Endomorphismes diagonalisables

On se place dans E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n, avec $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on notera $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice représentative de f dans une base $\mathcal{B}$ de E.

1 Définitions et propriétés

1.1 Les éléments propres

Définition 1 - Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de $f \in \mathcal{L}(E)$ s'il existe $x \in E - \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Le vecteur x est alors appelé *vecteur propre* de f associé à λ.

Définition 2 - On appelle *spectre de f dans* $\mathbb{K}$, et l'on note $Sp(f)$, l'ensemble des valeurs propres de f.

Proposition 3 - $\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \ker(f - \lambda\, id) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(f - \lambda\, id) = 0$.

Définition 4 - Pour tout $\lambda \in Sp(f)$, l'ensemble $E_\lambda = \ker(f - \lambda\, id)$ est un sous-espace vectoriel de E, stable par f, appelé *sous-espace propre de f associé à* λ.

Proposition 5 - Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres deux à deux distinctes alors les sous-espaces propres associés sont en somme directe : $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$.

Définition 6 - On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est *diagonalisable* s'il existe une base de E formée par des vecteurs propres de f.

1.2 Polynôme caractéristique et polynôme minimal

Définition 7 - Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_p X^p \in \mathbb{K}[X]$, avec $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit le *polynôme d'endomorphisme* $P(f) = a_0\, id + a_1 f + \ldots + a_p f^p \in \mathcal{L}(E)$.

Proposition 8 - Si $f \in \mathcal{L}(E)$, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(P \cdot Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$. L'ensemble $\{P(f),\, P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 9 - Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors tout polynôme en f commute avec tout polynôme en g.

Définition 10 - Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un *polynôme annulateur de* f si $P(f) = 0$.

Proposition 11 - Tout $f \in \mathcal{L}(E)$ admet au moins un polynôme annulateur non nul.

Proposition 12 - $\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \forall \lambda \in Sp(f),\ \ \forall P \in \mathbb{K}[X],\ \ P(f) = 0 \Rightarrow P(\lambda) = 0$.

Proposition 13 - $\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \forall \lambda \in Sp(f),\ \ \forall x \in E_\lambda,\ \ \forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(f)(x) = P(\lambda)\,x$.

Définition 14 - Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, l'ensemble $I_f = \{P \in \mathbb{K}[X]; P(f) = 0\}$ est un idéal non nul de l'anneau commutatif $\mathbb{K}[X]$. Il existe un polynôme unitaire unique, noté Π_f, tel que $I_f = \Pi_f\,\mathbb{K}[X]$. Ce polynôme est appelé *polynôme minimal de* f.

Définition 15 - Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle *polynôme caractéristique de* f, le polynôme de $\mathbb{K}[X]$, noté χ_f, tel que $\chi_f(X) = \det(f - X \cdot id)$.

Proposition 16 - $Sp(f) = \{\text{racines de } \Pi_f \text{ dans } \mathbb{K}\} = \{\text{racines de } \chi_f \text{ dans } \mathbb{K}\}$.

Proposition 17 - Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors $Sp(f) \neq \varnothing$.

Proposition 18 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel strict de E stable par f, alors $f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ et $\chi_{f_{|F}}$ divise χ_f.

Proposition 19 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si λ est une racine de χ_f d'ordre de multiplicité α, alors $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant \alpha$.

Théorème 20 - *Théorème de décomposition de noyaux.* Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. Si $P = P_1 \dots P_k$, alors

$$\ker P(f) = \ker P_1(f) \oplus \dots \oplus \ker P_k(f).$$

Théorème 21 - *Théorème de Cayley-Hamilton.* $\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \chi_f(f) = 0$.

Définition 22 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, on peut écrire $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. On appelle *sous-espace caractéristique de* f associé à la valeur propre λ_i, $i \in [\![1, s]\!]$, le sous-espace vectoriel $F_i = \ker(f - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

Proposition 23 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, on a
(i) $\forall i \in [\![1, s]\!]$, F_i est stable par f, et $\dim F_i = \alpha_i$.
(ii) $E = F_1 \oplus \dots F_s$.

Définition 24 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique entier naturel r, appelé *indice de endomorphisme* f, tel que

$$\{0\} = \ker f^0 \subsetneq \dots \subsetneq \ker f^r = \ker f^{r+1} = \dots ..$$

Proposition 25 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, et $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

Alors, le polynôme minimal de f s'écrit

$$\Pi_f(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{r_i}\,,$$

avec, pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $1 \leqslant r_i \leqslant \alpha_i$, où r_i est l'indice de l'endomorphisme $f - \lambda_i\, id$.

2 Diagonalisation des endomorphismes

2.1 Critères de diagonalisabilité

Proposition 26 - $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, f diagonalisable $\Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda_i} E_{\lambda_i} \Leftrightarrow \dim E = \sum_{\lambda_i} \dim E_{\lambda_i}$.

Proposition 27 - $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, f diagonalisable $\Leftrightarrow$ $P(f)$ scindé sur $\mathbb{K}$, et $\forall \lambda_i \in Sp(f)$, $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$, avec α_i, l'ordre de multiplicité de λ_i dans χ_f.

Proposition 28 - $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, f diagonalisable $\Leftrightarrow$ Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé et à racines simples tel que $P(f) = 0$.

Proposition 29 - $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, f diagonalisable $\Leftrightarrow$ Π_f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et à racines simples.

Proposition 30 - $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, si f est diagonalisable et F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.

Proposition 31 - Soient f, $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$, alors
(i) Tout sous-espace propre de f est stable par g,
(ii) Imf est stable par g.

Théorème 32 - *Théorème de diagonalisation simultanée.* Si f et $g \in \mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables et commutent, il existe une base commune de diagonalisation de f et g.

2.2 Décomposition de Dunford

Théorème 33 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ avec d diagonalisable et n nilpotent, tel que : (i) $f = d + n$,
(ii) $n \circ d = d \circ n$.
De plus, d et n sont des polynômes en f.

2.3 Exemples d'endomorphismes diagonalisables

Théorème 34 - Soient E un espace euclidien (ou hermitien) et f un endomorphisme auto-adjoint de E. Alors, il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f, et ses valeurs propres sont réelles.

Corollaire 35 - Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Théorème 36 - Soient E un espace hermitien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u^\star$ son adjoint. Il y a équivalence entre

(i) u est normal (c'est-à-dire $u \circ u^\star = u^\star \circ u$),
(ii) u se diagonalise dans une base orthonormée de E,
(iii) u et $u^\star$ se diagonalisent dans une base orthonormée commune.

Exemple 37 - Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur sur F parallèlement à G avec F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Alors, p est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 et 1.

Exemple 38 - Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie par rapport à F parallèlement à G avec F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Alors, s est diagonalisable et ses valeurs propres sont -1 et 1.