Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 - Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle *série entière* de la variable complexe z la série de fonctions $\sum a_n\, z^n$.

Théorème 2 - [Lemme d'Abel] Soient $\sum a_n\, z^n$ une série entière, $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n\, z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Alors,

(i) pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n\, z^n$ est absolument convergente et,

(ii) la série $\sum a_n\, z^n$ est normalement convergente dans tout disque fermé $D_{\mathrm{f}}(0, r)$ tel que $0 < r < |z_0|$.

Définition 3 - Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière. Le nombre $R = \sup\{r \geqslant 0 \,|\, (|a_n|\, r^n)_n$ est bornée$\}$ est appelé *rayon de convergence* de $\sum a_n\, z^n$. Le disque ouvert $D(0, R)$ est appelé *disque de convergence.*

Définition 4 - Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence R. L'application $S : D(0, R) \to \mathbb{C}$, telle que $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$, est appelée *somme de la série entière* $\sum a_n\, z^n$.

Théorème 5 - Soient $\sum a_n\, z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Alors,

(i) pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n\, z^n$ est absolument convergente,

(ii) la série $\sum a_n\, z^n$ est normalement convergente dans tout disque fermé $D_{\mathrm{f}}(0, r)$ tel que $0 < r < R$, et

(iii) pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n\, z^n$ est divergente.

Exemples 6 - $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $\sum \frac{z^n}{n}$.

2 Calcul du rayon de convergence

On notera $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes.

Proposition 7 [Règle de d'Alembert] - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n| = \lambda$ avec $\lambda \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ est $R = 1/\lambda$ (avec la convention $R = 0$ si $\lambda = +\infty$, et $R = +\infty$ si $\lambda = 0$).

Exemples 8 - $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum n^\alpha z^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum F(n) z^n$ avec F une fraction rationnelle non nulle.

Exemple 9 - La fonction exponentielle peut être définie comme la somme de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Proposition 10 [Règle de Cauchy] - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda$ avec $\lambda \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ est $R = 1/\lambda$ (avec la convention $R = 0$ si $\lambda = +\infty$, et $R = +\infty$ si $\lambda = 0$).

(Contre-)Exemple 11 - $\sum z^{2n}$.

Proposition 12 [Formule d'Hadamard] - Le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ est $R = 1/\lambda$ avec $\lambda = \limsup |a_n|^{1/n} (= \lim_{n\to+\infty}(\sup_{p\geqslant n} |a_p|^{1/p})) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Proposition 13 - Soient les séries entières $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, et de sommes respectives S_a et S_b.
(i) Si $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.
(ii) Si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$.
(iii) Si $|a_n| = O(b_n)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $R_a \geqslant R_b$.
(iv) Si $R_a \neq R_b$, alors $R_{a+b} = \mathrm{Inf}(R_a, R_b)$, avec R_{a+b}, le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n)\, z^n$. Si $R_a = R_b$ et si $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ sont disjointes, alors $R_{a+b} = \mathrm{Min}(R_a, R_b)$.
(v) Si $R_a = R_b$, alors $R_{a+b} \geqslant R_a$.
(vi) Soit la série produit de Cauchy $\sum c_n\, z^n$, telle que $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$. Son rayon de convergence R_c est tel que $R_c \geqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b)$. Sa somme S_c est telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b) \Longrightarrow S_c(z) = S_a(z)\, S_b(z).$$

3 Propriétés de la somme

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Théorème 14 - La somme de la série entière $\sum a_n\, z^n$ est continue sur son disque de convergence $D(0, R)$.

Théorème 15 - Soit z_0 un point du disque de convergence $D(0, R)$ de la série entière $\sum a_n\, z^n$. La somme de $\sum a_n\, z^n$ est dérivable au sens complexe en z_0, et la valeur de sa dérivée en z_0 est la somme de la série dérivée $\sum n a_n z_0^{n-1}$. De plus, la série $\sum n a_n z_0^{n-1}$ a le même rayon de convergence que la série $\sum a_n\, z^n$.

Corollaire 16 - La somme S de la série entière $\sum a_n\, z^n$ est indéfiniment dérivable au sens complexe, ses séries dérivées ont toutes le même rayon de convergence R, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{n!} S^{(n)}(0)$.

Corollaire 17 - La somme de la série entière $\sum a_n\, z^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.

Théorème 18 [Théorème d'Abel angulaire] - Soient $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et de somme S, un réel $\theta_0 \in [0, \pi/2[$, et le secteur angulaire

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho\, e^{i\theta}\}.$$

Si $\sum a_n$ converge alors $S(z) \underset{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exemple 19 - On trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Théorème 20 [Principe des zéros isolés] - Soit S la somme de la série entière $\sum a_n\, z^n$ sur son disque de convergence. S'il existe une suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes non nuls qui tend vers 0 et telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S(z_p) = 0$, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 Quelques applications

Définition 21 - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. Une fonction f définie au voisinage d'un point z_0 de Ω est dite *développable en série entière en* z_0 (on notera DSE_{z_0}) lorsqu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et un voisinage V de z_0 tels que, pour tout $z \in V$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z - z_0)^n$.

Théorème 22 - Soit f une fonction DSE_{z_0}. Alors,
(1) il existe un voisinage de z_0 sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^\infty$,
(2) le développement en série entière de f en z_0 est son développement en série de Taylor en z_0.

Corollaire 23 - S'il existe, le développement en série entière de f en z_0 est unique, et les dérivées successives de f sont également développables en série entière.

Proposition 24 - Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est DSE_{x_0} si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que la suite de fonction $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k$ converge simplement vers 0 sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.

Remarque 25 - f est DSE_{x_0} si et seulement si $g : x \mapsto f(x + x_0)$ est DSE_0.

Exemple 26 - Développements en série entière en 0 de quelques fonctions usuelles :
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\forall x \in]-1, 1[, \forall a \in \mathbb{R}, \quad (1 + x)^a = 1 + a\,x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a\,(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}\,x^n$.
- $\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n, \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1}$.

Exemple 27 - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais n'est pas DSE_0.

Application 28 - [Théorème de Bernstein] Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-a, a[$, $f^{(2k)}(x) \geqslant 0$, alors f est DSE_0 sur $]-a, a[$.

Application 29 - Toutes les solutions de $(E) : y'' - x\, y = 0$ sont DSE_0.

Application 30 - La somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, 2^{-n}$ vaut 4.

Application 31 - L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\, \mathrm{d}t$ est égale à $-\dfrac{\pi^2}{6}$.

Application 32 [Equations diophantiennes] - Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des entiers non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on montre que le nombre S_n de solutions $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation $\alpha_1\, n_1 + \ldots + \alpha_p\, n_p = n$ est tel que

$$S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Application 33 [Nombres de Bell] - Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, le nombre B_n de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est tel que : $B_n = \dfrac{1}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Références

Gourdon, X., *Les maths en tête, Analyse*, éd. Ellipses.
Beck, V. & al., *Objectif Agrégation*, éd. H&K.
Monier, J. M., *Analyse, MP*, éd. Dunod.
Cartan, H., *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*, éd. Hermann.