Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien

On se place dans $(E, < \cdot >)$, un espace vectoriel euclidien de dimension n, et on note $\| \cdot \|$ la norme associée à $< \cdot >$.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on notera $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice représentative de f dans une base $\mathcal{B}$ de E, et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ le spectre de f dans $\mathbb{R}$. Enfin, on notera $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

1 Définitions et propriétés

1.1 L'adjoint d'un endomorphisme

Définition 1 - Pour tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $f^\star \in \mathcal{L}(E)$, appelé **adjoint** de f, tel que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $< f(x), y > = < x, f^\star(y) >$.

Proposition 2 - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et, f et $g \in \mathcal{L}(E)$. Alors
(i) $(\lambda f + g)^\star = \lambda f^\star + g^\star$,
(ii) $(g \circ f)^\star = f^\star \circ g^\star$,
(iii) $(f^\star)^\star = f$.
(iv) Si $f \in \mathcal{GL}(E)$, alors $(f^{-1})^\star = (f^\star)^{-1}$.

Proposition 3 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par $f^\star$.

Proposition 4 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors on a les propriétés suivantes :
(i) $\ker f^\star = (\mathrm{Im} f)^\perp$ et $\mathrm{Im} f^\star = (\ker f)^\perp$.
(ii) $\mathrm{rg}\,(f^\star) = \mathrm{rg}\,(f)$, $\mathrm{tr}(f^\star) = \mathrm{tr}(f)$, $\det(f^\star) = \det(f)$.

Remarque 5 - Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors $\mathrm{mat}_B(f^\star) = {}^t(\mathrm{mat}_B(f))$.

1.2 Les endomorphismes normaux

Définition 6 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **normal** lorsque f et $f^\star$ commutent.
Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et si $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ avec f normal, alors A est dite **normale** et ${}^tA\,A = A\,{}^tA$.

Exemple 7 - La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est normale.

Proposition 8 - Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est normal, alors, pour tous $x, y \in E$, on a : $< f(x), f(y) > = < f^\star(x), f^\star(y) >$. En particulier, $\|f(x)\| = \|f^\star(x)\|$.

1.3 Les endomorphismes symétriques et anti-symétriques

Définition 9 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $f^\star = f$, on dit que f est **auto-adjoint** ou **symétrique**. Si $f^\star = -f$, on dit que f est **anti-auto-adjoint** ou **antisymétrique**. Dans une base $\mathcal{B}$ orthonormée, cela est équivalent à $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = {}^t(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f))$, et à $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = -{}^t(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

Remarque 10 - Les endomorphismes symétriques et les endomorphismes antisymétriques sont normaux.

Notations 11 - On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes symétriques de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ celui des endomorphismes antisymétriques de $\mathcal{L}(E)$. De même, on définit $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

Proposition 12 - $\dim \mathcal{S}(E) = \dim S_n(\mathbb{R}) = n(n+1)/2$, et $\dim \mathcal{A}(E) = \dim A_n(\mathbb{R}) = n(n-1)/2$.

Corollaire 13 - $\mathcal{L}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$, et $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Définition 14 - Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle **projecteur orthogonal** sur F, le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$, et **symétrie orthogonale** par rapport à F, la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$. Enfin, une **réflexion** de E est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Proposition 15 - Soient $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Alors,
(i) p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow p \in \mathcal{S}(E)$,
(ii) s est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow s \in \mathcal{S}(E)$.

Définition 16 - Un endomorphisme $f \in \mathcal{S}(E)$ est dit **positif** lorsque, pour tout $x \in E$, $< x, f(x) > \geqslant 0$. Si, de plus, $< x, f(x) > = 0 \Rightarrow x = 0$, alors l'endomorphisme symétrique f est dit **défini positif**.

Notations 17 - On note $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$ respectivement l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs et l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs de $\mathcal{L}(E)$. De même, on définit $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ respectivement l'ensemble des matrices symétriques positives et l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemple 18 - La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique positive mais pas définie positive.

Proposition 19 - On a les propriétés élémentaires suivantes :
(i) Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tM\,M \in S_n^+(\mathbb{R})$.
(ii) Pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^tM\,M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
(iii) Pour tous $S_1, S_2 \in S_n^+(\mathbb{R})$, $S_1 + S_2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
(iv) Pour tout $(S_1, S_2) \in S_n^+(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$, $S_1 + S_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1.4 Les endomorphismes orthogonaux ou isométries

Définition 20 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **orthogonal** lorsque $f^\star \circ f = f \circ f^\star = id_E$. De façon équivalente, on dit que f est une **isométrie**.

Notations 21 - On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de $\mathcal{L}(E)$, et $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$.

Proposition 22 - Les cinq propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $f \in \mathcal{O}(E)$
(ii) $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) >=< x, y >$.
(iii) $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.
(iv) L'image par f de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E.
(v) Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée.

Remarque 23 - Tout $f \in \mathcal{O}(E)$ est normal, et $\det(f) = \pm 1$.

Remarque 24 - Toute symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal. Mais id_E est l'unique projecteur orthogonal qui est un endomorphisme orthogonal.

Définition 25 - $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ appelé **groupe orthogonal**.

Définition 26 - L'ensemble $\mathcal{SO}(E) = \{f \in \mathcal{O}(E) \mid \det(f) = 1\}$, muni de la loi $\circ$, est appelé **groupe spécial orthogonal**. $(\mathcal{SO}(E), \circ)$ est un sous-groupe distingué de $(\mathcal{O}(E), \circ)$. De même, l'ensemble $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(E) \mid \det(M) = 1\}$ muni de la loi $\cdot$ est un sous-groupe distingué de $(O_n(\mathbb{R}), \cdot)$. Les éléments de $\mathcal{SO}(E)$ sont appelés **isométries directes**. On définit également l'ensemble $\mathcal{O}^-(E) = \{f \in \mathcal{O}(E) \mid \det(f) = -1\}$ qui n'est pas un groupe, ainsi que $O_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(E) \mid \det(M) = -1\}$. Les éléments de $\mathcal{O}^-(E)$ sont appelés **isométries indirectes**.

Exemple 27 - La matrice $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $SO_3(\mathbb{R})$.
La matrice $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dans $O_3(\mathbb{R})$ mais n'appartient pas à $SO_3(\mathbb{R})$.
La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $\det(C) = 1$ mais elle n'appartient pas à $O_3(\mathbb{R})$.

Proposition 28 - Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E. Alors, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale.

2 Réduction des endomorphismes remarquables

2.1 Les endomorphismes normaux

Proposition 29 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si E_λ est un sous-espace propre de f associé à une valeur propre λ, alors $E_\lambda^\perp$ est stable par f.

Proposition 30 - Soient E de dimension 2 et $f \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si f n'admet pas de valeur propre réelle alors, dans toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, il existe $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star$ tel que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Théorème 31 - Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix},$$

avec $r, s \in \mathbb{N}^\star$ tels que $r + 2s = n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, et pour tout $j \in [\![1, s]\!]$, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ avec $a_j, b_j \in \mathbb{R}$.

2.2 Les endomorphismes symétriques et anti-symétriques

Théorème 32 - Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Alors, il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f et toutes les valeurs propres de f sont réelles.

Théorème 33 (Version matricielle) - Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale réelle telle que $D = P^{-1} M P$.

Corollaire 34 - Soient $f \in \mathcal{S}(E)$ et $M \in S_n(\mathbb{R})$. Alors,
(i) $f \in \mathcal{S}^+(E) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \mathbb{R}_+$, et $M \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathbb{R}_+$.
(ii) $f \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \mathbb{R}^\star{}_+$, et $M \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathbb{R}_+^\star$.

Application 35 - L'application $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Proposition 36 - [Décomposition polaire] Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = P\,S$. Si, de plus, $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors le couple (P, S) est unique.

Proposition 37 - [Pseudo-réduction simultanée] Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $(P, D) \in GL_n(\mathbb{R}) \times D_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tP\,A\,P = I_n$ et ${}^tP\,B\,P = D$.

Proposition 38 - [Log-concavité du déterminant] Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors, $\det(\alpha\,A + \beta\,B) \geqslant (\det A)^\alpha\,(\det B)^\beta$. Il y a égalité si et seulement si

$A = B$ et $\alpha \in]0,1[$.

Application 39 - [Ellipsoïde de John-Loewner] Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide. Alors, il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

Proposition 40 - [Factorisation de Cholesky] Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique matrice $T \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^tT\,T$.

Application 41 - [Inégalité d'Hadamard] $\forall A = (a_{i,j}) \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\det A \leqslant \prod_{i=1}^n a_{i,i}^2$.

Théorème 42 - Soit $f \in \mathcal{A}(E)$. Alors, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 0 & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix},$$

avec $s \in \mathbb{N}^\star$ et, pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, $\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ avec $b_i \in \mathbb{R}$.

2.3 Les endomorphismes orthogonaux

Théorème 43 - Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon_s \end{pmatrix},$$

avec $r, s \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $j \in [\![1,s]\!]$, $\varepsilon_j \in \{-1,1\}$, et pour tout $i \in [\![1,r]\!]$,
$R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ avec $\theta_i \in \mathbb{R}$ tel que $\theta_i \neq k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Corollaire 44 - $\forall f \in \mathcal{O}(E)$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1,1\}$.

Proposition 45 - [Décomposition QR] Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors, il existe un unique couple (Q,R) avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs tel que $A = Q\,R$.

Proposition 46 - $SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta\ ;\ \theta \in \mathbb{R}\}$ et $O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta\ ;\ \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\varphi\ ;\ \varphi \in \mathbb{R}\}$, en notant $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ la rotation de centre O et d'angle θ, et $S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$.

Proposition 47 - Soit E un espace vectoriel de dimension 3. L'endomorphisme $f \in \mathcal{O}(E)$ est une **rotation** d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ lorsqu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On appelle **axe** de cette rotation, la droite dirigée et orientée par le premier vecteur de la base $\mathcal{B}$.

Proposition 48 - Soit E un espace vectoriel de dimension 3. L'endomorphisme $f \in \mathcal{O}(E)$ est une **réflexion** lorsqu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 49 - Soient E un espace vectoriel de dimension 3, $f \in \mathcal{O}(E)$ et E_λ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\lambda \in \{-1, 1\}$. On a
(1) Si $\det f = 1$, alors f est une rotation de E d'axe E_1 dont l'angle non orienté θ est donné par $\mathrm{tr}(f) = 1 + 2\cos\theta$.
(2) Si $\det f = -1$, alors soit f est une réflexion de E par rapport à $E_{-1}^{\perp}$, soit f est la composée d'une rotation de E d'axe E_{-1}, dont l'angle non orienté θ est donné par $\mathrm{tr}(f) = -1 + 2\cos\theta$, et de la réflexion par rapport à $E_{-1}^{\perp}$.

Remarque 50 - L'angle θ peut être orienté en choisissant $\sin\theta$ du même signe que $\det(i, f(i), u)$ avec $u \in E_1$ (ou E_{-1}) et $i \notin E_1$ (ou E_{-1}).

Exemple 51 - Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\{i, j, k\}$ est

$$A = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A n'est pas symétrique donc f est la composée d'une rotation d'axe dirigé et orienté par $(i + j)$, d'angle $-2\pi/3$ $[2\pi]$, et d'une réflexion par rapport au plan d'équation $x + y = 0$.

3 Quelques propriétés algébriques et topologiques

Proposition 52 - $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Proposition 53 - L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ est la boule unité.

Proposition 54 - $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$.

Proposition 55 - $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs et compact.

Proposition 56 - Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Proposition 57 - Les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$ sont cycliques et de la forme $\{R_{2k\pi/n},\ k \in [\![1,n]\!]\}$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$ et $R_{2k\pi/n}$ la rotation d'angle $2k\pi/n$.

Proposition 58 - Les sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$ sont soit cycliques, soit isomorphes au groupe diédral.

Proposition 59 - Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

4 Complément : autres propriétés

Proposition 60 - Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. On a $|||f||| = \sup\limits_{||x||=1} ||f(x)|| = \sup\limits_{||x||=1} |< f(x), x >|$.

Application 61 - Pour tout $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$, en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de ${}^tA\,A$, on a : $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i = \sum\limits_{i,j=1}^n a_{i,j}^2$.

Application 62 - Pour tout $A = (a_{i,j}) \in S_n(\mathbb{R})$, en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, on a : $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum\limits_{i,j=1}^n a_{i,j}^2$.

Références

Gourdon, X., *Les maths en tête, Algèbre*, éd. Ellipses.
Monier, J.-M., *Algèbre MPSI*, éd. Dunod.
Monier, J.-M., *Algèbre MP*, éd. Dunod.
Francinou, S., Gianella, H., & Nicolas, S., *Algèbre 3*, éd. Cassini.