Physique des Milieux Continus

Denis GIALIS

Sommaire

I - Rappels de mécanique des fluides

Statique des fluides

Un fluide est au repos dans un référentiel (R) si le champ des vitesses **v**(M, t) est nul en tout point M du fluide à tout instant t.

Les actions qui s'exercent sur un fluide, en mouvement ou au repos, limité par une surface de contrôle (Σ), sont de deux sortes :

- Les actions à distance, caractérisées en chaque point A du fluide, à l'instant t, par la densité de forces volumiques :

$$\mathbf{f}_V(A,t) = \frac{d\mathbf{F}_V}{d\tau}$$

où $d\mathbf{F}_V$ est la force qui s'exerce sur l'élément de volume dτ autour de A.

- Les actions de contact, caractérisées en chaque point M du fluide situé sur (Σ), à l'instant t, par la densité de forces surfaciques ou **contrainte** :

$$\mathbf{f}_S(M,t) = \frac{d\mathbf{F}_S}{dS}$$

où $d\mathbf{F}_S$ est la force qui s'exerce sur un élément d'aire dS autour de M.

On décompose la contrainte $\mathbf{f}_S$ en une composante tangentielle $\mathbf{f}_{ST}$ et une composante normale $\mathbf{f}_{SN}$ par rapport à l'élément d'aire dS.
Dans un fluide parfait au repos ; $\mathbf{f}_{ST} = 0$, donc $\mathbf{f}_S$ est normale à dS en tout point M.
En désignant par **n** le vecteur unitaire normal à dS en M, dirigé vers l'extérieur de (Σ), on pose pour un fluide au repos ;

$$\mathbf{f}_S(M,t) = \frac{d\mathbf{F}_S}{dS} = -p(M)\cdot\mathbf{n}$$

où la fonction scalaire p(M) définit le **champ de pression du fluide**. La pression p en M est indépendante de l'orientation de **n**.
La force pressante exercée par le fluide au repos sur l'élément d'aire dS de (Σ) est donc ;

$$d\mathbf{F} = -d\mathbf{F}_S = p(M)\cdot dS\cdot\mathbf{n}$$

La condition d'équilibre d'un fluide, placé dans un champ de forces donné caractérisé en chaque point M par la densité volumique des forces $\mathbf{f}_V = d\mathbf{F}_V/d\tau$, se traduit, dans un référentiel galiléen (R), par la relation locale fondamentale :

$$\mathbf{grad}\,(p(M)) = \mathbf{f}_V(M)$$

Si les seules forces volumiques qui agissent sur le fluide, de masse volumique μ, sont celles du champ de pesanteur **g**, on a :

$$\mathbf{f}_V = \frac{d\mathbf{F}_V}{d\tau} = \mu \cdot \mathbf{g}$$

Donc, dans (R) galiléen :

$$\mathbf{grad}\ (p) = \mu \cdot \mathbf{g}$$

Si **g** est suivant l'axe (Oz) de vecteur directeur $\mathbf{u}_z$ tel que $\mathbf{g} = -g \cdot \mathbf{u}_z$, alors ;

$$\frac{dp}{dz} = -\mu \cdot g$$

En intégrant,

$$p_1 - p_2 = \int_{z_1}^{z_2} \mu \cdot g \cdot dz$$

Les surfaces isobares sont orthogonales aux lignes de champ de **g**.

Pour un liquide incompressible : μ = Cte, donc

$$p_1 - p_2 = \mu \cdot g \cdot (z_2 - z_1)$$

ou

$$p_1^* = p_2^*$$

avec $p^* = p + \mu \cdot g \cdot z$ qui est la **pression statique**.

Pour un gaz parfait isotherme de température T et de masse molaire M :

$$\mu = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \Rightarrow p_2 = p_1 \cdot e^{-\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot (z_2 - z_1)}$$ (équation du nivellement barométrique)

Si un fluide est en équilibre dans un référentiel (R') non galiléen, la relation locale fondamentale reste vraie à condition d'ajouter au champ **g** le champ d'accélération d'entraînement $\mathbf{a}_e$:

$$\mathbf{grad}\ (p) = \mu \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{a}_e)$$

Pour étudier l'équilibre d'une grande masse de fluide, comme par exemple une étoile, dont la cohésion est essentiellement due à l'attraction gravitationnelle, on utilise le théorème de Gauss : le flux du champ de pesanteur **g** à travers une surface fermée (Σ) est ;

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{ds} = -4\pi \cdot G \cdot m_{int}$$

où m_{int} est la masse du fluide intérieure à (Σ) et G la constante de gravitation universelle.

Théorème de Pascal
Un liquide incompressible au repos transmet intégralement les pressions.

Théorème d'Archimède
Tout solide immergé dans un système de fluide au repos subit une force $\mathbf{F}_a$, égale et opposée au poids des fluides déplacés : $\mathbf{F}_a = -\mathbf{P}$
La poussée d'Archimède $\mathbf{F}_a$ est appliquée au centre de masse des fluides déplacés.

Cinématique des fluides

Description lagrangienne
On suit l'évolution au cours du temps d'un même petit élément de fluide. La position M de cet élément est repérée à chaque instant t par :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{s}(t, \mathbf{s_0}) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{s_0}$ est la position initiale de cet élément.
Sa vitesse est :

$$\mathbf{v_P}(t) = \frac{d\mathbf{OM}}{dt}$$

Les variables de Lagrange sont t et les trois composantes de $\mathbf{s_0}$.

Description eulérienne
On décrit la répartition des vitesses **v** dans l'ensemble du fluide à un instant t donné. Soit P un point fixe du référentiel d'origine O dans lequel s'effectue l'étude du mouvement et qui est repéré par :

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La vitesse du fluide en P à un instant t donné est :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Cette vitesse est une fonction des variables indépendantes **r** et t.
L'ensemble des vitesses locales **v**(**r**, t), ou champ de vitesse, permet de décrire le mouvement du fluide.
Pour une particule M de fluide qui se trouve au point d'observation P à l'instant t, on peut confondre la vitesse locale **v**(**r**, t) et la vitesse instantanée de la particule :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_P(t) = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix}$$

Accélération d'une particule de fluide et vitesse locale
La particule de fluide ayant en **r** la vitesse $\mathbf{v_P}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ à l'instant t se trouve à l'instant t + dt à la position **r + dr** avec $d\mathbf{r} = \mathbf{v_P}(t)\cdot dt = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\cdot dt$. On doit alors considérer **r** comme une fonction de t et ainsi $\mathbf{v_P}(t+dt) = \mathbf{v}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}, t+dt)$.

L'accélération d'une particule de fluide est ;

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}_P(t)}{dt}$$

avec $d\mathbf{v_P}(t) = d\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\cdot dz + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\cdot dt$

Donc, comme $d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \mathbf{v_P}(t)\cdot dt = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\cdot dt$, on déduit que $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix}$ et :

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\cdot v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\cdot v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\cdot v_z$$

ou encore,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \cdot \mathbf{v}$$

avec $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) + \mathbf{rot}(\mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ qui est l'**accélération convective**. Cette accélération traduit le caractère non uniforme du champ de vitesse locale.

L'**accélération locale** est $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ et traduit le caractère non permanent du champ local de vitesse.
La **dérivée particulaire** de **v** (ou " dérivée en suivant le mouvement ") est ;

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \cdot \mathbf{v}$$

On définit le **vecteur rotation d'un fluide** en mouvement par ;

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t))$$

On appelle **vorticité du fluide** en **r**, à l'instant t, la quantité ;

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = 2\mathbf{\Omega}$$

Classification des écoulements des fluides
Un fluide est dit **parfait** si on néglige sa viscosité donc si on néglige les frottements entre les couches voisines du fluide en mouvement.
L'écoulement d'un fluide est **permanent** si son champ de vitesse en **r** ne dépend pas explicitement du temps c'est-à-dire $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$.

L'écoulement d'un fluide est **uniforme** si son champ de vitesse en **r** ne dépend pas explicitement de la position : $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$.

L'écoulement d'un fluide est **irrotationnel** si le vecteur rotation est partout nul :

$$\mathbf{\Omega} = 0 \text{ donc } \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = 0$$

On peut alors poser ; $\mathbf{v} = -\,\mathbf{grad}(\varphi)$. Le champ de vitesse dérive ainsi d'un potentiel scalaire φ appelé **potentiel des vitesses** et défini à une constante près.

Si $\mathbf{\Omega}$ n'est pas identiquement nul, l'écoulement est dit **rotationnel** (ou tourbillonnaire) et $\mathbf{rot}(\mathbf{v}) = 2\mathbf{\Omega} \neq 0$.
Aussi, d'après le théorème de Stokes ;

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2\iint_S \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{S}$$

où (C) est un contour fermé et (S) une surface s'appuyant sur (C).

L'écoulement d'un fluide est **plan** si le champ de vitesse ne dépend que de deux coordonnées d'espace et du temps.

Equations de conservation de la masse
La conservation de la masse d'un fluide en mouvement, de masse volumique $\mu(\mathbf{r}, t)$ et de champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, est traduite par l'équation locale :

$$\mathrm{div}(\mu \cdot \mathbf{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \qquad \text{(équation de continuité)}$$

Un fluide est dit **incompressible** si sa masse volumique est constante, on a alors ;

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0$$

D'après le théorème d'Ostrogradsky, l' équation de continuité s'écrit sous forme intégrale pour un fluide à l'intérieur d'un volume de contrôle τ de surface S ;

$$\iint_S \mu \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau \mu \cdot d\tau = 0$$

Le **débit massique du fluide** qui sort de la surface S est défini par ;

$$D_m = \iint_S \mu \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

La masse de fluide à l'intérieur du volume τ étant ; m = $\iiint_\tau \mu \cdot d\tau$, on a :

$$D_m + \frac{dm}{dt} = 0$$

En régime permanent, $\frac{dm}{dt}$ = 0, donc D_m = 0. Il y a conservation du débit massique du fluide.

Les **lignes de courant**, à un instant t donné, sont les lignes de champ du vecteur vitesse **v**, c'est-à-dire les courbes tangentes à **v** en chaque point du fluide.
Un **tube de courant** est une portion de fluide limitée par des lignes de courant.
Une **équipotentielle** est une ligne ou une surface définie par φ = Cte.

Dynamique des fluides parfaits

Equation d'Euler dans un référentiel (R) galiléen

Tout fluide en mouvement, placé dans un champ de forces extérieures obéit à l'équation locale ;

$$\mathbf{grad}(p) = \mathbf{f}_V - \mu \cdot \mathbf{a}$$

où $\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \cdot \mathbf{v}$ et p est la pression du fluide au point où la densité volumique des forces extérieures est $\mathbf{f}_V = d\mathbf{F}_V/d\tau$.

Dans le champ de pesanteur **g**, on a $\mathbf{f}_V = \mu \cdot \mathbf{g}$ donc ; $\mathbf{grad}(p) = \mu \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{a})$.
On écrit aussi ;

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v}^2) + \mathbf{rot}(\mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{grad}(p)$$

Equation d'Euler dans un référentiel (R') non galiléen

Si l'accélération **a** d'une particule est mesurée dans (R') non galiléen, il faut introduire les forces d'inertie d'entraînement et complémentaire :

$$\mathbf{grad}(p) = \mathbf{f}_V - \mu \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c)$$

où **a** est l'accélération relative, $\mathbf{a}_e$ l'accélération d'entraînement du fluide et $\mathbf{a}_c$ l'accélération complémentaire.

Dans le référentiel terrestre non galiléen, en appelant $\mathbf{\Omega}$ le vecteur rotation de la Terre, on a ;

$$\mathbf{grad}(p) = \mu \cdot (\mathbf{g} - 2\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v}).$$

Théorème d'Euler

La somme des forces extérieures appliquées à un **système fermé** de quantité de mouvement totale **P** = $\iiint \mu \cdot \mathbf{v} \cdot d\tau$ est telle que ;

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint \mu \cdot \mathbf{v} \cdot d\tau$$

Pour un **système ouvert**, c'est-à-dire un fluide en mouvement à l'intérieur d'une surface de contrôle (Σ) délimitant un volume τ, la loi précédente devient :

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{D}_P$$

où $\mathbf{D}_P = \iint_\Sigma \mathbf{v} \cdot (\mu \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s})$ est le débit des quantités de mouvement sortant de (Σ).

Ainsi,

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d}{dt}\iiint \mu \cdot \mathbf{v} \cdot d\tau + \iint_\Sigma \mathbf{v} \cdot (\mu \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s})$$

Si le régime est permanent, d**P**/dt = 0, donc :

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{D}_P = \iint_\Sigma \mathbf{v} \cdot (\mu \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s})$$

Théorème de l'énergie cinétique

Pour un **système fermé**, d'énergie cinétique dans (R) galiléen

$$E_c = \iiint \frac{1}{2} d(m \cdot \mathbf{v}^2) = \iiint \frac{1}{2}\mu \cdot \mathbf{v}^2 \cdot d\tau,$$

la puissance des forces appliquées à ce système est égale à la dérivée temporelle de l'énergie cinétique :

$$P = \frac{dE_c}{dt}$$

Pour un **système ouvert**, cette puissance devient ;

$$P = \frac{dE_c}{dt} + D_E$$

où $D_E = \iint_\Sigma \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \mathbf{v}^2\right) \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ est le débit d'énergie cinétique sortant de (Σ), donc :

$$P = \frac{d}{dt}\iiint \frac{1}{2}\mu \cdot \mathbf{v}^2 \cdot d\tau + \iint_\Sigma \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \mathbf{v}^2\right) \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

Relations de Bernoulli

Les fluides sont supposés parfaits et placés dans le champ de pesanteur **g** suivant l'axe (Oz) ascendant qui est tel que : **g** = – **grad**(g·z).

Dans le cas général d'un **écoulement compressible** et **non permanent**, en intégrant l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant entre deux points A_1 et A_2 de cette ligne, on a la relation de Bernoulli ;

$$\int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} + \left[\frac{\mathbf{v}^2}{2} + g \cdot z\right]_{A_1}^{A_2} + \int_{A_1}^{A_2} \frac{dp}{\mu} = 0$$

Si l'écoulement est **permanent**, **incompressible** et **rotationnel** alors $\partial v / \partial t = 0$, μ = Cte et la relation de Bernoulli devient ;

$$\left[\frac{\mathbf{v}^2}{2} + g \cdot z + \frac{p}{\mu}\right]_{A_1}^{A_2} = 0$$

c'est-à-dire

$$p + \mu \cdot \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \mu \cdot g \cdot z = \text{Cte sur une même ligne de courant}$$

Si l'écoulement est **permanent**, **incompressible** et **irrotationnel** alors :

$$p + \mu \cdot \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \mu \cdot g \cdot z = \text{Cte dans tout le fluide}$$

II - Les milieux continus

Les systèmes matériels caractérisés par le fait que les distances entre les points qui les composent varient au cours des mouvements sont dits **déformables**.
Pour les systèmes matériels déformables comme les fluides, les grandeurs mécaniques qui les caractérisent sont presque toutes des fonctions de points continues. Ces milieux, pour lesquels les propriétés de discontinuité de la matière peuvent être négligées, sont appelés **milieux continus**.

Déformations

Les déformations sont des changements de distances entre des points d'un milieu.

Soit $\psi(\mathrm{r},\, \mathrm{t}) = \begin{pmatrix} \psi_x(\mathbf{r},t) \\ \psi_y(\mathbf{r},t) \\ \psi_z(\mathbf{r},t) \end{pmatrix}$ l'écart infinitésimal à une position de référence alors :

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r} + \mathbf{dr}, t) = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \begin{bmatrix} \partial_x\psi_x & \partial_y\psi_x & \partial_z\psi_x \\ \partial_x\psi_y & \partial_y\psi_y & \partial_z\psi_y \\ \partial_x\psi_z & \partial_y\psi_z & \partial_z\psi_z \end{bmatrix} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

en considérant que les dérivées sont petites en valeur absolue devant 1.

Soit $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \partial_x\psi_x & \partial_y\psi_x & \partial_z\psi_x \\ \partial_x\psi_y & \partial_y\psi_y & \partial_z\psi_y \\ \partial_x\psi_z & \partial_y\psi_z & \partial_z\psi_z \end{bmatrix}$, on a $\mathrm{M} = \dfrac{M + {}^tM}{2} + \dfrac{M - {}^tM}{2}$.

On décompose ainsi M en la somme d'une matrice de rotation R et d'une matrice ε caractérisant la **déformation** du milieu ;

$$R = \frac{M - {}^tM}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\cdot(\partial_y\psi_x - \partial_x\psi_y) & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z\psi_x - \partial_x\psi_z) \\ \frac{1}{2}\cdot(\partial_x\psi_y - \partial_y\psi_x) & 0 & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z\psi_y - \partial_y\psi_z) \\ \frac{1}{2}\cdot(\partial_x\psi_z - \partial_z\psi_x) & \frac{1}{2}\cdot(\partial_y\psi_z - \partial_z\psi_y) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{M+{}^tM}{2} = \begin{pmatrix} \partial_x\psi_x & \frac{1}{2}\cdot(\partial_y\psi_x+\partial_x\psi_y) & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z\psi_x+\partial_x\psi_z) \\ \frac{1}{2}\cdot(\partial_y\psi_x+\partial_x\psi_y) & \partial_y\psi_y & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z\psi_y+\partial_y\psi_z) \\ \frac{1}{2}\cdot(\partial_z\psi_x+\partial_x\psi_z) & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z\psi_y+\partial_y\psi_z) & \partial_z\psi_z \end{pmatrix}$$

La matrice ε peut être décomposée en une matrice de trace nulle $\tilde{\varepsilon}$ et une matrice diagonale multiple de l'identité :

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \frac{1}{3}\cdot \mathrm{div}(\boldsymbol{\Psi})\cdot I$$

On a les relations :

$\mathrm{div}(\boldsymbol{\Psi}) = \dfrac{\delta V}{V}$ qui représente la variation relative d'un volume infinitésimal V.

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{rot}(\boldsymbol{\Psi}) \wedge d\mathbf{r} = R\cdot d\mathbf{r}$$

Soit $\mathbf{v}$(x, y, z, t) le champ de vitesse dans le milieu, on définit de même le **taux de déformation** $\dot{\varepsilon}$ tel que :

$$\dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \frac{1}{2}\cdot(\partial_y v_x+\partial_x v_y) & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z v_x+\partial_x v_z) \\ \frac{1}{2}\cdot(\partial_y v_x+\partial_x v_y) & \partial_y v_y & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z v_y+\partial_y v_z) \\ \frac{1}{2}\cdot(\partial_z v_x+\partial_x v_z) & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z v_y+\partial_y v_z) & \partial_z v_z \end{pmatrix}$$

On a également la décomposition ; $\dot{\varepsilon} = \dot{\tilde{\varepsilon}} + \dfrac{1}{3}\cdot \mathrm{div}(\mathbf{v})\cdot I$

Soit M = $\begin{bmatrix} \partial_x\psi_x & \partial_y\psi_x & \partial_z\psi_x \\ \partial_x\psi_y & \partial_y\psi_y & \partial_z\psi_y \\ \partial_x\psi_z & \partial_y\psi_z & \partial_z\psi_z \end{bmatrix}$, on a M = $\dfrac{M+{}^tM}{2} + \dfrac{M-{}^tM}{2}$.

On décompose ainsi M en la somme d'une matrice de rotation R et d'une matrice ε caractérisant la **déformation** du milieu ;

$$R = \frac{M-{}^tM}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\cdot(\partial_y\psi_x-\partial_x\psi_y) & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z\psi_x-\partial_x\psi_z) \\ \frac{1}{2}\cdot(\partial_x\psi_y-\partial_y\psi_x) & 0 & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z\psi_y-\partial_y\psi_z) \\ \frac{1}{2}\cdot(\partial_x\psi_z-\partial_z\psi_x) & \frac{1}{2}\cdot(\partial_y\psi_z-\partial_z\psi_y) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{M + {}^tM}{2} = \begin{pmatrix} \partial_x\psi_x & \frac{1}{2}\cdot(\partial_y\psi_x + \partial_x\psi_y) & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z\psi_x + \partial_x\psi_z) \\ \frac{1}{2}\cdot(\partial_y\psi_x + \partial_x\psi_y) & \partial_y\psi_y & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z\psi_y + \partial_y\psi_z) \\ \frac{1}{2}\cdot(\partial_z\psi_x + \partial_x\psi_z) & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z\psi_y + \partial_y\psi_z) & \partial_z\psi_z \end{pmatrix}$$

La matrice ε peut être décomposée en une matrice de trace nulle $\tilde{\varepsilon}$ et une matrice diagonale multiple de l'identité :

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \frac{1}{3}\cdot \mathrm{div}(\boldsymbol{\Psi})\cdot \mathrm{I}$$

On a les relations :

$\mathrm{div}(\boldsymbol{\Psi}) = \dfrac{\delta V}{V}$ qui représente la variation relative d'un volume infinitésimal V.

$\dfrac{1}{2}\cdot \mathrm{rot}(\boldsymbol{\Psi}) \wedge d\mathbf{r} = R \cdot d\mathbf{r}$

Soit **v**(x, y, z, t) le champ de vitesse dans le milieu, on définit de même le **taux de déformation** $\dot{\varepsilon}$ tel que :

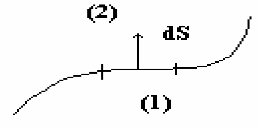
$$\dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \frac{1}{2}\cdot(\partial_y v_x + \partial_x v_y) & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z v_x + \partial_x v_z) \\ \frac{1}{2}\cdot(\partial_y v_x + \partial_x v_y) & \partial_y v_y & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z v_y + \partial_y v_z) \\ \frac{1}{2}\cdot(\partial_z v_x + \partial_x v_z) & \frac{1}{2}\cdot(\partial_z v_y + \partial_y v_z) & \partial_z v_z \end{pmatrix}$$

On a également la décomposition ; $\dot{\varepsilon} = \dot{\tilde{\varepsilon}} + \dfrac{1}{3}\cdot \mathrm{div}(\mathbf{v})\cdot \mathrm{I}$

Et $\mathrm{div}(\mathbf{v}) = \dfrac{\delta V}{V \cdot dt}$ est le taux de variation relative d'un volume infinitésimal.

Contraintes

Les contraintes sont des actions de contact.



La force exercée par (2) sur (1) au travers d'un élément de surface d**S** (orienté vers l'extérieur de (1)) est ;

$$df = \sigma\cdot d\mathbf{S}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} df_x \\ df_y \\ df_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{pmatrix}$$

La matrice σ est une matrice symétrique, on peut la décomposer en une matrice de trace nulle $\tilde{\sigma}$ et une matrice multiple de l'identité $\sigma_{isotrope}$ telles que ;

$$\sigma = \tilde{\sigma} + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{Tr}(\sigma) \cdot \mathrm{I}$$

où $\sigma_{isotrope} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{Tr}(\sigma) \cdot \mathrm{I}$.

Le flux de quantité de mouvement de la région (1) vers la région (2) associé aux contraintes vaut :

$$\phi_p = -\sigma \cdot d\mathbf{S} = p \cdot d\mathbf{S}$$

où $p = -\sigma$ est la matrice des pressions.
La force ou contrainte résultante exercée sur un volume V de surface S est ;

$$\mathbf{F}_{\text{résult}} = \oint\!\!\oint_S \sigma \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{f}_V \cdot d^3r$$

avec la force volumique de contrainte $\mathbf{f}_V$ qui s'écrit ;

$$\mathbf{f}_V = \begin{pmatrix} \partial_x\sigma_{xx} + \partial_y\sigma_{xy} + \partial_z\sigma_{xz} \\ \partial_x\sigma_{yx} + \partial_y\sigma_{yy} + \partial_z\sigma_{yz} \\ \partial_x\sigma_{zx} + \partial_y\sigma_{zy} + \partial_z\sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

La puissance des forces de contraintes est telle que ;

$$P_c = \oint\!\!\oint_S \mathbf{v} \cdot (\sigma \cdot d\mathbf{S}) = \iint_S (\sigma \cdot \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathrm{div}(\sigma \cdot \mathbf{v}) \cdot d^3r$$

La puissance par unité de volume vaut donc ;

$$\frac{dP_c}{d\tau} = \mathrm{div}(\sigma \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} + \mathrm{Tr}(\sigma \cdot \dot{\varepsilon})$$

Lois des milieux

Ces lois relient des grandeurs ayant la même loi de transformation lors des rotations.
Le **module de rigidité** μ et le **coefficient de compressibilité** χ caractérisent l'**élasticité** du milieu, ils sont définis par les relations :

$$\tilde{\sigma} = 2\mu \cdot \tilde{\varepsilon}$$

$$\sigma_{isotrope} = \chi^{-1} \cdot \mathrm{div}(\boldsymbol{\Psi})$$

Ainsi, les éléments de matrices sont tels que :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \qquad \text{si } i \neq j$$

$$\sigma_{ii} = 2\mu \cdot \left[\varepsilon_{ii} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\varepsilon)\right] + \chi^{-1} \cdot \mathrm{Tr}(\varepsilon)$$

Ce dernier élément peut se réécrire :

$$\sigma_{ii} = \left(\chi^{-1} + \frac{4\mu}{3}\right) \cdot \varepsilon_{ii} + \left(\chi^{-1} - \frac{2\mu}{3}\right) \cdot \left(\varepsilon_{jj} + \varepsilon_{kk}\right) = (\lambda + 2\mu) \cdot \varepsilon_{ii} + \lambda \cdot (\varepsilon_{jj} + \varepsilon_{kk})$$

avec i, j et k différents deux à deux.
λ est appelé **coefficient de Lamé**.
Enfin,

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_{ii} - \upsilon \cdot \left(\sigma_{jj} + \sigma_{kk}\right)\right]$$

où E est appelé **module d'Young** et ν est le **coefficient de Poisson**.

Le **coefficient de 1ère viscosité** η et le **coefficient de 2nde viscosité** ζ traduisent la **viscosité** du milieu, ils sont définis par les relations :

$$\tilde{\sigma} = 2\eta \cdot \tilde{\varepsilon}$$
$$\sigma_{\text{isotrope}} = \zeta \cdot \text{div}(\mathbf{v})$$

La pression p dans un fluide isotrope est telle que :

$$p = -\sigma$$

Les forces volumiques sont :

$$\mathbf{f}_{\text{élast}} = \mu \cdot \Delta\boldsymbol{\Psi} + \left(\chi^{-1} + \frac{\mu}{3}\right) \cdot \mathbf{grad}(\text{div}(\boldsymbol{\Psi}))$$
$$\mathbf{f}_{\text{visco}} = \eta \cdot \Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \cdot \mathbf{grad}(\text{div}(\mathbf{v}))$$
$$\mathbf{f}_{\text{press}} = -\mathbf{grad}(p)$$

Remarques :

- Pour un fluide incompressible, div(**v**) = 0.
- Les coefficients μ, χ^{-1}, λ et E sont homogènes à une pression (Pa) et η et ζ sont en Pa·s.

Lois de conservation

En suivant le fluide dans son mouvement, la variation d'une grandeur physique associée à ce fluide g(x, y, z, t) s'écrit :

$$Dg = g(\mathbf{r} + \mathbf{v}\cdot dt,\ t + dt) - g(\mathbf{r},\ t)$$

Donc

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \cdot g$$

L'équation de Newton est alors :

$$\rho \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \sum \mathbf{f} = -\rho \cdot \mathbf{grad}(e_p)$$

où ρ est la masse volumique et e_p l'énergie potentielle massique.
On peut en déduire le théorème de l'énergie cinétique :

$$\rho \cdot \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) = \mathbf{f}_{\text{total}} \cdot \mathbf{v}$$

L'énergie interne est, par définition, ce qui reste lorsqu'on a enlevé l'énergie cinétique macroscopique. Par ailleurs, une quantité de chaleur Q est un apport d'énergie autre que celui lié à la puissance des forces ; il doit s'écrire ;

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = -\oiint \mathbf{j}_{\text{th}} \cdot d\mathbf{S}$$

où $\mathbf{j}_{\text{th}} = -K \cdot \mathbf{grad}(T)$ avec K la conductibilité thermique et T la température.

Enfin, la puissance des forces potentielles est $\mathbf{v} \cdot (-\rho \cdot \mathbf{grad}(e_p))$ c'est-à-dire, $-\rho \cdot De_p / Dt$.

Le bilan d'énergie est ainsi :

$$\rho \cdot \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + e + e_p\right) = -\text{div}(\mathbf{j}_{\text{th}}) + \text{div}(\sigma \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f}_{\text{autre}} \cdot \mathbf{v}$$

En considérant un volume fixe V, la variation de la grandeur totale G relative à ce volume s'écrit :

$$\frac{d}{dt}G = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot g) \cdot d^3r = \iiint_V \rho \cdot \frac{Dg}{Dt} \cdot d^3r - \iint_S g \cdot \rho \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

où S est la surface délimitant V.

Pour la masse, g = 1 donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0$$

Dans le cas d'un fluide non visqueux ($\sigma = -p \cdot \mathrm{I}$) placé dans le champ de pesanteur, on a :

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot \mathbf{v}) \cdot d^3 r = -\oiint \left[p \cdot d\mathbf{S} + \rho \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) \right] + \iiint \rho \cdot \mathbf{g} \cdot d^3 r$$

III - Ondes dans les milieux continus

Les ondes sont des perturbations dans le milieu par rapport à une situation physique stationnaire caractérisée des propriétés du milieu qui peuvent être sa masse volumique ρ_0 , sa pression p_0 et sa vitesse $\mathbf{v_0}$.
Les ondes modifient ces propriétés et on note :

$$p = p_0 + p'$$
$$\rho = \rho_0 + \rho'$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v'}$$

où
$\langle p \rangle = p_0$ et $p' << p_0$
$\langle \rho \rangle = \rho_0$ et $\rho' << \rho_0$
$\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ et **v** = **v'** si on considère le milieu initialement immobile ($\mathbf{v_0} = 0$)

Approximation acoustique :
On supposera que la vitesse des particules du milieu est très petite devant la célérité de l'onde ce qui signifie que le déplacement des particules est négligeable devant la longueur d'onde. On a alors :

$$\left\| (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \cdot \mathbf{v} \right\| << \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right\|$$

Dans cette hypothèse, l'équation de Newton devient :

$$\rho \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{grad}(p) + \rho \cdot \mathbf{g}$$

Ondes sonores ou sismiques dans un solide homogène au repos

D'après l'équation de Newton et la relation **v** = $\partial_t \mathbf{\Psi}$:

$$\rho \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}}{\partial t^2} = \mathbf{f}(\mathbf{r} + \mathbf{\Psi}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x(\mathbf{r})}{\partial x} & \frac{\partial f_x(\mathbf{r})}{\partial y} & \frac{\partial f_x(\mathbf{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y(\mathbf{r})}{\partial x} & \frac{\partial f_y(\mathbf{r})}{\partial y} & \frac{\partial f_y(\mathbf{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z(\mathbf{r})}{\partial x} & \frac{\partial f_z(\mathbf{r})}{\partial y} & \frac{\partial f_z(\mathbf{r})}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{\Psi} + \left\| \mathbf{\Psi} \right\| \cdot \varepsilon(\mathbf{\Psi})$$

avec $\lim\limits_{\mathbf{\Psi} \to 0} \left[\varepsilon(\mathbf{\Psi}) \right] = 0$.

Or par hypothèse $\boldsymbol{\Psi} << \lambda$, donc :

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{xy} + \partial_z \sigma_{xz} \\ \partial_x \sigma_{yx} + \partial_y \sigma_{yy} + \partial_z \sigma_{yz} \\ \partial_x \sigma_{zx} + \partial_y \sigma_{zy} + \partial_z \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Ainsi ;

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2} = \mu \cdot \Delta \boldsymbol{\Psi} + \left(\chi^{-1} + \frac{\mu}{3} \right) \cdot \mathbf{grad}(\mathrm{div}(\boldsymbol{\Psi}))$$

Toute solution $\boldsymbol{\Psi}$ de cette équation est décomposable en une somme d'ondes planes.
En considérant une onde plane telle que $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\Psi} \cdot e^{-i\cdot(\omega \cdot t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, l'équation précédente devient :

$$-\rho \cdot \omega^2 \cdot \boldsymbol{\Psi} = -\mu \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \boldsymbol{\Psi} - \left(\chi^{-1} + \frac{\mu}{3} \right) \cdot \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Psi})$$

Or, $\boldsymbol{\Psi}$ se décompose en une composante parallèle à **k**, notée $\boldsymbol{\Psi}_{/\!/}$, et une autre perpendiculaire, notée $\boldsymbol{\Psi}_{\perp}$. On en déduit les équations :

$$(\rho \cdot \omega^2 - \mu \cdot \mathbf{k}^2) \cdot \boldsymbol{\Psi}_{\perp} = 0$$

$$\left(\rho \cdot \omega^2 - \mu \cdot \mathbf{k}^2 - \left(\chi^{-1} + \frac{\mu}{3} \right) \cdot \mathbf{k}^2 \right) \cdot \boldsymbol{\Psi}_{/\!/} = 0$$

Si $\boldsymbol{\Psi}_{\perp} = 0$, on obtient des **ondes longitudinales** (ou ondes de compression), notées **ondes P**, telles que :

$$\left(\rho \cdot \omega^2 - \left(\chi^{-1} + \frac{4\mu}{3} \right) \cdot \mathbf{k}^2 \right) \cdot \boldsymbol{\Psi}_{/\!/} = 0$$

avec $\boldsymbol{\Psi}_{/\!/} \neq 0$ donc la vitesse de propagation est :

$$c_P = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\chi^{-1} + 4\mu/3}{\rho}}$$

Si $\boldsymbol{\Psi}_{/\!/} = 0$, on obtient des **ondes transversales** (ou ondes de cisaillement), notées **ondes S**, telles que :

$$(\rho \cdot \omega^2 - \mu \cdot \mathbf{k}^2) \cdot \boldsymbol{\Psi}_{\perp} = 0$$

avec $\boldsymbol{\Psi}_{\perp} \neq 0$ donc la vitesse de propagation est :

$$c_S = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Remarque :
Dans un fluide, le module de rigidité μ est nul donc il n'y a pas d'onde S.

Ondes sonores dans un fluide homogène non visqueux au repos

On néglige la pesanteur. En linéarisant l'équation d'Euler, elle devient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \mathbf{grad}(p')$$

L'équation de conservation de la masse est quant à elle :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \cdot \mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0$$

Enfin, il faut ajouter une équation d'état du fluide. On suppose que l'évolution d'un fluide est **barotrope** c'est-à-dire que la pression ne dépend que de la masse volumique, ce qui se traduit au premier ordre par :

$$p = p_0 + p' = p_0 + \rho' \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0}$$

Par définition, on pose $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} = c^2$, ainsi :

$$p' = \rho' \cdot c^2$$

On peut également supposer que l'évolution est **isentropique** et on définit alors le coefficient de compressibilité isentropique qui est :

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = -\rho \cdot \frac{d(1/\rho)}{dp} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp}$$

Au premier ordre :

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{\rho_0 \cdot \chi_S}$$

Et donc

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \cdot \chi_S}}$$

De ces différentes équations, on déduit les équations de propagation :

$$\Delta \rho' = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}$$

$$\Delta p' = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{\Delta v} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}$$

Remarque :

Pour un gaz parfait, $\chi_S = \frac{1}{\gamma \cdot p_0}$ et $\frac{p}{\rho^\gamma} = \mathrm{cte}$ implique que $c = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p_0}{\rho_0}}$.

On associe aux ondes une densité d'énergie qui est :

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \cdot \chi_S \cdot (p - p_0)^2$$

Le **vecteur de Poynting acoustique** Π est définie par : $\mathbf{\Pi} = (p - p_0) \cdot \mathbf{v} = p' \cdot \mathbf{v}$

La puissance rayonnée à travers une surface fermée (Σ) est le flux du vecteur de poynting acoustique :

$$P_{ray} = \iint_{\Sigma} p' \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}$$