Équations différentielles du type $X' = f(t, X)$

Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, une application continue. On considère les équations différentielles de la forme

$$(E) \qquad X' = f(t, X)\,,$$

avec X, appelée *variable d'état*, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la *variable de temps* t.
On notera $||\cdot||$ une norme dans $\mathbb{R}^n$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1 Généralités et théorèmes d'existence

1.1 Quelques définitions

Définition 1 - On appelle *solution* de (E) sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ toute fonction dérivable $X : J \to \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $t \in J$, $(t, X(t)) \in \Omega$, et vérifiant (E) en tout point $t \in J$.

Définition 2 - Pour $(t_0, x_0) \in \Omega$, le *problème de Cauchy* consiste à trouver une solution $X : J \to \mathbb{R}^n$ de (E) sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ telle que $t_0 \in J$ et $X(t_0) = x_0$.

Remarque 3 - Une solution $X : J \to \mathbb{R}^n$ au problème de Cauchy précédent est telle que, pour tout $t \in J$, $X(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\,\mathrm{d}s$.

Définition 4 - Soient $X_1 : J_1 \to \mathbb{R}^n$ et $X_2 : J_2 \to \mathbb{R}^n$ des solutions de (E). On dit que X_2 est un *prolongement* de X_1 si $J_1 \subset J_2$ et $X_{2|J_1} = X_1$.

Définition 5 - Une solution $X : J_1 \to \mathbb{R}^n$ de (E) est dite *maximale* si elle n'admet pas de prolongement $X_2 : J_2 \to \mathbb{R}^n$ tel que $J_1 \subsetneq J_2$.

Définition 6 - Lorsque $\Omega = I \times \Omega'$, on appelle *solution globale* de (E) toute solution définie sur I tout entier.

Définition 7 - Une application $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est dite *localement lipschitzienne* par rapport à la variable d'état si, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe $T, r, C \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que, pour tous $(t, x_1), (t, x_2) \in [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, r)$,

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leqslant C\,||x_1 - x_2||.$$

Remarque 8 - Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω est localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état.

Définition 9 - Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une application $f : I \times \Omega' \to \mathbb{R}^n$ est dite *globalement lipschitzienne* par rapport à la variable d'état si, pour tout intervalle compact $K \subset I$, il existe $C_K \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que, pour tous $(t, x_1), (t, x_2) \in K \times \Omega'$,

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leqslant C_K \, ||x_1 - x_2||.$$

1.2 Existence des solutions

Proposition 10 - [Lemme de Gronwall] Soient $u, v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in I$. Supposons que, pour tout $t \in I$ tel que $t \geqslant t_0$, $v(t) \geqslant 0$ et

$$u(t) \leqslant a + \int_{t_0}^{t} v(s)\, u(s)\, \mathrm{d}s.$$

Alors, pour tout $t \in I$ tel que $t \geqslant t_0$,

$$u(t) \leqslant a \, \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\, \mathrm{d}s\right).$$

Théorème 11 - [Théorème de Cauchy-Lipschitz (version globale)] Soit $f : I \times \Omega' \to \mathbb{R}^n$ une application continue sur $I \times \Omega'$ et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Pour tout problème de Cauchy avec $(t_0, x_0) \in I \times \Omega'$, il existe une unique solution maximale définie sur I tout entier.

Théorème 12 - [Théorème de Cauchy-Lipschitz] Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Pour tout problème de Cauchy avec $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert J contenant t_0.

Théorème 13 - [Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla] Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Pour tout problème de Cauchy avec $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe une solution maximale définie sur un intervalle ouvert J contenant t_0.

Exemple 14 - Le problème de Cauchy sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $X'(t) = X^2(t)$, avec $X(0) = 1$, admet une unique solution maximale $X : t \mapsto 1/(1-t)$ définie sur $]-\infty, 1[$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Exemple 15 - Le problème de Cauchy sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $X''(t) = -\sin X(t)$, avec $X(0) = a \in \mathbb{R}$ et $X'(0) = b \in \mathbb{R}$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Théorème 16 - [Théorème de sortie de tout compact] On suppose que $I =]a, b[$ et que $f : I \times \Omega' \to \mathbb{R}^n$ est une application continue sur $I \times \Omega'$ et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Si (X, J) est une solution maximale de (E) avec $J =]t_1, t_2[$ alors
(i) $t_2 = b$ ou $[t_2 < b$ et pour tout compact K de Ω, il existe $t < t_2$ tel que $X(t) \notin K]$,
(ii) $t_1 = a$ ou $[t_1 > a$ et pour tout compact K de Ω, il existe $t > t_1$ tel que $X(t) \notin K]$.

Corollaire 17 - [Théorème des bouts] On suppose que $I =]a, b[$ et que $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ et localement lipschitzienne par rapport à la variable

d'état. Si (X,J) est une solution maximale de (E) avec $J=]t_1,t_2[$ alors
(i) $t_2=b$ ou $[t_2<b$ et $\lim_{t\to t_2}||X(t)||=+\infty]$,
(ii) $t_1=a$ ou $[t_1>a$ et $\lim_{t\to t_1}||X(t)||=+\infty]$.

Corollaire 18 - [Critère de prolongement] On suppose que $I=]a,b[$ et que $f:I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est une application continue sur $I\times\mathbb{R}^n$ et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit (X,J) une solution de (E) avec $J=]\alpha,\beta[$, $a<\alpha<\beta<b$. S'il existe $\delta>0$ et $A>0$ tels que pour, tout $t\in[\beta-\delta,\delta[$, $||X(t)||\leqslant A$, alors X peut être prolongée au-delà de β en une solution de (E).

Corollaire 19 - On suppose que $I=]a,b[$ et que $f:I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est une application continue sur $I\times\mathbb{R}^n$ et bornée. Alors, toute solution de (E) est globale.

Exemple 20 - Soit $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$. Le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $X'(t)=\dfrac{g(X(t))}{1+g(X(t))}$, avec $X(0)=x_0\in\mathbb{R}$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 21 - On suppose que $I=]a,b[$ et que $f:I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est une application continue sur $I\times\mathbb{R}^n$ et telle que, pour tout compact K de I, il existe $C_1,C_2\in\mathbb{R}_+^\star$ tels que, pour tout $(t,x)\in K\times\mathbb{R}^n$, $||f(t,x)||\leqslant C_1\,||x||+C_2$. Alors, toute solution de (E) est globale.

Exemple 22 - Les systèmes linéaires de la forme $X'(t)=A(t)\,X(t)+B(t)$, avec $A(t)$ et $B(t)$ deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des fonctions de t continues sur I vérifient le corollaire précédent.

2 Études d'exemples en dimension 1 et 2

2.1 Trois cas classiques en dimension 1

Application 23 - [Les équations de Bernoulli] Ce sont des équations du type $X'=A\,X+B\,X^\alpha$, avec A et B deux fonctions de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, et $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. On cherche uniquement les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annulent pas, et si $\alpha\notin\mathbb{Z}$, les solutions doivent être strictement positives. On peut alors poser $Y=X^{1-\alpha}$, pour obtenir $Y'=(1-\alpha)\,[A\,Y+B]$ une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants.

Exemple 24 - Soit l'équation $t\,X'+X-t\,X^3=0$. En posant $Y=X^{-2}$, on a l'équation : $t\,Y'-2\,Y+2t=0$. On obtient donc des solutions de la forme $Y(t)=2\,t+\lambda\,t^2$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. On en déduit la forme générale des solutions définies sur $I\subset\mathbb{R}_+^\star$ ou $I\subset\mathbb{R}_-^\star$: $X(t)=\varepsilon/\sqrt{2\,t+\lambda\,t^2}$, avec $(\varepsilon,\lambda)\in\{-1,1\}\times\mathbb{R}$.

Application 25 - [Les équations de Ricatti] Ce sont des équations du type $X'=A\,X^2+B\,X+C$, avec A, B et C des fonctions de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. Si l'on connaît une solution particulière X_0, on posera tout d'abord $Y=X-X_0$ pour se ramener à l'équation de Bernoulli : $Y'=(2\,A\,X_0+B)\,Y+A\,Y^2$.

Exemple 26 - Soit l'équation $X'+3\,X+X^2+2=0$. Une solution évidente est $t\mapsto -1$ (ou $t\mapsto -2$). En posant $Y=X+1$, on trouve $Y'=-Y-Y^2$. En posant $Z=1/Y$, on obtient $Z'-Z-1=0$. Les solutions de cette dernière équation sont de la forme :

$Z(t) = -1 + \lambda\ \exp(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit la forme générale des solutions définies sur $I \subset \mathbb{R} : X(t) = -1 + \dfrac{1}{-1 + \lambda\ \exp(t)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Application 27 - [Les équations à variables séparées] Ce sont des équations du type $X' = g(X)\, f(t)$ avec $g : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continues. Les solutions non constantes sont définies sur des intervalles J où g ne s'annule pas et sont de la forme $X(t) = G^{-1}(F(t) + \lambda)$, avec F une primitive de F sur I, G une primitive de $1/g$ sur J, et $\lambda \in \mathbb{R}$. En un point d'annulation X_0 de g, on obtient une solution dite *singulière*, $X(t) = X_0$ pour tout $t \in I$.

Exemple 28 - Soit l'équation $(1+t^2)\, X' - (1+X^2) = 0$. Les solutions sont les fonctions (1) $t \mapsto t$ sur tout $I \subset \mathbb{R}$, (2) $t \mapsto \dfrac{t+\lambda}{1-\lambda\, t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ et sur tout $I \subset]-\infty, 1/\lambda[$ ou $I \subset]1/\lambda, +\infty[$, (3) $t \mapsto -1/t$ pour tout $I \subset]-\infty, 0[$ ou $I \subset]0, +\infty[$.

2.2 Les équations autonomes

Définition 29 - Une équation différentielle est dite *autonome* lorsqu'elle est de la forme (A) : $X'(t) = f(X(t))$, avec $f : \Omega' \to \mathbb{R}^n$ où Ω' est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. **On supposera dans la suite que f est de classe $\mathcal{C}^1$.** On appellera *trajectoires* les courbes dans $\mathbb{R}^n$ des solutions $t \mapsto X(t)$ de (A).

Définition 30 - Un *point d'équilibre* ou *point critique* de (A) est un point X_0 de la trajectoire tel que $f(X_0) = 0$. Ce point est dit *stable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si X est une solution de (A) à un instant t_0 vérifie $|X(t_0) - X_0| < \delta$, on a (1) X est définie pour tout $t \geqslant t_0$, et (2) $|X(t) - X_0| < \varepsilon$ pour tout $t \geqslant t_0$. Il est *asymptotiquement stable* si l'on remplace (2) par $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = X_0$. Enfin, le point X_0 est dit *instable* s'il n'est pas stable (voir la Fig. 1).

Définition 31 - [En dimension 2] Une trajectoire $X(t) = (x(t), y(t))$ est *monotone* si, dans le plan (x, y), c'est le graphe d'une fonction $y = \varphi(x)$ monotone.

Proposition 32 - [En dimension 2] Si une trajectoire est monotone et si elle reste dans un compact du plan pour $t \geqslant t_0$ alors elle est définie pour tout $t \geqslant t_0$ et converge, pour $t \to +\infty$, vers un point d'équilibre du système. Remarque : En dimension 1, il suffit que la trajectoire soit monotone et bornée.

Corollaire 33 - [En dimension 2] Si une trajectoire est monotone, alors elle sort de tout compact du plan ne contenant pas de point d'équilibre.

2.3 Étude de systèmes en dimension 2

On s'intéresse à un système (B) de la forme suivante :

$$\begin{aligned} x't) &= f(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= g(x(t), y(t)), \end{aligned}$$

avec f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\Omega \in \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On notera $J_F(x_0, y_0)$ la matrice jacobienne de $F = (f, g)$ au point (x_0, y_0), et $X(t) = (x(t), y(t))$.

Proposition 34 - [Cas des systèmes linéaires] Dans les systèmes linéaires de $\mathbb{R}^2$ qui sont de la forme $(B) : X'(t) = A\,X(t)$, avec $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et A une matrice de $M_2(\mathbb{R})$, l'allure des trajectoires dépend uniquement des valeurs propres de la matrice A (voir la Fig. 2).

Théorème 35 - [Théorème de Liapounov] Soit le système différentiel $(C) : X' = f(X)$, $X(0) = X_0$, avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(0) = 0$. Si la matrice jacobienne de f en 0 a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, l'origine est un point d'équilibre attractif de (C) : pour tout X_0 assez voisin de 0, la solution $X(t)$ de (C) tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Théorème 36 - [Hartman-Grobmann] Soit (x_0, y_0) un point d'équilibre du système (B). On suppose que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si les valeurs propres λ_1 et λ_2 de $J_F(x_0, y_0)$ ont une partie réelle non nulle, alors il existe un voisinage U de (x_0, y_0) et un difféomorphisme de U sur V, un voisinage de (x_0, y_0), qui envoie une trajectoire du système (B) sur une trajectoire du système linéaire, appelé *linéarisé*, $X'(t) = J_F(x_0, y_0)\,X(t)$, en conservant le sens du temps.

Définition 37 - On appelle *isocline* I_m une courbe du plan le long de laquelle la pente des trajectoires est constante et égale à $m \in \bar{\mathbb{R}}$: autrement dit,

$$I_m = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{g(x, y)}{f(x, y)} = m \right\}.$$

L'*isocline horizontale* est $I_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x, y) = 0\}$, et l'*isocline verticale* est $I_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x, y) = 0\}$.

Proposition 38 - [Méthode générale] Pour un système (B), l'étude géométrique ou réalisation du *portrait de phase* des solutions peut se faire de la façon suivante :
(1) On cherche les points d'équilibre du système, puis on trace l'allure des trajectoires au voisinage de ces points en étudiant le linéarisé (en des points qui ne sont pas des centres).
(2) On trace les isoclines.
(3) On partitionne le plan à l'aide des isoclines verticales et horizontales afin de déterminer les régions dans lesquelles le signe de $f(x, y)$ et celui de $g(x, y)$ restent constants.
(4) On détermine les symétries :
(i) Symétrie par rapport à l'axe (Ox) lorsque $[f(x, -y) = f(x, y)$ et $g(x, -y) = -g(x, y)]$ ou bien lorsque $[f(x, -y) = -f(x, y)$ et $g(x, -y) = g(x, y)$.
(ii) Symétrie par rapport à l'axe (Oy) lorsque $[f(-x, y) = -f(x, y)$ et $g(-x, y) = g(x, y)]$ ou bien lorsque $[f(-x, y) = f(x, y)$ et $g(-x, y) = -g(x, y)]$.
(iii) Symétrie par rapport à l'origine lorsque $[f(-x, -y) = -f(x, y)$ et $g(-x, -y) = -g(x, y)]$ ou bien lorsque $[f(-x, -y) = f(x, y)$ et $g(-x, -y) = g(x, y)]$.

Exemple 39 - Le système $\{x' = y - x - 2\ , y' = x^2 - y\}$.

Exemple 40 - [Système de Lotka-Volterra] On étudie et l'on trace le portrait de phase du système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} x' &= a\,x - b\,x\,y \\ y' &= -c\,y + d\,x\,y, \end{aligned}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^\star$.

Références

Berthelin, F., *Équations différentielles*, éd. Cassini (bientôt disponible !).
Demailly, J. P., *Analyse numérique et équations différentielles*, éd. EDP Sciences.
Quéffelec, H., & Zuily, C., *Analyse pour l'agrégation*, éd. Dunod.
Gourdon, X., *Les maths en tête, Analyse*, éd. Ellipses.
Rouvière, F., *Petit guide de calcul différentiel...*, éd. Cassini.
Monier, J. M., *Analyse, MPSI*, éd Dunod.
Monier, J. M., *Analyse, MP*, éd Dunod.