Sur l'origine de la queue des comètes

[Exercice classique]

Le Soleil est considéré comme une source ponctuelle d'ondes sphériques monochromatiques (de pulsation ω) qui, à grande distance, ont une structure d'ondes planes dont l'amplitude, E_0, du champ électrique ne dépend que de la distance r à la source. Le but de ce problème est de déterminer l'effet des radiations solaires sur la courbure de la queue des comètes.

A - Etude préliminaire

Dans l'espace, muni d'un repère cartésien orthonormé $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, un métal parfait occupe le demi-espace $z \geq 0$. Une onde plane électromagnétique, de pulsation ω, polarisée rectilignement, se propage dans le vide ($z < 0$) suivant un vecteur d'onde $\vec{k} = k\,\sin\theta\,\vec{e}_x + k\,\cos\theta\,\vec{e}_z$. Son champ électrique, $\vec{E}_i$, au point $M(\vec{r})$ avec $\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$, est tel que

$$\vec{E}_i = E_0\,\cos(\omega\,t - \vec{k}\cdot\vec{r})\,\vec{e}_y\,.$$

L'onde rencontre le métal parfait sous un angle d'incidence $\theta \in]0, \pi/2[$ et se réfléchit.

A-1 - Déterminer le champ magnétique de l'onde incidente, ainsi que le champ électromagnétique de l'onde réfléchie. En déduire le champ électromagnétique de l'onde résultante. Dans quelle direction cette dernière se propage-t-elle ?

A-2 - Déterminer la pression de radiation moyenne qu'exerce l'onde résultante précédente sur une surface parfaitement réfléchissante (ou métallique) en fonction de θ et de E_0.

FIG. 1 – La comète Hale-Bopp qui passait au voisinage de la Terre en 1997. Photo prise le 15 mars 1997 par Scott Ireland.

B - Effet Robertson

Les poussières constituant la queue des comètes sont supposées être parfaitement réfléchissantes et, sont modélisées par des petites boules homogènes de masse volumique $\rho = 2.9$ g·cm^{-3}. On donne la luminosité solaire, $L_\odot \simeq 3.78 \times 10^{26}$ W, et la masse solaire, $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg.

B-1 - Exprimer l'amplitude du champ électrique solaire, E_0, en fonction de la distance r et de la luminosité $L_\odot$.

B-2 - En utilisant le résultat de la question A-2, déterminer la force $\delta\vec{F}$, exercée par les radiations solaires sur chaque particule de poussière, en fonction de r, $L_\odot$, et du diamètre d ($d \ll r$!) des particules.

B-3 - Déduire le diamètre maximal, $d_{\max}$, des particules de poussière qui peuvent être repoussées par les radiations solaires.

Correction

A-1 - L'onde étant plane, le champ magnétique de l'onde incidente, en $M(\vec{r})$, est simplement

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega\, t - \vec{k} \cdot \vec{r})\, (-\cos\theta\, \vec{e}_x + \sin\theta\, \vec{e}_z)\,.$$

Le vecteur d'onde de l'onde réfléchie est : $\vec{k}' = k \sin\theta\, \vec{e}_x - k \cos\theta\, \vec{e}_z$. Le champ électrique réfléchi est donc de la forme : $\vec{E}_r = E_{0r} \cos(\omega\, t - \vec{k}' \cdot \vec{r})\, \vec{u}$, avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire. Par continuité de la composante tangentielle du champ électrique à la traversée du métal, et comme, dans le métal parfait, le champ électromagnétique s'annule, on a la relation $\vec{E}_i(z=0) + \vec{E}_r(z=0) = \vec{0}$, donc on déduit $E_{0r}\, \vec{u} = -E_0\, \vec{e}_y$, c'est-à-dire,

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega\, t - \vec{k}' \cdot \vec{r})\, \vec{e}_y\,.$$

L'onde réfléchie étant plane, le champ magnétique réfléchi s'écrit

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}' \wedge \vec{E}_r}{\omega} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega\, t - \vec{k}' \cdot \vec{r})\, (\cos\theta\, \vec{e}_x + \sin\theta\, \vec{e}_z)\,.$$

Le champ électromagnétique résultant $(\vec{E}, \vec{B})$, est tel que $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$, et $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= 2\, E_0 \sin(k\, z \cos\theta)\, \sin(\omega\, t - k\, x \sin\theta)\, \vec{e}_y\,,\\
\vec{B} &= \frac{2\, E_0}{c}\, [-\cos\theta\, \cos(k\, z \cos\theta)\, \cos(\omega\, t - k\, x \sin\theta)\, \vec{e}_x \\
&\qquad + \sin\theta\, \sin(k\, z \cos\theta)\, \sin(\omega\, t - k\, x \sin\theta)\, \vec{e}_z].
\end{aligned}$$

L'onde résultante n'est donc pas une onde plane, et sa direction de propagation est selon l'axe (Ox).

A-2 - Dans le vide, au voisinage de la surface métallique ($z \simeq 0$), on obtient que le champ électromagnétique est tel que

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z=0) &= \vec{0}\,,\\
\vec{B}(z=0) &= -\frac{2\, E_0}{c} \cos\theta\, \cos(\omega\, t - k\, x \sin\theta)\, \vec{e}_x\,,
\end{aligned}$$

ce qui implique la densité volumique d'énergie électromagnétique, $\epsilon_{\rm em}$, s'écrit

$$\epsilon_{\rm em} = \frac{\epsilon_0\, \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\, \mu_0} = \frac{2\, E_0^2}{\mu_0\, c^2} \cos^2\theta\, \cos^2(\omega\, t - k\, x \sin\theta)\,.$$

La pression de radiation moyenne, P_{rad}, s'exerçant sur la surface métallique n'est rien d'autre que la valeur moyenne de cette densité volumique d'énergie, les moyennes étant toutes considérées par rapport au temps :

$$P_{\rm rad} = <\epsilon_{\rm em}> = \epsilon_0\, E_0^2 \cos^2\theta\,,$$

puisque $<\cos^2(\omega\, t - k\, x \sin\theta)> = 1/2$.

B-1 - L'onde étant plane, le vecteur de Poynting moyen est $\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{2\mu_0\, c}\, \vec{e}_r$, avec $\vec{e}_r$ le vecteur unitaire radial. Par conservation de l'énergie, la luminosité solaire est égale au flux de ce vecteur de Poynting moyen à travers une sphère (Σ), de rayon r et de centre le Soleil :

$$L_\odot = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = |\vec{\Pi}|\, 4\pi\, r^2 \,,$$

donc, on déduit l'amplitude du champ électrique,

$$E_0 = \sqrt{\frac{L_\odot}{2\pi\, \epsilon_0\, c}}\, \frac{1}{r} \,.$$

B-2 - La force $\delta\vec{F}$, exercée par les radiations solaires, ne s'applique que sur la moitié éclairée des poussières sphériques. La force élémentaire $\mathrm{d}\delta\vec{F}$ qui agit sur un élément de surface $\mathrm{d}S = 2\pi\,(d/2)^2\ \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$, d'une moitié éclairée, s'écrit

$$\mathrm{d}\delta\vec{F} = P_{\mathrm{rad}}(\theta)\,\mathrm{d}S\ \cos\theta\,\vec{e}_r \,.$$

En intégrant sur $\theta \in [0, \pi/2]$, on obtient

$$\delta\vec{F} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \mathrm{d}\delta\vec{F} = \frac{1}{8}\,\pi\,\epsilon_0\, E_0^2\, d^2\, \vec{e}_r \,,$$

c'est-à-dire,

$$\delta\vec{F} = \frac{L_\odot}{16c}\,\left(\frac{d}{r}\right)^2\ \vec{e}_r \,.$$

B-3 - Une particule de poussière, de masse $m = \rho\,\pi\, d^3/6$, est soumise à la force $\delta\vec{F}$, et à la force gravitationnelle $\delta\vec{F}_G$, qui est égale à $-\mathcal{G}\, M_\odot\, \rho\,\pi\, d^3/(6r^2)\,\vec{e}_r$. On aura donc $|\delta\vec{F}| > |\delta\vec{F}_G|$, si

$$d < d_{\mathrm{max}} = \frac{3\,L_\odot}{8\pi\,\mathcal{G}\, M_\odot\,\rho\, c} \,.$$

Application numérique : $d_{\mathrm{max}} \simeq 3.9 \times 10^{-7}$ m. Toutes les poussières de taille inférieure sont repoussées dans la queue de la comète.