Champ électromagnétique d'une particule en mouvement

Denis Gialis*

On souhaite établir l'expression du champ électromagnétique produit par une particule en mouvement par rapport à un référentiel supposé inertiel. On se place dans un espace-temps de Minkowski de signature $(+,-,-,-)$, et on choisira les unités du système international (S.I).

Soit une charge q dont le 4-vecteur position est $\mathbf{r}_o(t)$ et le 4-vecteur vitesse est $\mathbf{v}(t)$, à l'instant t. Le 4-vecteur potentiel du champ électromagnétique vu par un observateur, à l'instant t, dont le 4-vecteur position est $\mathbf{r}(t)$ est défini, sous forme covariante, par

$$\mathbf{A}^\alpha(\mathbf{r}(t)) = \frac{\mu_0\, q\, c}{4\pi} \frac{\mathbf{v}^\alpha(t_0)}{\mathbf{\Delta r}^\mu(t_0)\, \mathbf{v}_\mu(t_0)}\,,$$

avec $\mathbf{\Delta r}^\alpha(t_0) = \mathbf{r}^\alpha(t) - \mathbf{r}_o^\alpha(t_0)$ et l'instant t_0 défini par $\mathbf{\Delta r}_\mu(t_0)\mathbf{\Delta r}^\mu(t_0) = 0$. Nous pouvons écrire $\mathbf{\Delta r}^\alpha(t_0) = (c\,(t-t_0), \Delta\vec{r}(t_0))$, $\mathbf{v}^\alpha(t_0) = (\gamma\, c, \gamma\, \vec{v}(t_0))$ et, finalement

$$\mathbf{\Delta r}^\mu(t_0)\, \mathbf{v}_\mu(t_0) = \gamma\, c^2\, (t-t_0) - \gamma\, \Delta\vec{r}(t_0)\cdot\vec{v}(t_0)\,,$$

avec $c\,(t-t_0) = |\Delta\vec{r}(t_0)| = R(t_0)$, ce qui implique, en notation tridimensionnelle,

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}(t)) &= c\,\mathbf{A}^0(\mathbf{r}(t)) = \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0} \frac{1}{R(t_0) - \Delta\vec{r}(t_0)\cdot\vec{v}(t_0)/c}\,,\\
\vec{A}(\mathbf{r}(t)) &= \left\{\mathbf{A}^i(\mathbf{r}(t))\right\}_{i=1,2,3} = \frac{\mu_0\, q}{4\pi} \frac{\vec{v}(t_0)}{R(t_0) - \Delta\vec{r}(t_0)\cdot\vec{v}(t_0)/c}\,.
\end{aligned}$$

C'est ce que l'on appelle les *potentiels de Liénard-Wiechert.*

On peut les ré-écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}(t)) &= \frac{K\, c^2}{R(t_0) - \Delta\vec{r}(t_0)\cdot\vec{v}(t_0)/c}\,,\\
\vec{A}(\vec{r}(t)) &= \frac{K\,\vec{v}(t_0)}{R(t_0) - \Delta\vec{r}(t_0)\cdot\vec{v}(t_0)/c}\,.
\end{aligned}$$

avec $K = \mu_0\, q/4\pi$, $\vec{r}(t) = (x,y,z)$ et $\vec{r}_o(t) = (x_o, y_o, z_o)$. Comme $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ et que $R = |\Delta\vec{r}|$, en notant $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ et $\vec{n} = \Delta\vec{r}/R$, ces expressions deviennent simplement

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}(t)) &= \frac{K\, c^2}{R} \frac{1}{1 - \vec{\beta}\cdot\vec{n}}\,,\\
\vec{A}(\vec{r}(t)) &= \frac{K\, c}{R} \frac{\vec{\beta}}{1 - \vec{\beta}\cdot\vec{n}}\,,
\end{aligned}$$

où toutes les grandeurs - comme par exemple, $\vec{\beta}(t_0) = c\,\mathrm{d}\vec{r}_0/\mathrm{d}t_0$ - sont évaluées en t_0 défini par

$$R(t_0) = c\,(t-t_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\,. \qquad (1)$$

*Docteur en Astrophysique - Université J. Fourier, Grenoble.

Cet instant t_0 est une fonction implicite de $\vec{r}$ et t : on peut donc écrire

$$\mathrm{d}R = \left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_{\vec{r}=c\vec{t}e} \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial R}{\partial \vec{r}}\right)_{t=cte} \mathrm{d}\vec{r}.$$

Aussi, l'Eq. (1) implique

$$\mathrm{d}R = c\left(1 - \frac{\partial t_0}{\partial t}\right) \mathrm{d}t - c\,\frac{\partial t_0}{\partial \vec{r}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}\vec{r} - \mathrm{d}\vec{r}_0) \cdot \vec{n}\,,$$

ce qui permet d'obtenir

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_{\vec{r}=c\vec{t}e} \mathrm{d}t \quad = \quad c\left(1 - \frac{\partial t_0}{\partial t}\right) \mathrm{d}t = -\mathrm{d}\vec{r}_0 \cdot \vec{n}\,, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \vec{r}}\right)_{t=cte} \mathrm{d}\vec{r} \quad = \quad -c\,\frac{\partial t_0}{\partial \vec{r}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}\vec{r} - \mathrm{d}\vec{r}_0) \cdot \vec{n}\,. \tag{3}$$

L'Eq. (2) conduit aisément à

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}}\,,$$

et l'Eq. (3) donne

$$\frac{\partial t_0}{\partial \vec{r}} = -\frac{\vec{n}}{c\,(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})}\,. \tag{4}$$

Enfin, comme $\partial R/\partial t_0 = -c$, et $\partial \Delta\vec{r}/\partial t_0 = -c\,\vec{\beta}$, on a la relation

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t_0} = \frac{c}{R}\,(\vec{n} - \vec{\beta})\,.$$

Le champ électrique, $\vec{E}$, défini par

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}}\,,$$

se calcule alors de la façon suivante :

(1)

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t_0}\,\frac{\partial t_0}{\partial t}\,,$$

et, en notant $\dot{\vec{\beta}} = \partial\vec{\beta}/\partial t_0$,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t_0} &= -K\,c\,\frac{\partial}{\partial t_0}\left[\frac{\vec{\beta}}{R\,(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}))}\right] \\
&= \frac{K\,c}{R^2\,(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2}\,\left[c\,(\beta^2 - 1)\,\vec{\beta} + R\,\left(-\dot{\vec{\beta}} + (\vec{\beta} \cdot \vec{n})\,\dot{\vec{\beta}} - (\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{n})\,\vec{\beta}\right)\right]\,.
\end{aligned}$$

Donc

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{K\,c}{R^2\,(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3}\,\left[c\,(\beta^2 - 1)\,\vec{\beta} + R\,\left(-\dot{\vec{\beta}} + \vec{n} \times (\dot{\vec{\beta}} \times \vec{\beta})\right)\right]\,.$$

(2)

$$-\frac{\partial\phi}{\partial\vec{r}} = -\frac{\partial\phi}{\partial t_0}\,\frac{\partial t_0}{\partial\vec{r}}, \tag{5}$$

et,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\phi}{\partial t_0} &= -K\,c^2\,\frac{\partial}{\partial t_0}\left[\frac{1}{R\,(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}))}\right] \\ &= \frac{K\,c^2}{R^2\,(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2}\,\left[c\,(\vec{\beta}\cdot\vec{n}) - c - R\,(\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{n}) - c\,\vec{\beta}\cdot(\vec{n}-\vec{\beta})\right]\,. \end{aligned}$$

Donc

$$-\frac{\partial\phi}{\partial\vec{r}} = \frac{K\,c}{R^2\,(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\,\left[c\,(1-\beta^2)\,\vec{n} + R\,(\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{n})\,\vec{n}\right]\,.$$

Conclusion, on obtient

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left\{\frac{K\,c}{R^2\,(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\,\left[\frac{1}{\gamma^2}\,(\vec{n}-\vec{\beta}) + R\,\vec{n}\times\left((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right)\right]\right\}_{t=t_0}$$

Le champ magnétique est tel que

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\times\vec{A} = \frac{\partial t_0}{\partial\vec{r}}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t_0}\,,$$

avec

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t_0} = -(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})\,\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\partial\phi}{\partial\vec{r}}\right)\,.$$

Ainsi, les Eqs. (4) et (5) conduisent à

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\,\vec{n}(t_0)\times\vec{E}(\vec{r},t)\,.$$