endomorphisme f de E, sera simplement telle que

$$M^i_j =< \phi^i, f(\mathbf{e}_j) >\,, \tag{17}$$

et, $\forall \mathbf{x} \in E$, l'image de $\mathbf{x}$ par f sera

$$f(\mathbf{x}) = M^i_j\,\phi^j(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_i\,. \tag{18}$$

Enfin, on déduit les coefficients de la nouvelle matrice, M', issue d'un changement de base :

$$M'^{\,i}_j = \Lambda^r_i\,P^j_s\,M^s_r\,. \tag{19}$$

2 Les espaces tensoriels

La notion de *tenseurs* constitue une généralisation des notions de vecteurs et de formes linéaires. L'utilisation de tels objets mathématiques est l'une des premières difficultés que l'on rencontre lorsque l'on souhaite manipuler les équations de la théorie de la relativité et, plus généralement, les équations présentes dans de nombreux domaines de la physique théorique. Les lecteurs souhaitant une présentation très formelle des tenseurs et des démonstrations rigoureuses concernant les résultats que nous allons donner dans ce paragraphe, pourront consulter l'excellent ouvrage de L. Schwartz [1].

2.1 Produit tensoriel d'espaces

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On montre qu'il existe un ensemble unique (à un isomorphisme près) , que l'on note $E \otimes F$ et qui est appelé *espace produit tensoriel*, tel que, pour tout espace vectoriel G, l'espace des applications linéaires de $E\otimes F$ dans G est isomorphe à l'espace, noté $\mathcal{B}(E\times F, G)$, des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G (voir une démonstration dans [2]).

Ainsi, lorsque $G = \mathbb{K}$, l'espace produit tensoriel $E^\star\otimes F^\star$ est isomorphe à $\mathcal{B}(E\times F, \mathbb{K})$. De même, d'après les propriétés du dual, l'espace produit tensoriel $E\otimes F$ est isomorphe à $\mathcal{B}(E^\star \times F^\star, \mathbb{K})$.

Par définition, les éléments appartenant à un espace produit tensoriel tel que $G = \mathbb{K}$ sont appelés *tenseurs*.

Par exemple, si $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E et si $\{\mathbf{f}_j\}_{j\in[\![1,m]\!]}$ est une base de F, alors un tenseur T de $E^\star \otimes F^\star$ peut être défini comme une application ou forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} T : E\times F & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & T(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{array} \tag{20}$$

telle que

$$\begin{array}{rcl} T(\mathbf{x},\mathbf{y}) & = & T_{ab} < \phi^a, \mathbf{x} >< \psi^b, \mathbf{y} > \\ & = & T_{ab}\, x^a\, y^b \end{array} \tag{21}$$

où $\{\phi^i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $\{\psi^j\}_{j\in[\![1,m]\!]}$ sont respectivement les bases duales des bases de E et F précédemment définies. Une base de $E^\star \otimes F^\star$, notée $\{\epsilon^{ij}\}_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$, sera telle que, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, on a

$$\epsilon^{ij} = \phi^i \otimes \psi^j = < \phi^i, . >< \psi^j, . > \ . \tag{22}$$

Les nombres T_{ij} sont donc les coordonnées du tenseur T dans la base $\{\epsilon^{ij}\}_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$;

$$T = T_{ij}\, \phi^i \otimes \psi^j = T_{ij}\, \epsilon^{ij}\ . \tag{23}$$

On peut aussi écrire que $T_{ij} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)$.

Dans la suite, nous considèrerons uniquement le cas où $E = F$.

Remarque : La loi $\otimes$ est, par définition, distributive par rapport à l'addition des vecteurs ou des formes linéaires et associative avec la multiplication par un scalaire. En revanche, cette loi n'est pas commutative.

2.2 Définition générale d'un tenseur

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Une forme multilinéaire est, par définition, une application de E^n dans $\mathbb{K}$ (où n un entier > 1) qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables. Autrement dit, pour tout $n > 1$ entier, une forme multilinéaire f sur E^n est telle que, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall (\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n) \in E^n$,

$$f(\mathbf{x}_1,\dots,a\,\mathbf{x}_k + b\,\mathbf{x}'_k,\dots,\mathbf{x}_n) = a\, f(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n) + b\, f(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}'_k,\dots,\mathbf{x}_n)\ , \tag{24}$$

pour tout $(a,b) \in \mathbb{K}$ et tout $\mathbf{x}'_k \in E$. On dit également que f est une *forme n-linéaire*.

Remarque : il ne faut pas confondre les formes multilinéaires sur E^n avec les formes linéaires de E^n dans $\mathbb{K}$. Pour une application $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ linéaire, on aura

$$f(a\,\mathbf{x}_1 + b\,\mathbf{x}'_1,\dots,a\,\mathbf{x}_n + b\,\mathbf{x}'_n) = a\, f(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n) + b\, f(\mathbf{x}'_1,\dots,\mathbf{x}'_n)\ . \tag{25}$$

Par définition, un tenseur T de type (ou d'ordre) $\binom{\ell}{k}$ est une application ou *forme multilinéaire* telle que

$$\begin{array}{rcl} T : \underbrace{E^\star \times \ldots \times E^\star}_{\ell \text{ fois}} \times \underbrace{E \times \ldots \times E}_{k \text{ fois}} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (\omega^1,\dots,\omega^\ell,\mathbf{x}_1,\,\dots,\,\mathbf{x}_k) & \mapsto & T(\omega^1,\dots,\omega^\ell,\mathbf{x}_1,\,\dots,\,\mathbf{x}_k) \end{array} \tag{26}$$

Autrement dit, le tenseur T est un élément de l'espace produit tensoriel $E \otimes \ldots \otimes E \otimes E^\star \otimes \ldots \otimes E^\star$ (on dit que E est *tensorisé* ℓ fois et $E^\star$, k fois), dont les coordonnées, dans une base quelconque de cet espace de dimension $(\dim\, E)^{k+\ell}$, sont de la forme $T^{\mu_1..\mu_\ell}_{\nu_1..\nu_k}$. On aura

$$T^{\mu_1..\mu_\ell}_{\nu_1..\nu_k} = T(\phi^{\mu_1}, \ldots, \phi^{\mu_\ell}, \mathbf{e}_{\nu_1}, \ldots, \mathbf{e}_{\nu_k})\,, \tag{27}$$

avec $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E et $\{\phi^i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ sa base duale et,

$$T = T^{\mu_1..\mu_\ell}_{\nu_1..\nu_k}\, \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\mu_\ell} \otimes \phi^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \phi^{\nu_k}\,. \tag{28}$$

Remarques :
1) Les vecteurs sont, par exemple, des tenseurs de type $\binom{1}{0}$, alors que les formes linéaires sont des tenseurs de type $\binom{0}{1}$. Les endomorphismes de E sont, quant à eux, des tenseurs de type $\binom{1}{1}$: en effet, avec les notations de l'équation (17), l'application f peut être définie comme une forme bilinéaire de $\mathcal{B}(E^\star \times E, \mathbb{K})$ c'est-à-dire telle que

$$f = M^i_j\, \mathbf{e}_i \otimes \phi^j\,. \tag{29}$$

On vérifie facilement que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f(\mathbf{e}_k) = M^i_j\ <\phi^j, \mathbf{e}_k>\ \mathbf{e}_i$.
L'application identité, notée Id, sera simplement

$$Id = \delta^i_j\, \mathbf{e}_i \otimes \phi^j = \mathbf{e}_k \otimes \phi^k\,. \tag{30}$$

2) La somme de deux tenseurs T et U de type $\binom{\ell}{k}$ donnera un tenseur W de même type

$$W = T + U = (T^{\mu_1..\mu_\ell}_{\nu_1..\nu_k} + U^{\mu_1..\mu_\ell}_{\nu_1..\nu_k})\, \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\mu_\ell} \otimes \phi^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \phi^{\nu_k}\,. \tag{31}$$

Le produit tensoriel d'un tenseur T de type $\binom{\ell}{k}$ avec un tenseur U de type $\binom{m}{n}$ donnera un tenseur W de type $\binom{\ell+m}{k+n}$

$$\begin{aligned} W &= T \otimes U \qquad (32) \\ &= (T^{\mu_1..\mu_\ell}_{\nu_1..\nu_k}\, U^{\rho_1..\rho_m}_{\sigma_1..\sigma_n})\, \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\mu_\ell} \otimes \phi^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \phi^{\nu_k} \otimes \mathbf{e}_{\rho_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\rho_m} \otimes \phi^{\sigma_1} \otimes \ldots \otimes \phi^{\sigma_n}. \end{aligned}$$

Ce tenseur appartient à un espace tensoriel de dimension $(\dim\, E)^{\ell+k+m+n}$.

2.3 Les changements de bases

En gardant les notations des paragraphes (1.3) et (1.5), lors d'un changement de base de E, un tenseur de type $\binom{\ell}{k}$ verra ses coordonnées transformées de la façon suivante

$$T'^{\mu_1..\mu_\ell}_{\nu_1..\nu_k} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \ldots \Lambda^{\mu_\ell}_{\rho_\ell}\, P^{\sigma_1}_{\nu_1} \ldots P^{\sigma_k}_{\nu_k}\, T^{\rho_1..\rho_\ell}_{\sigma_1..\sigma_k}. \tag{33}$$

Ainsi, un tel tenseur est dit *ℓ-fois contravariant* et *k-fois covariant.*

2.4 Le tenseur métrique

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie égale à n. On identifiera E à l'espace ponctuel $\mathbb{R}^n$.

Une *métrique* sur E, notée g, est une forme bilinéaire symétrique, définie et positive c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{E^2},\ \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{y},\mathbf{x}), \\ (2) & \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E},\ \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}, \\ (3) & \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E} - \{\mathbf{0}\},\ \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{x}) > \mathbf{0}. \end{array} \tag{34}$$

Lorqu'une telle forme (appelée aussi *produit scalaire*) existe sur un espace E de dimension finie, ce dernier est qualifié d'*espace euclidien*.
Lorsque les conditions (2) et (3) ne sont pas vérifiées, on parle de *pseudo-métrique* et d'*espace pseudo-euclidien*. Nous verrons l'importance de cette notion dans le cadre de la théorie de la Relativité Restreinte et Générale lorsqu'il s'agira de définir l'espace-temps.

Cette métrique peut être considérée comme un tenseur de type $\binom{0}{2}$. Autrement dit, soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E et $\mathcal{B}^\star = \{\phi^i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ sa base duale, les coordonnées du tenseur métrique g, notées g_{ij}, seront telles que

$$g = g_{ij}\,\phi^i \otimes \phi^j\,, \tag{35}$$

avec, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $g_{ij} = g_{ji}$ puisque g est symétrique.

La quantité $g(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est appelée *produit scalaire* des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ si g est une métrique, ou *pseudo-produit scalaire* dans le cas où g est une pseudo-métrique. On notera alors

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) =< \mathbf{x},\mathbf{y} >= \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\,. \tag{36}$$

Le carré de la *norme* ou *pseudo-norme* d'un vecteur $\mathbf{x}$, associée à la métrique g est défini comme étant égal à $g(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

Par conséquent, les coordonnées g_{ij} du tenseur métrique g, dans la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$, seront données par

$$g_{ij} = g(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) =< \mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j > \ . \tag{37}$$

La métrique g permet également de définir un isomorphisme canonique entre E et $E^\star$. En effet, à tout vecteur $\mathbf{x}$ de E, on peut associer une forme linéaire $\mathbf{x}^\star$ telle que

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}^\star : E & \to & \mathbb{R} \\ \mathbf{u} & \mapsto & g(\mathbf{x},\mathbf{u}) =< \mathbf{x},\mathbf{u} >\,, \end{array} \tag{38}$$

et, à toute forme linéaire $\mathbf{x}^\star$ de $E^\star$, on peut associer un vecteur $\mathbf{x}$ tel que, $\forall \mathbf{u} \in E$,

$$\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}) =< \mathbf{x}^\star,\mathbf{u} >=< \mathbf{x},\mathbf{u} >\,, \tag{39}$$

ce qui justifie la notation impropre faite dans les équations (36) et (37).
Par abus de langage, les coordonnées covariantes dans la base $\mathcal{B}^\star$, notées x_i, de $\mathbf{x}^\star$ seront appelées coordonnées covariantes du vecteur $\mathbf{x}$. De même, les coordonnées contravariantes dans la base $\mathcal{B}$, notées x^i, de $\mathbf{x}$ seront appelées coordonnées contravariantes de la forme $\mathbf{x}^\star$. Par définition des coordonnées contravariantes, nous aurons donc la relation :

$$x_i = g(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = g_{ij}\, x^j \,. \tag{40}$$

Enfin, le tenseur dual, noté $g^\star$, du tenseur métrique appartient à l'espace $E \otimes E$, c'est un tenseur symétrique de type $\binom{2}{0}$. En gardant les bases précédentes, on écrira

$$g^\star = g^{ij}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \,, \tag{41}$$

avec

$$g^{ij} = g^\star(\phi^i, \phi^j) = <\phi^i, \phi^j> \ . \tag{42}$$

Les vecteurs $\mathbf{e}_i$ et les formes ϕ^i auront donc, pour coordonnées covariantes et contravariantes,

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_i)_j &= g_{ij} & \qquad (\mathbf{e}_i)^j &= g_i^j = \delta_i^j \\ (\phi^i)^j &= g^{ij} & \qquad (\phi^i)_j &= g_j^i = \delta_j^i \,, \end{aligned} \tag{43}$$

avec les relations suivantes,

$$\begin{aligned} g_{ik}\, g^{kj} &= \delta_i^j \\ g^{ik}\, g_{kj} &= \delta_j^i \,. \end{aligned} \tag{44}$$

Ainsi, le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ peut s'exprimer indifféremment par les relations suivantes

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_i\, y^i = g_{ij}\, x^j\, y^i = g^{ij}\, x_i\, y_j \,, \tag{45}$$

ou bien

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^i\, y_i = g_{ij}\, x^i\, y^j = g^{ij}\, x_j\, y_i \,, \tag{46}$$

dans lesquelles x et y peuvent commuter, g étant symétrique.

En généralisant, le tenseur métrique g et son dual $g^\star$ permettent de modifier le type de n'importe quel tenseur, autrement dit, de changer la place de ses indices. Ainsi, un tenseur de type $\binom{\ell}{k}$ sera facilement modifié en un tenseur de type $\binom{\ell+1}{k-1}$ par g, ou bien, en un tenseur de type $\binom{\ell-1}{k+1}$ par $g^\star$. Par exemple, le tenseur $T = T^i{}_{j\,k}\, \mathbf{e}_i \otimes \phi^j \otimes \phi^k$ pourra être transformé en un tenseur dont les composantes s'écrivent

$$T^{i}{}_{k}{}^{\ell} = g^{\ell k}\, T^i{}_{j\,k} \,. \tag{47}$$

Remarques :
1) Une base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E sera dite *orthonormale* si et seulement si,

$$\begin{array}{ll}(1) & g \text{ est une métrique (et non une pseudo-métrique)}\,,\\ (2) & \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\; g_{ij} = \delta_{ij}\,.\end{array} \tag{48}$$

2) Le carré de la *pseudo-norme*[1], associée à la métrique, du vecteur reliant deux points infiniment voisins repérés par les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ sera égale à

$$\mathrm{d}s^2 = g(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = g_{ij}\,\delta x^i\,\delta x^j\,, \tag{49}$$

avec les quantités infinitésimales $\delta x^i \simeq \mathrm{d}x^i$. C'est souvent sous la forme de cette *distance* infinitésimale au carré qu'est définie une métrique.

2.5 La contraction des indices

La contraction de indices est une opération sur les tenseurs qui est indépendante de la métrique et de la base choisie pour les exprimer. Elle permet de transformer un tenseur de type $\binom{\ell}{k}$ en un tenseur de type $\binom{\ell-1}{k-1}$. Par exemple, au tenseur $T = T^i{}_{j\,k}\,\mathbf{e}_i \otimes \phi^j \otimes \phi^k$, de type $\binom{1}{2}$, pourra être associé le tenseur $U = T_k\,\phi^k$, de type $\binom{0}{1}$, dont les composantes sont

$$T_k = T^i{}_{i\,k}\,. \tag{50}$$

2.6 Les coordonnées curvilignes

Les coordonnées *curvilignes*[2] constituent une généralisation de la notion de coordonnées. Un système de coordonnées, dans un espace affine $\mathcal{E}_n$ de dimension n, permet d'associer à tout point M de cet espace n grandeurs scalaires u^i que l'on appelle *coordonnées du point* M. Plus précisément, soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathcal{E}_n$ et Φ un *difféomorphisme* de U : à tout point M de V, l'unique point A de U, dont l'image par Φ est le point M, est un n-uplet $(u^1, ..., u^n)$. Le couple (U, Φ) est appelé *système de coordonnées curvilignes.*
Le choix d'un système de coordonnées curvilignes est évidemment arbitraire. Par exemple, les coordonnées cartésiennes dans $\mathbb{R}^n$ sont des coordonnées curvilignes. Aussi, il est important de noter que le fait de changer de système de coordonnées curvilignes ne change en rien la nature intrinsèque des objets de l'espace considéré. Dans un espace physique, par exemple, les quantités physiques mesurables sont indépendantes du système de coordonnées choisi, qui pourra s'identifier à un simple choix d'unités.
Le problème est alors de savoir comment se transforment les coordonnées et les vecteurs de bases associés lorsque l'on change de systèmes de coordonnées.

Dans un espace affine euclidien ou pseudo-euclidien, nous pouvons toujours définir un repère quelconque $\{O, (\mathbf{e}_i)_{i\in[1,n]}\}$, où $\{(\mathbf{e}_i)_{i\in[1,n]}\}$ est une base de l'espace vectoriel E_n associé à $\mathcal{E}_n$. Les coordonnées $(x^1, ..., x^n)$ d'un point M, associées à ce repère,

[1] Ce carré peut être négatif.
[2] On dit aussi *coordonnées de Gauss.*

seront dites *rectilignes*. Le vecteur $\mathbf{OM}$ se décomposera suivant les vecteurs de base qui sont alors indépendants du point M. Etant donné un tel système de coordonnées rectilignes, un système de coordonnées curvilignes $(u^1, ..., u^n)$ sera tel que

$$\forall i \in [1, n], \;\; x^i = \Phi^i(u^1, ..., u^n) \tag{51}$$

où les Φ^i sont les n composantes d'un C^1-difféomorphisme Φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
Bien sûr, il existe un difféomorphisme Ψ $(= \Phi^{-1}\,!)$ de composantes Ψ^i tel que

$$\forall i \in [1, n], \;\; u^i = \Psi^i(x^1, ..., x^n)\,. \tag{52}$$

Si l'on fixe $n - 1$ coordonnées u^i et que l'on fait varier la dernière, on obtient un ensemble de points M de $\mathcal{E}_n$ appelé *ligne coordonnée*.

Par exemple, en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$, si l'on fixe r et ϕ, la ligne coordonnée obtenue en faisant varier θ est un méridien. De même, si l'on choisit de fixer une seule coordonnée alors, l'ensemble des points obtenus est une *hypersurface coordonnée*. Toujours en coordonnées sphériques, par exemple, si l'on fixe r et que l'on fait varier θ et ϕ, on obtient une sphère de rayon r.

Les coordonnées curvilignes nous amène à définir un nouveau type de repère, appelé *repère naturel*, dont les vecteurs vont dépendre explicitement des coordonnées curvilignes du point M que l'on souhaite repérer dans l'espace.
Soit O un point de $\mathcal{E}_n$, et $\{O, (\mathbf{e}_i)_{i\in[1,n]}\}$ un repère. En tout point M de $\mathcal{E}_n$, on définit un repère naturel $\{M, (\epsilon_i)_{i\in[1,n]}\}$ où les vecteurs de la *base naturelle* $\{(\epsilon_i)_{i\in[1,n]}\}$ sont définis par rapport à un système de coordonnées curvilignes $(u^1, ..., u^n)$ et sont tels que

$$\forall i \in [1, n], \;\; \epsilon_i = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial u^i} = \partial_i M\,. \tag{53}$$

Evidemment, ces vecteurs dépendent du point M où l'on se place, mais ils sont indépendants du point O choisi. Aussi, si $\mathbf{OM} = x^i\,\mathbf{e}_i$ alors (53) s'écrit tout simplement

$$\forall i \in [1, n], \;\; \epsilon_i = (\partial_i x^k)\,\mathbf{e}_k\,. \tag{54}$$

De plus, les vecteurs ϵ_i sont tangents aux lignes coordonnées qui se coupent en M.
Enfin, une base naturelle n'est pas, a priori, une base orthonormée. Par exemple, en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), si les vecteurs de la base orthonormée associée habituellement sont $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$ et $\mathbf{u}_\phi$, alors les vecteurs de la base naturelle seront tels que $\epsilon_1 = \mathbf{u}_r$, $\epsilon_2 = r\,\mathbf{u}_\theta$ et $\epsilon_3 = r\,\sin(\theta)\,\mathbf{u}_\phi$.

Considérons deux systèmes de coordonnées curvilignes $(u^1, ..., u^n)$ et $(u'^1, ..., u'^n)$, auxquels on associe, en tout point M, les bases naturelles, qui sont respectivement telles que

$$\forall i \in [1, n], \;\; \epsilon_i = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^i}\;; \;\; {\epsilon'}_i = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial {u'}^i}\,. \tag{55}$$

Chaque coordonnée curviligne d'un système étant une fonction des coordonnées de l'autre système, on aboutit aux relations, pour tout $i \in [1, n]$,

$$\epsilon_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} \, \epsilon'_k \, , \tag{56}$$

$$\epsilon'_i = \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \, \epsilon_k \, , \tag{57}$$

et

$$\frac{\partial u'^k}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} = \delta^k_j \, . \tag{58}$$

Les coordonnées d'un vecteur $\mathbf{x} = x^i \, \epsilon_i = x'^i \, \epsilon'_i$ seront donc, pour tout $i \in [1, n]$,

$$x^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \, x'^k \, , \tag{59}$$

$$x'^i = \frac{\partial u'^i}{\partial u^k} \, x^k \, . \tag{60}$$

De la même façon, celles d'une forme linéaire $\omega = \omega_i \, \phi^i = \omega'_i \, \phi'^i$, pour tout $i \in [1, n]$, s'écriront

$$\omega_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} \, \omega'_k \, , \tag{61}$$

$$\omega'_i = \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \, \omega_k \, . \tag{62}$$

Enfin, la généralisation à celles d'un tenseur de type $\binom{\ell}{k}$ donnera

$$T'^{\mu_1 .. \mu_\ell}_{\nu_1 .. \nu_k} = \frac{\partial u'^{\mu_1}}{\partial u^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial u'^{\mu_\ell}}{\partial u^{\rho_\ell}} \cdot \frac{\partial u^{\sigma_1}}{\partial u'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial u^{\sigma_k}}{\partial u'^{\nu_k}} \, T^{\rho_1 .. \rho_\ell}_{\sigma_1 .. \sigma_k} . \tag{63}$$

3 Le produit extérieur

Soit T un tenseur de $E_n^{(p)}$ ($= E_n \otimes \ldots \otimes E_n$ avec p termes). Si une transposition quelconque de deux indices de même variance change en son opposé (ou conserve) chaque composante de T alors T est dit *antisymétrique* (ou *symétrique*, respectivement).
Un tenseur est dit *complètement antisymétrique* si toute transposition de tout couple d'indices de même variance le change en son opposé.

Soit $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux vecteurs de E_n tels que $\mathbf{X} = x^i \, \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{Y} = y^j \, \mathbf{e}_j$. On appelle *produit extérieur de* $\mathbf{X}$ *par* $\mathbf{Y}$ le tenseur antisymétrique défini par

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = (x^i \, y^j - x^j \, y^i) \, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \, .$$

Ce produit est distributif par rapport à l'addition et anticommutatif.

On appelle q-*vecteur* le produit extérieur de q vecteurs $\mathbf{X}_k$ défini par la relation de récurrence

$$\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{X}_q = (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{X}_{q-1}) \wedge \mathbf{X}_q \,.$$

Un q-*vecteur* est changé en son opposé par permutation de deux quelconques de ses facteurs.
Plus précisément, définissons un *symbole de Kronecker à deux suites* par

$$\delta^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_q} = \begin{cases} (-1)^{\sigma(i_1 \ldots i_q)} \text{ pour } j_k \neq j_l \\ 0 \text{ pour } j_k = j_l \end{cases}$$

où $\sigma(i_1 \ldots i_q)$ est le nombre de transpositions nécessaires pour égaliser la suite des q entiers $i_1 \ldots i_q$ avec celle des q entiers $j_1 \ldots j_q$. Alors, un q-*vecteur* est un tenseur complètement antisymétrique tel que

$$\mathbf{X}_{j_1} \wedge \mathbf{X}_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{X}_{j_q} = \delta^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_q} \left(\mathbf{X}_{i_1} \otimes \mathbf{X}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{X}_{i_q} \right) .$$

Les q-vecteurs engendre un sous-espace vectoriel de $E_n^{(q)}$ de dimension C_n^q dont les vecteurs de base sont les q-vecteurs $\mathbf{e}_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{\alpha_q}$. Ainsi, toutes les composantes d'un q-vecteur se déduisent des composantes correspondant à une suite croissante des indices $\alpha_1 \ldots \alpha_q$. Ces composantes, notée $X^{\alpha_1 \cdots \alpha_q}$, sont appelées *composantes strictes*. Les composantes quelconques, $X^{i_1 \cdots i_q}$, d'un q-vecteur sont reliées aux composantes strictes par

$$X^{i_1 \ldots i_q} = \delta^{i_1 \ldots i_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} X^{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \,.$$

Remarque : le sous-espace vectoriel engendré par des n-vecteurs de $E_n^{(n)}$ est de dimension 1. Sa base est le vecteur $\mathbf{e}_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{\alpha_n}$.

Tout tenseur T complètement antisymétrique contravariant de $E_n^{(q)}$ défini par ses composantes $t^{i_1 \cdots i_q}$ peut s'identifier à un q-vecteur tel que

$$T = t^{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \, \mathbf{e}_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{\alpha_q} \,,$$

avec $\alpha_1 \ldots \alpha_q$ une suite croissante d'indices.
De même, tout tenseur S complètement antisymétrique covariant de $E_n^{(q)}$ défini par ses composantes $s_{j_1 \ldots j_p}$ peut s'identifier à une p-forme telle que

$$S = s_{\beta_1 \ldots \beta_q} \, \mathbf{e}^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{\beta_q} \,,$$

avec $\beta_1 \ldots \beta_q$ une suite croissante d'indices.

4 Tenseur d'orientation et tenseur adjoint

On dit que deux bases quelconques d'un espace vectoriel sont de *même sens* si le déterminant des composantes de l'une par rapport à l'autre est positif. L'espace vectoriel considéré est dit *orienté* si les seules bases admises ont le même sens qu'une base arbitrairement choisie.
Si l'on considère les n-vecteurs de $E_n^{(n)}$ et si g est le tenseur fondamental de E_n alors, les composantes strictes $t^{1\dots n}$ et $t_{1\dots n}$ de tout n-vecteur T sont telles que

$$T = t^{1\dots n}\, \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n \;,$$

et $\qquad t_{1\dots n} = det(g)\, t^{1\dots n}$.

On appelle alors *tenseur d'orientation* Θ de E_n, le n-vecteur de composantes strictes $\theta_{1\dots n} = \sqrt{|det(g)|}$ et $\theta^{1\dots n} = \sqrt{|det(g)|}/det(g)$.
La norme d'un tenseur euclidien T complètement antisymétrique est le nombre

$$||T|| = \sum_{C_n^q} t_{i_1\dots i_q}\, t^{i_1\dots i_n} \;.$$

Le *tenseur adjoint* $T^\star$ du tenseur T est le tenseur obtenu par le produit contracté de T par le tenseur d'orientation Θ de E_n.
Si T appartient à $E_n^{(q)}$ alors $T^\star$ appartient à $E_n^{(n-q)}$ et ses composantes sont

$$t^\star_{i_{q+1}\dots i_n} = \frac{1}{q!}\, t^{i_1\dots i_q}\, \theta_{i_1\dots i_n} \;.$$

Remarques :
1) Si T est d'ordre $n-1$ alors $T^\star$ est un vecteur.
2) Les adjoints des 2-vecteurs sont d'ordre $n-2$ donc, pour $n=3$, ces adjoints sont des vecteurs : ainsi le tenseur adjoint du tenseur $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ (vu précedemment) s'écrit (en utilisant ses composantes covariantes) $\sqrt{|det(g)|}\, \delta_{ijk}\, x^i\, y^j$.
3) Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, l'adjoint du produit extérieur de deux vecteurs est leur produit vectoriel.

5 Les symboles de Christoffel

Soit $(u^1, ..., u^n)$ un système quelconque de coordonnées curvilignes. Le caractère *local* de la base naturelle associée fait que les différentielles des vecteurs de la base sont généralement non nulles. Elles se décomposent dans la base naturelle de la manière suivante

$$\forall i \in [1,n], \;\; \mathrm{d}\epsilon_i = \omega_i^k\, \epsilon_k \tag{64}$$

où les grandeurs ω_i^k sont des formes différentielles.
Ces formes différentielles se décomposent elles-même sur la base $\left\{(\mathrm{d}u^i)_{i\in[1,n]}\right\}$ et deviennent ainsi

$$\forall (i,k) \in [1,n]^2, \;\; \omega_i^k = \Gamma_{ij}^k\, \mathrm{d}u^j \;. \tag{65}$$

Les symboles Γ^k_{ij} issus de cette décomposition sont appelés *symboles de Christoffel de deuxième espèce*. Ils permettent entre autre de comparer deux bases naturelles en deux points infiniment voisins.
Les composantes covariantes, ω_{ik}, des différentielles $\mathrm{d}\epsilon_i$ nous amènent à définir les *symboles de Christoffel de première espèce* qui sont tels que

$$\omega_{ik} = \epsilon_i \, \mathrm{d}\epsilon_k = \Gamma_{ijk} \, \mathrm{d}u^j \, . \tag{66}$$

En considérant les composantes covariantes, g_{ij}, du tenseur métrique associé au système de coordonnées curvilignes choisi, on déduit facilement la relation entre les symboles de Christoffel de première et deuxième espèce

$$\Gamma_{ijk} = g_{il} \, \Gamma^l_{jk} \, . \tag{67}$$

De même, avec les composantes contravariantes, g^{ij}, on aura

$$\Gamma^i_{jk} = g^{il} \, \Gamma_{ljk} \, . \tag{68}$$

Nous allons voir à présent que les symboles de Christoffel sont entièrement déterminés par la donnée du tenseur métrique. La différentielle des composantes covariantes de ce tenseur donne

$$\mathrm{d}g_{ij} = g_{il} \, \omega^l_j + g_{jl} \, \omega^l_i \tag{69}$$

c'est-à-dire, d'après la relation (66),

$$\mathrm{d}g_{ij} = \left(\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}\right) \, \mathrm{d}u^k \, . \tag{70}$$

Et comme $\mathrm{d}g_{ij} = (\partial_k g_{ij}) \, \mathrm{d}u^k$, il vient

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = \partial_k g_{ij} \, . \tag{71}$$

Enfin, puisque $\partial_{kj} M = \partial_{jk} M$, on montre que, pour tout (i, j, k) de $[1, n]^3$,

$$\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki} \tag{72}$$

$$\Gamma_{jik} = \Gamma_{jki} \, . \tag{73}$$

La relation (71) et les relations (72) et (73) nous fournissent une définition des symboles de Christoffel à partir du tenseur métrique

$$\begin{aligned} \Gamma_{jki} &= \frac{1}{2} \left(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}\right) \\ \Gamma^i_{kj} &= \frac{1}{2} \, g^{il} \left(\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{kj}\right) . \end{aligned}$$

On peut vérifier, grâce à un changement de base, que ces symboles de Christoffel ne constituent pas les composantes d'un tenseur.

6 L'équation des géodésiques

Les géodésiques sont une généralisation de la notion de droite. Je ne vais qu'indiquer brièvement comment on aboutit à l'équation des géodésiques (voir [3]).

Il suffit pour cela d'exprimer la longueur du chemin entre deux points M_1 et M_2 de notre espace $\mathcal{E}_n$. Aussi, ce chemin peut être représenté par les équations paramétriques qui sont

$$\forall i \in [1, n], \;\; u^i = u^i(\tau) \tag{74}$$

où τ est un paramètre quelconque.
D'après l'équation (49), la longueur du chemin sera l'intégrale ℓ telle que

$$\ell = \int_{M_1}^{M_2} \left(g_{ij} \, \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} \, \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}\tau} \right)^{1/2} \mathrm{d}\tau \,. \tag{75}$$

En choisissant comme paramètre quelconque l'abscisse curviligne s le long des chemins considérés, l'extrémalisation de la longueur ℓ grâce aux équations d'Euler nous donne l'équation des géodésiques

$$\frac{\mathrm{d}^2 u^l}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^l_{jk} \, \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} \, \frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s} = 0 \,. \tag{76}$$

Cette équation va nous permettre d'aborder ce que l'on appelle le *transport parallèle* et la *différentielle absolue* d'un tenseur.

7 La différentielle absolue

Le transport parallèle d'un vecteur $\mathbf{V}$ quelconque consiste à déplacer le vecteur parallèlement à lui-même le long d'une géodésique. En coordonnées rectilignes, ce transport ne modifie pas les coordonnées du vecteur. En revanche, il est facile de constater qu'il n'en est pas de même avec un système quelconque de coordonnées curvilignes $(u^1, ..., u^n)$ puisque les vecteurs de la base naturelle sont différents en chaque point de l'espace considéré.

Considérons le produit scalaire du vecteur $\mathbf{V}$ de composantes covariantes v_k avec le vecteur $\mathbf{n}$ de composantes contravariantes $\mathrm{d}u^k/\mathrm{d}s$. Nous savons que ce produit scalaire est indépendant de tout repère. Il s'écrit

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = v_k \, \frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s} \,. \tag{77}$$

Prenons la différentielle de ce produit scalaire ;

$$\mathrm{d}\left(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\right) = \mathrm{d}v_i \, \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} + v_j \, \frac{\mathrm{d}^2 u^j}{\mathrm{d}s^2} \, \mathrm{d}s \,, \tag{78}$$

où la différentielle $\mathrm{d}v_i$ est telle que

$$\mathrm{d}v_i = \partial_l v_i \, \frac{\mathrm{d}u^l}{\mathrm{d}s} \, \mathrm{d}s \, . \tag{79}$$

Cette dernière équation et l'équation des géodésiques permettent de réécrire l'équation (78) sous la forme

$$\mathrm{d}\,(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = \left(\partial_j v_k - v_i \Gamma^i_{kj}\right) \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s} \, \mathrm{d}s \, .$$

Ainsi, comme le vecteur $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire constant, la différentielle du produit scalaire n'est autre que

$$\mathrm{d}\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathrm{D}v_k \, \frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s} \tag{80}$$

avec $\mathrm{D}v_k = (\partial_j v_k - v_i \Gamma^i_{kj}) \, \mathrm{d}u^j$.
La différentielle absolue du vecteur $\mathbf{V}$, notée $\mathrm{d}\mathbf{V}$, s'écrit donc

$$\mathrm{d}\mathbf{V} = \mathrm{D}v_k \, \epsilon^k \tag{81}$$

Enfin, les quantités $(\partial_j v_k - v_i \Gamma^i_{kj})$, notée $\nabla_j v_k$, sont les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre 2 appelé *tenseur dérivée covariante* du vecteur $\mathbf{V}$. Les composantes mixtes $\nabla_j v^k$ seront alors égale à $(\partial_j v^k + v^i \Gamma^k_{ji})$ et l'on écrira

$$\mathrm{d}\mathbf{V} = \mathrm{D}v^k \, \epsilon_k = \nabla_j v^k \, \mathrm{d}u^j \, \epsilon_k \, . \tag{82}$$

On notera que cette opération de dérivation est bien linéaire. En outre, elle s'étend aisément aux tenseurs d'ordre quelconque : soit, par exemple, un tenseur $\mathbf{U}$ d'ordre 3 dont les composantes mixtes sont les quantités u^r_{st}. Les quantités $\nabla_k u^r_{st}$ appelées dérivées covariantes des composantes mixtes u^r_{st} du tenseur $\mathbf{U}$ sont telles que

$$\begin{aligned} \nabla_k u^r_{st} = \partial_k u^r_{st} + u^i_{st} \Gamma^r_{ki} \\ - u^r_{it} \Gamma^i_{ks} - u^r_{si} \Gamma^i_{kt} \end{aligned} \tag{83}$$

La différentielle absolue du tenseur $\mathbf{U}$ sera alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{U} &= \nabla_k u^r_{st} \, \mathrm{d}u^k \, \epsilon_r \otimes \epsilon^s \otimes \epsilon^t \\ &= \mathrm{D}u^r_{st} \, \epsilon_r \otimes \epsilon^s \otimes \epsilon^t \end{aligned} \tag{84}$$

Il est utile de remarquer que la différentielle absolue d'un produit tensoriel $\mathbf{W} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ est

$$\mathrm{d}\mathbf{W} = \mathrm{d}\mathbf{U} \otimes \mathbf{V} + \mathbf{U} \otimes \mathrm{d}\mathbf{V} \, , \tag{85}$$

cette formule se généralisant pour des produits tensoriels quelconques et les sommes de produits tensoriels.

8 Opérateurs différentiels

Je terminerai en donnant la définition des opérateurs différentiels *classiques* que l'on utilise beaucoup en physique et qui sont le *gradient*, le *rotationnel*, la *divergence* et le *laplacien*.

Soit $(u^1, ..., u^n)$ un système quelconque de coordonnées curvilignes. Considérons un champ de scalaires défini en tout point de l'espace affine pseudo-euclidien $\mathcal{E}_n$ par une fonction différentiable F des coordonnées curvilignes u^i. Le *vecteur gradient* de F, noté $\mathbf{grad}\, F$, est défini par

$$\mathbf{grad}\, F = \partial_k F\, \epsilon^k = g^{ik}\, \partial_k F\, \epsilon_i \tag{86}$$

où les quantités $\partial_k F$ sont les composantes covariantes de $\mathbf{grad}\, F$ et les quantités $g^{ik}\, \partial_k F$ les composantes contravariantes.

Soit un champ de vecteurs $\mathbf{V}$ de composantes covariantes v_i. Le tenseur antisymétrique appelé *tenseur rotationnel* de $\mathbf{V}$ et noté $\mathbf{rot\, V}$ est défini par

$$\mathbf{rot\, V} = (\partial_j v_i - \partial_i v_j)\, \epsilon^i \otimes \epsilon^j \tag{87}$$

où l'on peut noter $(\partial_j v_i - \partial_i v_j) = (\mathbf{rot\, V})_{ij}$, les composantes covariantes de ce tenseur.

Dans un espace affine pseudo-euclidien $\mathcal{E}_3$ de dimension 3 muni d'un système de coordonnées dont la base naturelle associée est orthonormée, on définit le *vecteur rotationnel*, $\overrightarrow{rot}\, \mathbf{V}$, à l'aide des composantes strictes du tenseur $\mathbf{rot\, V}$: on a

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{rot}\, \mathbf{V})_1 &= \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\
(\overrightarrow{rot}\, \mathbf{V})_2 &= \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\
(\overrightarrow{rot}\, \mathbf{V})_3 &= \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1
\end{aligned} \tag{88}$$

qui constituent les composantes contravariantes du vecteur rotationnel classique.

Si la base naturelle n'est pas orthonormée, alors, dans cette base, les composantes du vecteur rotationnel seront

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{rot}\, \mathbf{V})_1 &= \frac{1}{\sqrt{|det(g)|}}(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) \\
(\overrightarrow{rot}\, \mathbf{V})_2 &= \frac{1}{\sqrt{|det(g)|}}(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) \\
(\overrightarrow{rot}\, \mathbf{V})_3 &= \frac{1}{\sqrt{|det(g)|}}(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)
\end{aligned}$$

où g est le tenseur métrique associé au système de coordonnées choisi.

La *divergence* d'un vecteur $\mathbf{V}$, notée $\mathrm{div}\mathbf{V}$, s'obtient par la contraction du tenseur dérivée covariante $\nabla_k v^i$:

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = \nabla_i v^i = \partial_i v^i + \Gamma^i_{ij} v^j \, . \tag{89}$$

En utilisant les expressions des symboles de Christoffel, on obtient, après quelques manipulations,

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{|det(g)|}} \, \partial_i \left(v^i \sqrt{|det(g)|} \right) \, .$$

Pour un système de coordonnées dont la base naturelle associée est orthonormée, on retrouve l'expression classique $\mathrm{div}\mathbf{V} = \partial_i v^i$.

Enfin, le *laplacien*, ΔF, d'un champ de scalaires défini en tout point par une fonction différentiable F des coordonnées curvilignes u^i, est donné par

$$\Delta F = \mathrm{div}(\mathbf{grad} F) \, . \tag{90}$$

Cela se réécrit

$$\Delta F = g^{ik} (\partial_{ik} F - \Gamma^l_{ik} \partial_l F) \, . \tag{91}$$

Si l'on reporte les composantes contravariantes de $\mathbf{grad}\, F$ dans la relation (91), on aura

$$\Delta F = \frac{1}{\sqrt{|det(g)|}} \, \partial_i \left(\sqrt{|det(g)|} \, g^{ik} \partial_k F \right) \, .$$

Là encore, pour un système de coordonnées dont la base naturelle associée est orthonormée, on retrouve l'expression classique $\Delta F = \partial_{kk} F$.

Références

[1] L. Schwartz. *Les tenseurs*. Editions Hermann, 1975.

[2] W. Appel. *Mathématiques pour la physique et les physiciens*. Editions H&K, 2002.

[3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Théorie des Champs*. Editions Mir, 1964.