Séries de Fourier
Transformées de Fourier
Distribution de Dirac

Denis Gialis

Séries de Fourier

Définition : Si f est une fonction continue par morceaux et de classe C^1 par morceaux sur ℝ et T-périodique alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{ik_n x} \quad \text{où } k_n = \frac{2\pi \cdot n}{T} \quad \text{et } c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cdot e^{-ik_n x} \cdot dx$$

(Si f n'est pas continue en x alors $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{ik_n x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x-h)]$)

c'est équivalent à

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cdot \cos(k_n x) + b_n \cdot \sin(k_n x)]$$

avec $a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cdot dx$, $a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cdot \cos(k_n x) \cdot dx$ et $b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cdot \sin(k_n x) \cdot dx$

Propriétés : $\forall n > 0$, on a

$a_n = c_n + c_{-n}$

$b_n = i \cdot (c_n - c_{-n})$

f paire $\Leftrightarrow b_n = 0$

f impaire $\Leftrightarrow a_n = 0$

f réelle $\Leftrightarrow (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$

On appelle **spectre de Fourier** l'ensemble $\{|c_n|\}_{n \in Z}$

L'égalité de Parseval est $\frac{1}{T} \cdot \int_{x_0}^{x_0+T} |f(x)|^2 \cdot dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$

Transformée de Fourier

Définition : Si f est une fonction bornée, intégrable, et possédant un nombre fini d'extrema et de discontinuités sur ℝ alors sa transformée de Fourier, notée TF[f], est telle que

$$\forall s \in \mathbb{R},\ TF[f](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2i\pi sx} \cdot dx$$

Si f est de carré sommable alors $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} TF[f](s) \cdot e^{2i\pi sx} \cdot ds$

Généralisation : Si f est définie sur $\mathbb{R}^n$, alors $\forall(\mathbf{r},\mathbf{w}) \in \mathbb{R}^n$, $TF[f](\mathbf{w}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) \cdot e^{-2i\pi\cdot\mathbf{r}\cdot\mathbf{w}} \cdot d\mathbf{r}$

Propriétés
Soient f et g deux fonctions et a un réel non nul, alors
TF[a·f] = a·TF[f]
TF[f+g] = TF[f] + TF[g]
TF[f(a·x)] = $\frac{1}{|a|}$ · TF[f]($\frac{s}{a}$)
TF[f(x-a)] = $e^{-2i\pi as}$ · TF[f](s)
TF[df/dx] = (2iπs)·TF[f](s)
TF[$d^n f/dx^n$] = $(2i\pi s)^n$·TF[f](s)

Symétrie des paires de Fourier

f	**TF[f]**
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire
imaginaire et paire	imaginaire et paire
complexe et paire	complexe et paire
complexe et impaire	complexe et impaire
réelle quelconque	partie réelle paire partie imaginaire impaire
imaginaire quelconque	partie imaginaire paire partie réelle impaire

Produit de convolution
Soient f et g deux fonctions, on appelle produit de convolution la fonction h telle que

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot g(x-u) \cdot du$$

Propriétés
TF[f*g] = TF[f]·TF[g]
TF[f·g] = TF[f]*TF[g]

Produit de corrélation
Soient f et g deux fonctions, on appelle produit de corrélation la fonction k telle que

$$k(x) = f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(u)} \cdot g(u+x) \cdot du$$

Théorème de Wiener-Khintchine (ou d'autocorrélation)

$$TF[f \otimes f] = |TF[f]|^2$$

Théorème de Parseval (ou de Rayleigh)

$$\int |f(x)|^2 \cdot dx = \int |TF[f](s)|^2 \cdot ds$$

De même, si f et g sont deux fonctions : $\int f \cdot \overline{g} \cdot dx = \int TF[f] \cdot \overline{TF[g]} \cdot ds$

Le **spectre** de f(x) est TF[f](s).
Le **spectre d'amplitude** de f(x) est $|TF[f](s)|$.
Le **spectre de phase** de f(x) est arg(TF[f](s)).

Le **spectre de puissance** ou **densité spectrale** de f(x) est $|TF[f](s)|^2$.

La **puissance instantanée** d'un signal f(x) est $p(x) = f(x) \cdot \overline{f(x)}$.
La **puissance moyenne** sur un intervalle X centré en x_0 du signal f(x) est

$$P(x_0, X) = \frac{1}{X} \cdot \int_{x_0 - \frac{X}{2}}^{x_0 + \frac{X}{2}} f(x) \cdot \overline{f(x)} \cdot dx$$

L'**énergie associée** au signal f(x) est $e = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot dx$

Distribution δ de Dirac

Définition : La distribution δ de Dirac est définie pour tout x appartenant à ℝ par

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi sx} \cdot ds$$

Propriétés
TF[δ] = 1

Si (a,b)∈ ℝ², $\delta(a \cdot x + b) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(x + \frac{b}{a})$

δ(x) = δ(-x) et δ(x-a)*δ(x-b)= δ(x-a-b)

$x \cdot \delta'(x) = -\delta(x)$

$\delta'(-x) = -\delta'(x)$

Soit f une fonction, $\int_a^b \delta(x - x_0) \cdot f(x) \cdot dx = f(x_0)$ si $x_0 \in [a,b]$ et 0 sinon

δ est l'élément neutre du produit de convolution : δ*f = f

δ'*f = δ*f ' = f ' et $\delta^{(m)}*f = f^{(m)}$

$< \delta', f >= \int \delta' \cdot f = -\int \delta \cdot f' = -< \delta, f' >$

La **fonction porte Π** est telle que ∀a>0, $\Pi\left(\frac{x}{a}\right) = 1$ si x∈]-a/2,a/2[et 0 sinon

$TF(\Pi\left(\frac{x}{a}\right)) = a \cdot \sin c(a \cdot s) = \frac{\sin(\pi a s)}{\pi s}$

La **fonction H de Heaviside** est telle que H(x) = 0 si x<0 et H(x) = 1 si x>0

H'(x) = δ(x)

Soit D = $\frac{d^m}{dx^m} + a_1 \cdot \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + a_{m-1} \cdot \frac{d}{dx} + a_m$, alors Dδ est inversible pour (*) et son inverse est H·Z où Z est solution de l'équation différentielle DZ = 0 avec Z(0) = …= $Z^{(m-2)}(0) = 0$ et $Z^{(m-1)}(0) = 1$.

D(H·Z) = δ

Le **peigne de Dirac** est défini par $\omega(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n)$

TF[ω](s) = $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi ns} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(s-n)$

∀T>0, $\frac{1}{T}\cdot\omega\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n\cdot T)$ et TF[$\frac{1}{T}\cdot\omega\left(\frac{t}{T}\right)$] $= \omega(T\cdot s) = \frac{1}{T}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(s-\frac{n}{T})$

$\omega(t)\cdot f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)\cdot f(t)$

$\omega(t) * f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-n)$

Transformées de Fourier usuelles

$TF[\cos(\pi\cdot x)] = \frac{1}{2}\cdot[\delta(s+\frac{1}{2}) + \delta(s-\frac{1}{2})]$

$TF[\cos(2\pi\cdot\nu_0\cdot t)] = \frac{1}{2}\cdot[\delta(\nu+\nu_0) + \delta(\nu-\nu_0)]$

$TF[\sin(\pi\cdot x)] = \frac{i}{2}\cdot[\delta(s+\frac{1}{2}) - \delta(s-\frac{1}{2})]$

$TF[\sin(2\pi\cdot\nu_0\cdot t)] = \frac{i}{2}\cdot[\delta(\nu+\nu_0) - \delta(\nu-\nu_0)]$

$TF[e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}] = \sqrt{2\pi\cdot\sigma}\cdot e^{-2\pi\cdot\sigma^2\cdot s^2}$