ASTROPHYSIQUE (1)

Licence & Master

[Exercices corrigés]

1 Mécanique newtonienne

■ **EXERCICE 1** :

La comète de Halley est une comète à courte période, c'est-à-dire dont la période de révolution est inférieure à 200 ans. Elle parcourt son orbite elliptique en une période, T, égale à 76 ans, et s'approche à une distance d_{min} =0.587 U.A du Soleil à son périhélie (1 Unité Astronomique $\simeq 149.6 \times 10^6$ km).

1 - Déterminer le demi-grand axe de son orbite. En déduire l'excentricité de son orbite, ainsi que la distance comète-Soleil à l'aphélie.

2 - Exprimer la vitesse de la comète en un point quelconque de son orbite. Calculer sa vitesse minimale et sa vitesse maximale.

► **SOLUTION** :

1 - La troisième loi de Képler nous donne directement le demi-grand axe :

$$a = \left(\frac{\mathcal{G}\, M_\odot\, T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \simeq 17.9\ U.A\,.$$

Au périhélie, d'après les propriétés de l'ellipse, on a la relation

$$d_{min} = a\,(1-e)\,,$$

ce qui donne l'excentricité $e = 1 - d_{min}/a \simeq 0.967$.
La distance au Soleil à l'aphélie, d_{max}, sera donc égale à

$$d_{max} = a\,(1+e) \simeq 35.2\ U.A\,.$$

2 - L'expression de l'énergie mécanique permet de déterminer la vitesse de la comète en un point de sa trajectoire : en effet, on peut écrire

$$E = \frac{1}{2} m\, v^2 - \frac{\mathcal{G}\, M_\odot\, m}{r} = - \frac{\mathcal{G}\, M_\odot\, m}{2a}\ ,$$

avec m, la masse de la comète. La vitesse, qui est une fonction de la distance à l'astre attractif (ici, le Soleil), se déduit facilement :

$$v = \sqrt{2\,\mathcal{G}\,M_\odot\,\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}\,.$$

La vitesse est donc maximale au périhélie et, comme $d_{min} = a\,(1-e)$, cette dernière vaut

$$v_{max} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}\,M_\odot}{a}\,\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \simeq 54.5\ km \cdot s^{-1}$$

Enfin, la vitesse est minimale à l'aphélie, en $d_{max} = a\,(1+e)$. Elle est telle que ;

$$v_{min} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}\,M_\odot}{a}\,\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \simeq 0.9\ km \cdot s^{-1}\,.$$

■ **EXERCICE 2** :

Une planète évolue autour de l'étoile β-Pictoris, de masse M, sur une orbite elliptique. A un instant t, elle se trouve à une distance r_0 de l'étoile avec un rayon vecteur $\vec{r}_0$ faisant un angle α avec son vecteur vitesse $\vec{v}_0$, de module v_0. Déterminer les distances, minimale et maximale, de la planète à l'étoile. On exprimera les résultats en fonction de $X = r_0\,v_0^2/(\mathcal{G}\,M)$, et on supposera que la masse de la planète, m, est telle que $m \ll M$.

► **SOLUTION** :

La constantes des aires de la planète s'écrit : $C = v_0\,r_0\,|\sin\alpha|$. Le paramètre de son orbite est donc

$$p = \frac{C^2}{\mathcal{G}\,M} = \frac{v_0^2\,r_0^2\,\sin^2\alpha}{\mathcal{G}\,M}\,.$$

L'orbite étant elliptique, l'énergie mécanique de la planète sur son orbite est constante et vaut

$$E = \frac{\mathcal{G}\,M\,(e^2-1)}{2\,p}\,,$$

avec e, l'excentricité de la trajectoire de la planète. A l'instant t considéré, on peut donc écrire

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 - \frac{\mathcal{G}\,M\,m}{r_0} = \frac{\mathcal{G}\,M\,(e^2-1)}{2\,p}\,.$$

Cette expression nous permet de déterminer l'excentricité de la trajectoire qui est

$$e = \sqrt{1 - X\,(2-X)\,\sin^2\alpha}\,,$$

avec $X = r_0\,v_0^2/(\mathcal{G}\,M)$. Ainsi, l'équation de la trajectoire est entièrement déterminée et s'écrit

$$r(\theta) = \frac{r_0\,X\,\sin^2\alpha}{1 + \sqrt{1 - X\,(2-X)\,\sin^2\alpha}\,\cos\theta}\,.$$

La distance minimale d'approche (ou périastre), $r_{\rm min}$, est donc obtenue pour $\theta = 0$:

$$r_{\rm min} = \frac{r_0}{2-X}\,(1 - \sqrt{1 - X\,(2-X)\,\sin^2\alpha})\,.$$

La distance maximale (ou apoastre), $r_{\rm max}$, est obtenue pour $\theta = \pi$:

$$r_{\rm max} = \frac{r_0}{2-X}\,(1 + \sqrt{1 - X\,(2-X)\,\sin^2\alpha})\,.$$

■ EXERCICE 3 :

On considère une planète supposée homogène et sphérique, de centre O, de rayon R et de masse M.

1 - En utilisant le théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ gravitationnel, noté g_0, à la surface de la planète. Exprimer alors le champ gravitationnel à l'intérieur et à l'extérieur de la planète en fonction de g_0.

2 - Avec quelle vitesse faut-il lancer un mobile depuis la surface de la planète pour qu'il se libère de l'attraction gravitationnelle ? On négligera la vitesse de rotation de la planète sur elle-même.
Application numérique : calculer cette vitesse pour la Terre avec $M \simeq 6 \times 10^{24}$ kg, et $R \simeq 6378$ km.

3 - On creuse un puits rectiligne traversant la planète suivant un diamètre. Quel est le mouvement d'un mobile lâché dans ce puits sans vitesse initiale depuis la surface de la planète ? Quelle est la vitesse maximale atteinte ?

► SOLUTION :

1 - Par symétrie sphérique, le champ gravitationnel produit ne peut dépendre que de la distance, r, au centre de la planète et reste orienté selon le vecteur radial unitaire $\vec{u}_r$ (en coordonnées sphériques). Il y a donc deux régions différentes selon r :

(a) A une distance $r \geq R$, on doit considérer la sphère S de rayon r et de même centre que la planète. La masse totale, intérieure à S, est donc égale à M : en appliquant le théorème de Gauss, on déduit que le champ gravitationnel, $\vec{g}(r)$, à la distance r est tel que

$$\oint_{(S)} \vec{g}\cdot {\rm d}\vec{S} = g(r)\,4\pi\,r^2 = -4\pi\,\mathcal{G}\,M\,.$$

Autrement dit,

$$\vec{g}(r) = -\frac{\mathcal{G}\,M}{r^2}\,\vec{u}_r\,.$$

En appelant $g_0 = \mathcal{G}\,M/R^2$, l'intensité du champ gravitationnel à la surface de l'astre, on obtient :

$$\vec{g}(r) = -g_0\left(\frac{R}{r}\right)^2\,\vec{u}_r\,.$$

(b) A une distance $r < R$, la masse intérieure à la sphère S de rayon r est égale à

$$M_{int} = M \left(\frac{r}{R}\right)^3 ,$$

étant données les hypothèses de symétrie sphérique et de densité homogène. On a donc

$$\oint_{(S)} \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = g(r)\, 4\pi\, r^2 = -4\pi\, \mathcal{G}\, M \left(\frac{r}{R}\right)^3 ,$$

c'est-à-dire,

$$\vec{g}(r) = -\frac{\mathcal{G}\, M\, r}{R^3}\, \vec{u}_r ,$$

ou bien encore,

$$\vec{g}(r) = -g_0 \left(\frac{r}{R}\right) \vec{u}_r .$$

On notera que le champ gravitationnel s'annule au centre de la planète et atteint un maximum à sa surface où son intensité vaut g_0.

2 - Par définition, si l'on néglige la vitesse de rotation de la planète, la vitesse demandée correspond à *la vitesse de libération*, c'est-à-dire la vitesse initiale minimale qu'il faut communiquer à un mobile, depuis la surface d'un astre, pour qu'il puisse partir à l'infini. Cette vitesse est calculée par rapport au centre, supposé fixe, de l'astre, auquel on peut associer un référentiel galiléen : l'énergie mécanique étant une constante du mouvement, la condition initiale permettant au mobile de s'échapper à l'infini s'écrit

$$-\frac{\mathcal{G}\, M\, m}{R} + \frac{1}{2}\, m\, v_i^2 \geq 0 ,$$

avec v_i, la vitesse initiale du mobile. La vitesse de libération, notée v_{lib}, sera donc

$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2\, \mathcal{G}\, M}{R}} .$$

Pour la Terre, $v_{lib} \simeq 11.2$ km·s^{-1}.

3 - L'équation du mouvement du mobile est donnée par

$$m\, \ddot{r} + g_0 \left(\frac{r}{R}\right) = 0 .$$

Le mouvement du mobile est donc sinusoïdal : $r(t) = R\, \cos(\omega\, t + \phi)$, avec $\omega = \sqrt{g_0/R}$. La constante ϕ est déterminée par la condition initiale $\dot{r}(0) = -R\, \omega\, \sin\phi = 0$, donc $\phi = 0$. Enfin, la vitesse maximale atteinte est égale à $R\, \omega$.

■ **EXERCICE 4** :

Une comète, de masse m, suit une trajectoire parabolique autour du Soleil, de masse $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg. On connaît seulement sa distance minimale d'approche, notée d_m, qui est égale à 0.18 U.A.

1 - Donner l'équation de sa trajectoire, et déterminer l'équation différentielle reliant θ au temps t, avec θ, l'angle entre le rayon vecteur de la comète, à un instant t, et celui correspondant à l'instant $t = 0$ lorsque la comète atteint son périhélie.

2 - Résoudre l'équation différentielle précédente en exprimant t en fonction de $u = \tan(\theta/2)$. En déduire l'instant où la comète sera à une distance $2\,d_m$, après avoir atteint son périhélie.

► **SOLUTION** :

1 - La trajectoire étant parabolique, son excentricité est égale à 1. La trajectoire est de la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \cos\theta}\,,$$

avec p, le paramètre de la trajectoire. La distance minimale est atteinte lorsque $\theta = 0$, donc $p = 2\,d_m$. La trajectoire est donc

$$r(\theta) = \frac{2\,d_m}{1 + \cos\theta}\,.$$

La constante des aires de la trajectoire est $C = r^2\,\dot{\theta}$, et elle est reliée au paramètre p par la relation

$$p = \frac{C^2}{\mathcal{G}\,M_\odot}\,.$$

On trouve donc l'équation différentielle

$$\frac{\dot{\theta}}{(1 + \cos\theta)^2} = \frac{\sqrt{2\,\mathcal{G}\,M_\odot\,d_m}}{4\,d_m^2}\,.$$

2 - L'équation différentielle donne

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + \cos\theta)^2} = \frac{\sqrt{2\,\mathcal{G}\,M_\odot\,d_m}}{4\,d_m^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

En posant $u = \tan(\theta/2)$, on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,(1 + u^2)\,\mathrm{d}\theta$, donc, en intégrant,

$$\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\theta'}{(1 + \cos\theta')^2} = \int_0^u \frac{1}{2}\,(1 + u'^2)\,\mathrm{d}u' = \frac{\sqrt{2\,\mathcal{G}\,M_\odot\,d_m}}{4\,d_m^2}\,t\,,$$

c'est-à-dire,

$$t = \sqrt{\frac{2\,d_m^3}{\mathcal{G}\,M_\odot}}\,\left(u + \frac{u^3}{3}\right)\,.$$

La comète sera à une distance $2\,d_m$, lorsque $1+\cos\theta = 1$, donc lorsque $\theta = \pi/2$, ou $u = 1$. Cela correspond à l'instant

$$t_0 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\,d_m^3}{\mathcal{G}\,M_\odot}} \simeq 8.4 \text{ jours}\,.$$

■ **EXERCICE 5** :

Un satellite, de masse m, est en orbite circulaire à une altitude z autour de la Terre, de masse M et supposée sphérique de rayon R. On néglige, dans les deux premières questions, les frottements liés à l'atmosphère. On appellera g_0, l'intensité de la pesanteur au niveau du sol ($z = 0$).

1 - Déterminer la vitesse du satellite, notée v, en fonction de g_0 et z, ainsi que son énergie mécanique totale et la norme de son moment cinétique par rapport au centre de la Terre.

2 - Exprimer sa période de rotation, notée T, autour de la Terre. Pour quelle altitude le satellite est-il en orbite géostationnaire ?

3 - On suppose à présent que le satellite subit une force de frottement, opposée à sa vitesse, d'intensité $f = k\,m\,v^2/z$, très faible devant la force gravitationnelle terrestre, où k est un coefficient de frottement positif. A chaque révolution du satellite, la perte d'altitude δz est donc supposée très faible devant z.

(a) Déterminer la variation de vitesse δv en fonction de δz et de T, puis le coefficient de frottement k. Comment évolue la vitesse du satellite au cours du temps ?

(b) Exprimer le rapport entre le travail de la force de frottement sur une révolution et l'énergie mécanique totale.

► **SOLUTION** :

1 - L'intensité de la force gravitationnelle à l'altitude z s'écrit

$$F_G = m\,g = \frac{\mathcal{G}\,M\,m}{(R+z)^2}\,,$$

ce qui permet d'exprimer l'intensité de la pesanteur à une altitude z, en fonction de $g_0 = \mathcal{G}\,M/R^2$,

$$g = g_0\,\left(\frac{R}{R+z}\right)^2\,.$$

Par ailleurs, sur une orbite circulaire, on a égalité entre l'accélération centripète, égale à $v^2/(R+z)$, et g. On obtient donc,

$$v = \sqrt{g\,(R+z)} = R\,\sqrt{\frac{g_0}{R+z}}\,.$$

L'énergie potentielle gravitationnelle, notée E_p, est égale à $-\mathcal{G}\, M\, m/(R{+}z)$, et l'énergie cinétique, notée E_c, vaut $m\, v^2/2$. L'énergie mécanique totale, notée E, du satellite est alors négative et vaut

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2}\, E_p = -\frac{1}{2}\, m\, g_0\, \frac{R^2}{R+z}\, .$$

Enfin, la norme du moment cinétique du satellite par rapport au centre de la Terre est égale à

$$\sigma = m\, v\, (R+z) = m\, R\, \sqrt{g_0\, (R+z)}\, .$$

2 - Par définition, la vitesse angulaire, notée ω, du satellite sur son orbite est telle que $v = (R+z)\, \omega$. La période est alors donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\, (R+z)^{3/2}}{R\, \sqrt{g_0}}\, .$$

Un satellite est géostationnaire si sa période de rotation est égale à la période de rotation de la Terre, soit $T_0 = 84600$ s. De l'expression précédente, on trouve l'altitude correspondante

$$z_0 = \left(\frac{g_0\, T_0^2\, R^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R\, .$$

Pour la Terre, $z_0 \simeq 35600$ km.

3 - (a) Suivant l'hypothèse d'une faible variation de z et donc de v, il suffit de différentier l'expression de la vitesse pour obtenir

$$\delta v = -\frac{1}{2}\, \sqrt{g_0}\, R\, (R+z)^{-3/2}\, \delta z = -\frac{\pi}{T}\, \delta z\, .$$

D'après le théorème du moment cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F_G}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{f})\, ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, [m\, v\, (R+z)] = (R+z)\, \left(\frac{-k\, m\, v^2}{z} \right)\, .$$

Par ailleurs, la variation du moment cinétique étant faible au cours d'une révolution, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, [m\, v\, (R+z)] \simeq \frac{\delta\, [m\, v\, (R+z)]}{T} = \frac{1}{2}\, \frac{m\, v\, \delta z}{T}\, .$$

Ainsi, les deux dernières relations permettent d'exprimer k,

$$k = -\frac{z\, \delta z}{4\pi\, (R+z)^2}\, .$$

Le coefficient k étant positif, on déduit que $\delta z < 0$, c'est-à-dire que le satellite perd de l'altitude à chaque révolution. Enfin, la relation entre δv et δz permet de conclure que $\delta v > 0$, donc la vitesse du satellite augmente.

(b) Le travail de la force de frottement sur une révolution, noté δW, est simplement

$$\delta W = -f\, 2\pi\, (R+z) = \frac{1}{2}\, m\, g_0 \left(\frac{R}{R+z}\right)^2 \delta z\, .$$

Quant à la variation de l'énergie mécanique du satellite sur une révolution, elle s'obtient en différentiant l'expression de E obtenue précédemment,

$$\delta E = \frac{1}{2}\, m\, g_0 \left(\frac{R}{R+z}\right)^2 \delta z\, .$$

On vérifie donc bien le principe de conservation de l'énergie : $\delta W = \delta E$.

■ EXERCICE 6 :

On souhaite lancer un satellite de masse m depuis une station spatiale située au point P_0, à une distance r_0 du centre O de la Terre. Pour obtenir l'orbite circulaire souhaitée, il faut communiquer au satellite une vitesse $\vec{v}_0$, mesurée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et perpendiculaire à $\overrightarrow{OP_0}$. Au moment du lancement, la vitesse communiquée au satellite à la bonne direction, mais son module est légèrement différent de $v_0 = ||\vec{v}_0||$: ce dernier est égal à $v_0 + \delta v$, avec $|\delta v| \ll v_0$.

1 - Exprimer le demi-grand axe a et l'excentricité e de l'orbite du satellite en fonction de r_0 et $\delta v / v_0$.

2 - En déduire l'écart relatif $\delta T / T_0$, à la période prévue T_0 pour une orbite circulaire de rayon r_0. Quelle valeur maximale de $|\delta v|/v_0$ peut-on tolérer pour un satellite géostationnaire si l'on ne veut pas que sa rotation excède un degré par an ?

► SOLUTION :

1 - La trajectoire du satellite sera elliptique. Son énergie mécanique E est telle que

$$E = -\frac{\mathcal{G}\, M\, m}{2\, a} = \frac{1}{2}\, m\, (v_0 + \delta v)^2 - \frac{\mathcal{G}\, M\, m}{r_0}\, ,$$

avec M, la masse de la Terre. L'orbite circulaire, qu'il aurait dû avoir, est telle que $v_0 = \sqrt{\mathcal{G}\, M / r_0}$. En développant l'expression de l'énergie mécanique, on obtient

$$m\, v_0^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{\delta v}{v_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta v}{v_0}\right)^2\right] = -\frac{r_0\, v_0^2\, m}{2\, a}\, .$$

On trouve donc

$$a = \frac{r_0}{1 - 2\, \frac{\delta v}{v_0} - \left(\frac{\delta v}{v_0}\right)^2} \simeq r_0 \left(1 + 2\, \frac{\delta v}{v_0} + 5\left(\frac{\delta v}{v_0}\right)^2\right)\, .$$

au second ordre en $\delta v/v_0$. Le paramètre p de l'orbite est tel que

$$p = \frac{r_0^2\, v^2}{\mathcal{G}\, M} \simeq r_0\, \left(1 + 2\,\frac{\delta v}{v_0} + \left(\frac{\delta v}{v_0}\right)^2\right)\ ,$$

au second ordre en $\delta v/v_0$. L'excentricité e de l'orbite est telle que $p = a\,(1-e^2)$, donc

$$1 - e^2 = \frac{p}{a} \simeq \left(1 + 2\,\frac{\delta v}{v_0} + \left(\frac{\delta v}{v_0}\right)^2\right)\, \left(1 - 2\,\frac{\delta v}{v_0} - \left(\frac{\delta v}{v_0}\right)^2\right) \simeq 1 - 4\,\left(\frac{\delta v}{v_0}\right)^2\ ,$$

au second ordre en $\delta v/v_0$. Conclusion :

$$\begin{aligned} a &\simeq r_0\, \left(1 + 2\,\frac{\delta v}{v_0}\right)\ , \\ e &\simeq 2\,\frac{\delta v}{v_0}\,, \end{aligned}$$

au premier ordre en $\delta v/v_0$.

2 - En notant $T = T_0 + \delta T$, la période de l'orbite du satellite, la troisième loi de Képler donne l'égalité

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{r_0^3}{T_0^2}\,.$$

De plus, au premier ordre en $\delta v/v_0$,

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{T_0^2} &\simeq 1 + 2\,\frac{\delta T}{T_0}\,, \\ \frac{a^3}{r_0^3} &\simeq \left(1 + 2\,\frac{\delta v}{v_0}\right)^3 \simeq 1 + 6\,\frac{\delta v}{v_0}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$\frac{\delta T}{T_0} \simeq 3\,\frac{\delta v}{v_0}\,.$$

Pour un satellite géostationnaire, la période de révolution est d'environ 24 h. Un écart de 1 degré par an correspond à $1/365$ degré par jour sur les 360 degrés que le satellite devrait faire. On a donc $\delta T/T_0 = (1/365)/360 \simeq 8 \times 10^{-6}$. L'écart relatif toléré pour la vitesse est donc tel que

$$\frac{|\delta v|}{v_0} \leq 3 \times 10^{-6}\,.$$

■ EXERCICE 7 :

Les forces de marée gravitationnelle ne s'appliquent qu'à des corps massifs ayant une certaine extension spatiale, puisqu'elles résultent de la variation du champ gravitationnel en chaque point du corps considéré. La Terre subit deux forces de marée principales, celle exercée par la Lune, et celle exercée par le Soleil. On considère un point M à une distance r du centre T de la Terre de rayon R_T. On suppose $r \leq R_T$, et $r \ll D_L$, où D_L est la distance Terre-Lune. Enfin, on note θ, l'angle $\widehat{LTM}$ avec L le centre de la Lune.

1 - Exprimer le potentiel gravitationnel en M dû à la Lune à l'ordre 2 en r/D_L. En déduire les composantes du champ gravitationnel en M, associé à ce potentiel. On notera M_L, la masse de la Lune.

2 - Déterminer l'accélération d'entraînement du référentiel terrestre, liée à l'attraction lunaire. En déduire l'accélération relative subie par un point fixe M situé à la surface de la Terre sur l'axe Terre-Lune. La force associée à cette accélération relative est appelée *force de marée*. Calculer le rapport entre cette force de marée, et celle liée à l'attraction du Soleil. On donne $D_\odot \simeq 1.496 \times 10^8$ km, la distance Terre-Soleil, $D_L \simeq 384000$ km, $M_L \simeq 7.35 \times 10^{22}$ kg, et $M_\odot \simeq 1.99 \times 10^{30}$ kg, la masse du Soleil.

3 - En négligeant tout effet de résonance, et en considérant que le point M est en équilibre à la surface de l'eau, déterminer la hauteur maximale des marées terrestres. Conclure.

► SOLUTION :

1 - En coordonnées sphériques de centre T et d'axe TL, le potentiel en M s'écrit

$$V(M) = -\frac{\mathcal{G}\, M_L}{ML^2} = -\frac{\mathcal{G}\, M_L}{D_L^2 + r^2 - 2\, D_L\, r\, \cos\theta}\,,$$

dont le développement limité à l'ordre 2 en r/D_L est

$$V(M) = -\frac{\mathcal{G}\, M_L}{D_L}\left[1 + \cos\theta\left(\frac{r}{D_L}\right) + \frac{3\, \cos^2\theta - 1}{2}\left(\frac{r}{D_L}\right)^2 + o\left(\left(\frac{r}{D_L}\right)^2\right)\right]\,.$$

Le champ gravitationnel $\vec{G}(M)$ est tel que

$$\vec{G}(M) = -\vec{\nabla} V(M) = -\frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta\,,$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} \vec{G}(M) \quad &= \quad \frac{\mathcal{G}\, M_L}{D_L^2}\left(\cos\theta + (3\cos^2\theta - 1)\,\frac{r}{D_L} + o\left(\frac{r}{D_L}\right)\right)\vec{e}_r \\ &\qquad - \frac{\mathcal{G}\, M_L}{D_L^2}\left(\sin\theta + 3\,\sin\theta\,\cos\theta\,\frac{r}{D_L} + o\left(\frac{r}{D_L}\right)\right)\vec{e}_\theta\,. \end{aligned}$$

2 - Le référentiel terrestre est soumis à l'accélération d'entraînement liée à l'attraction lunaire qui s'écrit

$$\vec{a}_e = \frac{\mathcal{G}\, M_L}{TL^3}\,\overrightarrow{TL}\,,$$

que l'on peut ré-écrire dans le repère $\{M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$ lié au point M,

$$\vec{a}_e = \frac{\mathcal{G}\, M_L}{D_L^2}\,(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta)\,.$$

L'accélération relative subie par un point fixe M, situé à la surface terrestre sur l'axe Terre-Lune ($r = R_T$, et $\theta = 0$), est donc

$$\vec{a}_r(M) = \vec{G}(M) - \vec{a}_e = \frac{2\,\mathcal{G}\, M_L\, R_T}{D_L^3}\,\vec{e}_r\,.$$

L'intensité de la force de marée, par unité de masse, est donc $2\,\mathcal{G}\, M_L\, R_T/D_L^3$. Dans la même configuration, le Soleil exercera une force de marée dont l'intensité par unité de masse sera égale à $2\,\mathcal{G}\, M_\odot\, R_T/D_\odot^3$. Le rapport α entre ces deux forces est donc

$$\alpha = \frac{M_\odot\, D_L^3}{M_L\, D_\odot^3} \simeq 0.46\,.$$

Les forces de marée dues à la Lune sont donc presque deux fois plus importantes que celles dues au Soleil.

3 - D'après la question précédente, les forces de marée sont maximales lorsque $r = R_T$ et $\theta = 0$. Pour rester en équilibre, le point M, situé en $r = R_T$ et $\theta = 0$, doit compensé la force de marée par une variation de son potentiel de pesanteur, son altitude doit donc varier d'une hauteur h qui est telle que

$$g\,h = \frac{\mathcal{G}\, M_L\, R_T}{D_L^3}\,,$$

avec g, l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre.
La hauteur maximale des marées produites par la Lune est donc

$$h = \frac{\mathcal{G}\, M_L\, R_T}{g\, D_L^3} \simeq 0.33\ \mathrm{m}\,.$$

L'observation de marées, dont l'amplitude peut atteindre la dizaine de mètres, suggère que les phénomènes de résonance, dus notamment à la géographie du lieu où l'on se trouve, jouent un rôle prépondérant dans la hauteur maximale des marées.

■ **EXERCICE 8** :

Une navette spatiale de masse M est en orbite circulaire autour de la Terre, à une distance R de son centre. Le référentiel terrestre sera supposé galiléen.

1 - Donner la norme de la vitesse $\vec{V}$, et l'énergie mécanique E de la navette. On supposera connue la masse de la Terre, notée $M_\oplus$.

2 - On libère de la navette, deux satellites de même masse m, de telle sorte que l'un a une vitesse $\vec{v}_1$ colinéaire et de même sens que la vitesse $\vec{V}$ de la navette, et l'autre une vitesse

$\vec{v}_2$ colinéaire, mais de sens opposé à celui de $\vec{V}$. Les vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont définies dans le référentiel de la navette.

(a) Exprimer les énergies mécaniques E_1 et E_2 dans le référentiel terrestre, en fonction des rapports $x = v_1/V$ et $x' = v_2/V$.

(b) En supposant que $x \ll 1$ et $x' \ll 1$, déterminer les équations des trajectoires des deux satellites.

► **SOLUTION** :

1 - En orbite circulaire, la norme de l'accélération radiale est égale à celle du champ gravitationnelle, ce qui se traduit par

$$\frac{V^2}{R} = \frac{\mathcal{G}\, M_\oplus}{R^2}\,,$$

et l'on obtient la vitesse,

$$V = \sqrt{\frac{\mathcal{G}\, M_\oplus}{R}}\,.$$

L'énergie mécanique de la navette s'écrit comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle,

$$E = \frac{1}{2}\, M\, V^2 - \frac{\mathcal{G}\, M_\oplus}{R} = -\frac{\mathcal{G}\, M_\oplus\, M}{2\, R}\,.$$

2 - (a) Les énergies mécaniques des satellites sont

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}\,(V+v_1)^2 - \frac{\mathcal{G}\, M_\oplus\, m}{R} = \frac{1}{2}\, m\, V^2\,(x^2 + 2\,x - 1)\,, \\ E_2 &= \frac{1}{2}\,(V-v_2)^2 - \frac{\mathcal{G}\, M_\oplus\, m}{R} = \frac{1}{2}\, m\, V^2\,(x'^2 - 2\,x' - 1)\,, \end{aligned}$$

avec les rapports $x = v_1/V$ et $x' = v_2/V$.

(b) En supposant que $x \ll 1$ et $x' \ll 1$, on a $E_1 < 0$ et $E_2 < 0$, donc les satellites ont des trajectoires (liées) elliptiques. Les constantes des aires pour les deux satellites s'écrivent

$$\begin{aligned} C_1 &= R\,(V+v_1) = R\,V\,(1+x)\,, \\ C_2 &= R\,(V-v_2) = R\,V\,(1-x')\,. \end{aligned}$$

D'après les propriétés des trajectoires elliptiques, les paramètres p_1 et p_2 de leurs trajectoires sont tels que

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{C_1^2}{\mathcal{G}\, M_\oplus} = R\,(1 + 2\,x + o(x^2))\,, \\ p_2 &= \frac{C_2^2}{\mathcal{G}\, M_\oplus} = R\,(1 - 2\,x' + o(x'^2))\,. \end{aligned}$$

Enfin, leurs énergies mécaniques se ré-écrivent

$$E_1 = \frac{\mathcal{G}\, M_\oplus\, m\, (e_1^2 - 1)}{2\, p_1} = \frac{\mathcal{G}\, M_\oplus\, m\, (e_1^2 - 1)}{2\, R\, (1 + 2\, x)}\,,$$
$$E_2 = \frac{\mathcal{G}\, M_\oplus\, m\, (e_2^2 - 1)}{2\, p_2} = \frac{\mathcal{G}\, M_\oplus\, m\, (e_2^2 - 1)}{2\, R\, (1 - 2\, x')}\,,$$

avec e_1 et e_2, les excentricités des deux trajectoires. D'après la question précédente, on a

$$\frac{\mathcal{G}\, M_\oplus\, m\, (e_1^2 - 1)}{2\, R\, (1 + 2\, x)} = \frac{1}{2}\, m\, V^2\, (2\, x - 1 + o(x^2))\,,$$
$$\frac{\mathcal{G}\, M_\oplus\, m\, (e_2^2 - 1)}{2\, R\, (1 - 2\, x')} = \frac{1}{2}\, m\, V^2\, (-2\, x' - 1 + o(x'^2))\,.$$

En remplaçant V par $\sqrt{\mathcal{G}\, M_\oplus / R}$, on trouve $e_1 = 2\, x + o(x^2)$, et $e_2 = 2\, x' + o(x'^2)$. Les équations des trajectoires sont donc

$$\rho_1(\theta) = \frac{R\, (1 + 2\, x)}{1 + 2\, x\, \cos(\theta)}\,,$$
$$\rho_2(\theta) = \frac{R\, (1 - 2\, x')}{1 + 2\, x'\, \cos(\theta)}\,.$$

■ EXERCICE 9 :

Le potentiel gravitationnel du Soleil, de masse $M_\odot$, dans son plan équatorial, est égal approximativement à

$$V(r) = -\frac{\mathcal{G}\, M_\odot}{r} - \frac{\mathcal{G}\, M_\odot\, \epsilon\, R_e^2}{5\, r^3}\,,$$

avec $\epsilon = (R_e - R_p)/R_e$, R_e étant le rayon équatorial du Soleil, et R_p, son rayon polaire.

1 - Etablir l'équation du mouvement d'une planète, dans le plan équatorial, en posant $C = r^2\, \dot{\theta}$. On pourra également poser $\beta = \mathcal{G}\, M_\odot\, \epsilon\, R_e^2 / 5$.

2 - Montrer qu'une solution de la forme $r = p/[1 + e\, \cos(\gamma\, \theta)]$ convient si l'on néglige les termes en e^2. Exprimer p et γ en fonction de C et β.

3 - Exprimer l'avance du périhélie, $\delta\theta$, d'une planète pour une révolution, appelée aussi *angle apsidal*, en fonction du demi-grand axe a de l'orbite. Faire l'application numérique pour la planète Mercure et en déduire l'avance de son périhélie, causée par l'aplatissement du Soleil, sur une période de un siècle : on donne $R_e = 6.96 \times 10^8$ m, $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$, l'excentricité de l'orbite de Mercure $e = 0.21$, sa période de révolution $T = 88$ jours, et le demi-grand axe de son orbite $a = 58 \times 10^9$ m.

► **SOLUTION** :

1 - A un instant t, une planète est repérée par ses coordonnées polaires (r, θ). D'après la seconde formule de Binet, en posant $u = 1/r$, on a

$$-C^2\, u^2 \left(u + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2}\right) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} = -\frac{\mathcal{G}\, M_\odot}{r^2} - \frac{3\,\beta}{r^4}\,,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{\mathcal{G}\, M_\odot}{C^2} + \frac{3\,\beta}{C^2\, r^2}\,.$$

2 - Avec $r = p/[1 + e\, \cos(\gamma\, \theta)]$, on a

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e\,\gamma^2\, \cos(\gamma\, \theta)}{p}\,,$$

ce qui implique,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}\, \left[1 + e\,(1-\gamma^2)\, \cos(\gamma\, \theta)\right]\,.$$

Par ailleurs,

$$\frac{\mathcal{G}\, M_\odot}{C^2} + \frac{3\,\beta}{C^2\, r^2} = \left(\frac{\mathcal{G}\, M_\odot}{C^2} + \frac{3\,\beta}{C^2\, p^2}\right) + \frac{6\,\beta\, \cos(\gamma\, \theta)}{C^2\, p^2}\, e + o(e^2)\,.$$

Conclusion : comme $3\,\beta/(C^2\, p^2) \ll \mathcal{G}\, M_\odot/C^2$ (car $p \gg R_e$), on trouve par identification,

$$p \simeq \frac{C^2}{\mathcal{G}\, M_\odot}\,,$$

$$\frac{e\,(1-\gamma^2)}{p} \simeq \frac{6\,\beta\, e}{C^2\, p^2}\,,$$

et l'on déduit,

$$\gamma \simeq \sqrt{1 - \frac{6\,\beta}{C^2\, p}} = 1 - \frac{3\,\beta}{C^2\, p} + o\left(\frac{1}{p^2}\right)\,,$$

ce qui peut s'écrire encore,

$$\gamma \simeq 1 - \frac{3\,\beta\, \mathcal{G}\, M_\odot}{C^4}\,.$$

3 - Considérons l'équation de la trajectoire $r = p/[1 + e\, \cos(\gamma\, \theta)]$. Si la planète est à son périhélie en θ alors elle y reviendra lorsque l'angle dans le cosinus, de période $2\pi/\gamma$, sera égal $\gamma\, \theta + 2\pi$, et non $\gamma\,(\theta + 2\pi)$. La différence $\delta\theta$ est ce que l'on appelle l'avance du périhélie sur une révolution :

$$\delta\theta = \gamma\, \theta + 2\pi - \gamma\,(\theta + 2\pi) = 2\pi\,(1-\gamma)\,.$$

La différence $\delta\theta$ est positive car $\gamma < 1$. Les axes de l'ellipse tournent donc lentement dans le même sens que la planète : autrement dit, la planète est en retard par rapport à son périhélie. En remplaçant par l'expression de γ, on obtient

$$\delta\theta = \frac{6\pi}{5} \, \frac{\epsilon \, R_e^2}{a^2 \, (1 - e^2)^2} \, ,$$

puisque $p = a\,(1 - e^2)$. L'application numérique pour Mercure donne sur une révolution : $\delta\theta_M \simeq 2.97 \times 10^{-8}$ rad. En un siècle, Mercure fait $(100 \times 365)/88$ révolutions, donc l'avance du périhélie est égal à $\Delta\theta_m \simeq 1.23 \times 10^{-5}$ rad, soit 2.54" d'arc (1 rad $= (360/2\pi) \cdot 3600$" d'arc).

■ EXERCICE 10 :

En relativité générale, le mouvement d'une planète autour d'un centre attractif, supposé fixe, conduit à une trajectoire quasi-elliptique qui ne se referme pas exactement lorsque le rayon reprend les mêmes valeurs. L'avance du périhélie, $\delta\theta$, pour une révolution, est donnée par

$$\frac{\delta\theta}{2\pi} = \frac{12\pi^2 \, a^2}{T^2 \, c^2 \, (1 - e^2)} \, ,$$

avec a, le demi-grand axe de l'orbite, T, la période de révolution, et e, l'excentricité de l'orbite.

Un satellite terrestre atteint son périgée à 350 km d'altitude. Sa période de révolution est $T = 5843$ s.

1 - Exprimer le demi-grand axe de sa trajectoire en fonction du rayon de la Terre $R_\oplus$, et de l'intensité de la pesanteur g, à la surface de la Terre. Faire l'application numérique avec $R_\oplus = 6378$ km, et $g = 9.8$ m·s^{-2}.

2 - En déduire l'excentricité e de sa trajectoire et l'altitude h de son apogée.

3 - Calculer l'avance relativiste du périgée sur une période d'un siècle. On exprimera le résultat en seconde d'arc par siècle.

► SOLUTION :

1 - D'après la troisième loi de Képler, on a la relation

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G} \, M_\oplus}{4\pi^2} \, ,$$

avec $M_\oplus$, la masse de la Terre. Par ailleurs, l'égalité entre le poids et la force de gravitation à la surface de la Terre donne $g = \mathcal{G} \, M_\oplus / R_\oplus^2$. On trouve donc

$$a = \left(\frac{g \, R_\oplus^2 \, T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \simeq 7.01 \times 10^6 \text{ m} \, .$$

2 - Soit h_p, l'altitude du périgée. D'après les caractéristiques d'une orbite elliptique : $2\,a = (h_p + R_\oplus) + (h + R_\oplus)$. On déduit donc $h = 2\,(a - R_\oplus) - h_p \simeq 1267$ km. De plus, l'excentricité est telle que $(h_p + R_\oplus) + a\,e = a$, donc on a : $e = (a - h_p - R_\oplus)/a \simeq 4.0 \times 10^{-2}$.

3 - Pour une révolution, on aura

$$\delta\theta = \frac{24\pi^3\,a^2}{T^2\,c^2\,(1-e^2)} \simeq 1.19 \times 10^{-8}\ \text{rad}\,.$$

Le nombre de révolutions en un siècle étant égal à $n = 84600 \times 365.25 \times 100/5843 = 540092$, on déduit l'avance relativiste du périgée sur un siècle qui est

$$\delta\theta_s = n\,\delta\theta \simeq 6.44 \times 10^{-3}\ \text{rad}\,,$$

ce qui correspond à 1328" d'arc.

■ EXERCICE 11 :

Deux étoiles en interaction gravitationnelle, formant un système isolé, décrivent des orbites circulaires dans leur référentiel barycentrique. On observe que les rayons des orbites sont le rapport $x = 4$, que la distance entre les deux étoiles est $D = 1.2 \times 10^{13}$ m, et que la période de révolution du système est $T = 342$ années. Déterminer la masse de chacune des deux étoiles.

► SOLUTION :

On peut considérer un mobile fictif de masse égale à la masse réduite μ du système, ayant un mouvement circulaire de rayon D et de période T. Si m est la masse de l'étoile la moins massive, on aura $\mu = 4\,m^2/(5\,m) = (4/5)\,m$. La trajectoire étant circulaire, la vitesse V du mobile fictif sera égale à $2\pi\,D/T$, et on aura

$$\frac{\mu\,V^2}{D} = \frac{4\,\mathcal{G}\,m^2}{D^2}.$$

On déduit donc

$$m = \frac{4\pi^2\,D^3}{5\,\mathcal{G}\,T^2} \simeq 1.75 \times 10^{30}\ \text{kg}\,.$$

Ainsi, l'étoile la plus massive aura une masse égale à $4\,m \simeq 7.01 \times 10^{30}$ kg.

■ EXERCICE 12 :

On considère un vaisseau spatial, de masse m, placé à une distance D d'une étoile de masse M et de rayon R. A un instant $t = 0$, le vaisseau coupe ses moteurs alors qu'il possède une vitesse nulle dans le référentiel $(\mathcal{R})$ de l'étoile supposé galiléen. Au bout de combien de temps le vaisseau va-t-il s'écraser sur la surface de l'étoile ?

► **SOLUTION** :

On a pour hypothèse $m \ll M$. La force de gravitation étant radiale et la vitesse initiale orthoradiale étant nulle, le vaisseau chute en direction du centre de l'étoile avec une vitesse radiale égale à $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)\,\vec{e}_r$, dans un système de coordonnées sphériques dont le centre est celui de l'étoile. On a donc $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t) < 0$. A $t = 0$, cette vitesse étant nulle, l'énergie mécanique du vaisseau est égale à son énergie potentielle gravitationnelle, soit $-\mathcal{G}\,M\,m/D$. Le champ étant conservatif, on a

$$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{\mathcal{G}\,M\,m}{r} = -\frac{\mathcal{G}\,M\,m}{D}\,,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2\,\mathcal{G}\,M\,\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{D}\right)}\,,$$

ou encore,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{D}{r} - 1}} = -\sqrt{\frac{2\,\mathcal{G}\,M}{D}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pour intégrer le membre de gauche de cette équation, on effectue le changement de variable $r/D = \sin^2\theta$, avec $\theta \in [0, \pi/2]$, ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{D}{r} - 1}} = \frac{2\,D\,\sin\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(1/\sin^2\theta) - 1}} = D\,(1 - \cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Le vaisseau s'écrasera lorsque $r = R$, donc lorsque $\theta = \arcsin(\sqrt{R/D}) = \theta_0$. En notant t_0, l'instant de l'impact, on peut écrire

$$\int_{\pi/2}^{\theta_0} D\,(1 - \cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{t_0} -\sqrt{\frac{2\,\mathcal{G}\,M}{D}}\,\mathrm{d}t\,,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\pi}{2} - \theta_0 + \frac{1}{2}\,\sin(2\,\theta_0) = \sqrt{\frac{2\,\mathcal{G}\,M}{D^3}}\,t_0\,,$$

ce qui permet d'obtenir,

$$t_0 = \sqrt{\frac{D^3}{2\,\mathcal{G}\,M}}\,\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sqrt{R/D}) + \frac{1}{2}\,\sin(2\,\arcsin(\sqrt{R/D}))\right)\,.$$

■ **EXERCICE 13** :

Dans un référentiel inertiel $(\mathcal{R})$, on considère un système isolé, formé de deux étoiles 1 et 2, de masses respectives $M_\odot$ et $2\,M_\odot$, en interaction gravitationnelle. A l'instant initial $t = 0$, l'étoile 1, repérée par le point A, est immobile en A_0. Au même instant, l'étoile 2, repérée par le point B, est en B_0 tel que $A_0B_0 = 3\,d$, et possède un vecteur vitesse $\vec{v}_0$, orthogonal à (A_0B_0), et de module $v_0 = \sqrt{\mathcal{G}\,M_\odot/d}$.

1 - Déterminer la position et la vitesse initiale du centre d'inertie G du système dans $(\mathcal{R})$. Quelle est la vitesse relative de l'étoile 2 par rapport à l'étoile 1 dans le référentiel barycentrique du système ? Et dans $(\mathcal{R})$?

2 - En introduisant la masse réduite μ du système formé par les deux étoiles, étudier le mouvement des deux étoiles dans le référentiel barycentrique. Quelle est la période de ce mouvement ?

► **SOLUTION** :

1 - Par définition, $\overrightarrow{GA_0} + 2\,\overrightarrow{GB_0} = \vec{0}$, donc la position initiale du barycentre G du système est telle que $\overrightarrow{A_0G} = (2/3)\,\overrightarrow{A_0B_0}$. Dans $(\mathcal{R})$, la vitesse initiale du barycentre G s'écrit

$$\vec{v}_G = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A_0G}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A_0B}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\,\vec{v}_0\,,$$

puisque l'étoile 1 est fixe dans $(\mathcal{R})$ à $t = 0$. Le système étant isolé, le référentiel barycentrique $(\mathcal{R}_G)$ est en mouvement de translation uniforme à la vitesse $\vec{v}_G$ dans $(\mathcal{R})$.
La vitesse relative de l'étoile 2 par rapport à l'étoile 1 est initialement égale à $\vec{v}_0$, dans tout référentiel.

2 - On montre (voir cours) que le mobile fictif, repéré par le point M, de masse réduite $\mu = 2M_\odot^2/(2M_\odot + M_\odot) = (2/3)\,M_\odot$, est tel que $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AB}$, et

$$\mu\,\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{GM}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathcal{G}\,(3\,M_\odot)\,\mu}{||\overrightarrow{GM}||^3}\,\overrightarrow{GM}\,,$$

avec

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GA} &= -\frac{2M_\odot}{3\,M_\odot}\,\overrightarrow{GM} = -\frac{2}{3}\,\overrightarrow{GM}\,,\\
\overrightarrow{GB} &= \frac{M_\odot}{3\,M_\odot}\,\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{GM}\,.
\end{aligned}$$

A l'instant $t = 0$, le mobile fictif M a la même vitesse que l'étoile 2 : son énergie mécanique, dans $(\mathcal{R}_G)$, s'écrit donc

$$E = \frac{1}{2}\,\mu\,v_0^2 - \frac{\mathcal{G}\,(3\,M_\odot)\,\mu}{d} = -\frac{1}{3}\,M_\odot\,v_0^2\,,$$

puisque $v_0 = \sqrt{\mathcal{G}\,M_\odot/d}$. Comme $E < 0$, sa trajectoire est circulaire ou elliptique. De plus, comme $\vec{v}_0 \perp \overrightarrow{A_0B_0}$, sa constante des aires est égale à $C = ||\overrightarrow{A_0B_0} \wedge \vec{v}_0|| = 3\,d\,v_0$, ce qui permet d'obtenir le paramètre p de la trajectoire qui est tel que

$$p = \frac{C^2}{3\,\mathcal{G}\,M_\odot} = \frac{d^2\,v_0^2}{3\,\mathcal{G}\,M_\odot}\,.$$

L'excentricité e est donnée par l'expression de l'énergie mécanique

$$E = \frac{3\,\mathcal{G}\,M_\odot\,\mu\,(e^2-1)}{2\,p} = -\frac{1}{3}\,M_\odot\,v_0^2\,,$$

ce qui conduit facilement à $e = 0$. L'orbite du mobile fictif est donc circulaire autour du centre d'inertie G. Ainsi, dans $(\mathcal{R}_G)$, l'étoile 1 a une orbite circulaire autour de G dont le rayon est égale à $3\,d$, et l'étoile 2 a une orbite circulaire autour de G dont le rayon est égale à d. La troisième loi de Képler, appliquée au mobile fictif, s'écrit

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{3\,\mathcal{G}\,M_\odot}{4\,\pi^2}\,,$$

avec $a = 3\,d$, et T la période de révolution autour de G pour M, qui est donc égale à celle des deux étoiles. On trouve

$$T = 6\,\pi\,\sqrt{\frac{d^3}{\mathcal{G}\,M_\odot}}\,.$$

■ EXERCICE 14 :

La propulsion d'une fusée, de masse à vide m_0, est assurée par l'éjection de gaz issus de la combustion du propergol. Ce gaz est accéléré dans une tuyère et sort de la fusée avec une vitesse $\vec{u}$, constante dans le référentiel de la fusée, avec un débit massique constant $q = -\frac{\mathrm{d}m'(t)}{\mathrm{d}t} > 0$, où $m'(t)$ est la masse de propergol à l'instant t dans le réservoir. On considère que la fusée est animé d'un mouvement vertical ascendant dans un champ gravitationnel $\vec{g}$ que l'on suppose uniforme.

1 - Déterminer la force de poussée, notée $\vec{\Pi}$, exercée par la réaction des gaz sur la fusée, en fonction de q et de $\vec{u}$. A quelle condition la fusée peut-elle décoller ?

2 - On suppose que la fusée décolle à $t = 0$ avec une masse m_0' de propergol. Au bout de combien de temps n'aura-t-elle plus de propergol ? Etablir et résoudre l'équation du mouvement de la fusée.

3 - Quelle est la vitesse maximale atteinte par la fusée ? A quelle altitude atteint-elle cette vitesse ? Calculer leurs valeurs numériques pour une fusée qui décolle depuis la surface de la Lune, où $g \simeq 1.62$ m·s^{-2}, et avec $m_0 = m_0' = 5\times10^3$ kg, $q = 85$ kg·s^{-1}, et $u = 5\times10^3$ m·s^{-1}. La fusée pourra-t-elle échapper à l'attraction lunaire ? On donne le rayon lunaire, $R_L = 1738$ km.

► SOLUTION :

1 - On se place dans un référentiel inertiel noté $(\mathcal{R})$, comme celui, par exemple, d'un observateur placé au sol. Considérons le système fermé (fusée+propergol), et faisons un bilan de la quantité de mouvement de ce système aux instants t et $t + \mathrm{d}t$:
A l'instant t, $\vec{p}(t) = (m_0 + m'(t))\,\vec{v}(t)$, avec $\vec{v}$, la vitesse de la fusée dans $(\mathcal{R})$.

A l'instant $t+\mathrm{d}t$, $\vec{p}(t+\mathrm{d}t) = [m_0 + m'(t+\mathrm{d}t)]\ \vec{v}(t+\mathrm{d}t) + q\,\mathrm{d}t\,\vec{u_0}$, avec $\vec{u_0}$, la vitesse d'éjection du gaz dans $(\mathcal{R})$. On aura donc $\vec{u_0} = \vec{u} + \vec{v}$.
On trouve donc

$$\vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = m_0\ [\vec{v}(t+\mathrm{d}t) - \vec{v}(t)] + m'(t+\mathrm{d}t)\,\vec{v}(t+\mathrm{d}t) - m'(t)\,\vec{v}(t) + q\,\mathrm{d}t\,\vec{u_0}\,,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m_0\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + m'(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t}\,\vec{v} + q\,\vec{u_0}\,,$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + q\,\vec{u}\,,$$

avec $m(t) = m_0 + m'(t)$. Enfin, la seule force qui s'exerce sur le système est son poids, ce qui se traduit par

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m(t)\,\vec{g} = m(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + q\,\vec{u}\,,$$

c'est-à-dire,

$$m(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m(t)\,\vec{g} - q\,\vec{u}\,.$$

La force de poussée est donc $\vec{\Pi} = -q\,\vec{u}$. La condition pour que la fusée décolle est que cette poussée soit d'une intensité supérieure à celle de son poids initial, ce qui se traduit par $q\,u > (m_0 + m_0')\,g$, avec $u = ||\vec{u}||$, et $g = ||\vec{g}||$.

2 - Par définition, $\mathrm{d}m'/\mathrm{d}t = -q$, ce qui implique $m'(t) = -q\,t + m_0'$. Tout le propergol sera consommé au bout du temps $t_0 = m_0'/q$.

Soit $z(t)$ l'altitude atteinte à l'instant t telle que $z(t=0) = 0$. D'après la question précédente, on a l'équation différentielle suivante,

$$m(t)\,\ddot{z}(t) = -m(t)\,g + q\,u\,,$$

ou encore, comme $m(t) = m'(t) + m_0$,

$$\ddot{z}(t) = -g + \frac{q\,u}{-q\,t + m_0' + m_0}\,,$$

qui est valable jusqu'à l'instant t_0. On intègre donc une première fois pour obtenir l'expression de la vitesse de la fusée,

$$\dot{z}(t) = -g\,t - u\int_0^t \frac{-q\,\mathrm{d}t'}{-q\,t' + m_0' + m_0} = -g\,t - u\,\ln\left(\frac{-q\,t + m_0' + m_0}{m_0' + m_0}\right)\,,$$

puis une seconde fois, pour obtenir l'équation de la trajectoire de la fusée

$$\begin{aligned}
z(t) &= -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + \frac{u\,(m_0' + m_0)}{q}\int_0^t \frac{-q}{m_0' + m_0}\,\ln\left(\frac{-q\,t' + m_0' + m_0}{m_0' + m_0}\right)\mathrm{d}t' \\
&= -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + \frac{u\,(m_0' + m_0)}{q}\left[\left(\frac{-q\,t + m_0' + m_0}{m_0' + m_0}\right)\ln\left(\frac{-q\,t + m_0' + m_0}{m_0' + m_0}\right) + \frac{q\,t}{m_0' + m_0}\right]\,, \\
&= -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + u\,t + \frac{u\,(-q\,t + m_0' + m_0)}{q}\,\ln\left(\frac{-q\,t + m_0' + m_0}{m_0' + m_0}\right)\,.
\end{aligned}$$

3 - D'après l'expression obtenue pour l'accélération, $\ddot{z}(t) \geq 0$ équivaut à $q\,g\,t \geq m_0'\,g - q\,u$, ce qui est toujours vrai, étant donnée la condition pour le décollage définie précédemment. La vitesse maximale sera donc atteinte en $t = t_0 = m_0'/q$, ce qui donne

$$v_{\max} = \dot{z}(t_0) = u\,\ln\left(1 + \frac{m_0'}{m_0}\right) - \frac{g\,m_0'}{q}\,.$$

L'altitude h correspondante est

$$h = z(t_0) = -\frac{g\,m_0'^2}{2\,q^2} + \frac{u}{q}\,\left[m_0' - m_0\,\ln\left(1 + \frac{m_0'}{m_0}\right)\right]\,.$$

Application numérique : $v_{\max} = 3.37$ km·s^{-1}, et $h \simeq 87.4$ km. La vitesse maximale a été obtenue en faisant l'hypothèse d'un champ gravitationnel uniforme et constant avec l'altitude. En réalité, ce champ décroît et vaut, d'après la loi de Newton,

$$g(z) = g\,\left(\frac{R_L}{(R_L + z)}\right)^2\,.$$

La vitesse $v_{\max}$ doit donc être, en réalité, supérieure au résultat précédent, si l'on tient compte de cette décroissance. Par ailleurs, la vitesse de libération à l'altitude z, notée $v_\ell(z)$, est donnée par l'équation

$$\frac{1}{2}\,v_\ell^2(z) - \frac{\mathcal{G}\,M_L}{R_L + z} = 0\,,$$

avec M_L, la masse de la Lune, et traduisant le fait que l'énergie mécanique doit être, au minimum, nulle pour que la fusée puisse partir à l'infini. On trouve facilement

$$v_\ell(z) = \sqrt{\frac{2\,\mathcal{G}\,M_L}{R_L + z}} = \sqrt{\frac{2\,g\,R_L^2}{R_L + z}}\,,$$

ce qui donne, à l'altitude h, $v_\ell(h) \simeq 2.31$ km·s^{-1}, ce qui est inférieur à $v_{\max}$. La fusée s'échappera donc de la Lune.

■ EXERCICE 15 :

On considère une particule de masse m en mouvement dans un potentiel central quelconque $V(r)$, avec r, la distance entre la particule et l'origine O du potentiel.

1 - Montrer que le moment cinétique, $\vec{L}$, de la particule est constant et que sa trajectoire est plane.

2 - Montrer que l'énergie de la particule peut se mettre sous la forme

$$E = \frac{m\,\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r)\,,$$

avec $V_{\text{eff}}(r)$, un potentiel effectif que l'on exprimera en fonction de L, la valeur algébrique de $\vec{L}$, et de $V(r)$.

3 - On suppose que la particule a une trajectoire bornée avec $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$. On définit l'angle apsidal $\delta\theta$, comme l'angle dont tourne le rayon vecteur $\vec{r}$ de la particule lorsque celle-ci occupe deux positions successives en $r = r_{\min}$. Exprimer $\delta\theta$ en fonction de E, L et V_{eff}. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\delta\theta$ pour que la trajectoire soit fermée.

4 - On considère que l'énergie de la particule est proche du minimum du potentiel effectif, noté V_0, qui est atteint pour $r_0 = r_{\min} = r_{\max}$. Montrer que l'angle apsidal est tel que

$$\delta\theta \simeq 2\pi \sqrt{\frac{V'(r_0)}{3\,V'(r_0) + r_0\,V''(r_0)}}\,.$$

En déduire la forme des potentiels pour lesquels l'angle apsidal ne dépend pas de la distance r_0.

► **SOLUTION** :

1 - La particule est soumise à une force conservative qui s'écrit

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\,V(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\,\frac{\vec{r}}{r}\,,$$

avec $\vec{r}$, le rayon vecteur de la particule. Le moment de cette force par rapport à O est donc nul. D'après le théorème du moment cinétique, on a

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right)_O = \vec{F} \wedge \vec{r} = \vec{0}\,.$$

Autrement dit, le moment cinétique $\vec{L}$ est un vecteur constant. Comme $\vec{L} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la particule, les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$ restent dans le plan orthogonal à $\vec{L}$. La trajectoire est donc contenue dans ce plan. Enfin, comme $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$, on peut définir $L = m\,r^2\,\dot{\theta}$.

2 - L'énergie de la particule s'écrit comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. C'est une grandeur qui se conserve. On a donc

$$E = \frac{1}{2}\,m\,(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) + V(r)\,,$$

c'est-à-dire, en introduisant L,

$$E = \frac{m\,\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) = \frac{m\,\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r)\,,$$

avec

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\,m\,r^2}\,.$$

3 - D'après les résultats précédents,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \frac{L^2}{m\,r^2}\,, \\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \pm\sqrt{\frac{2}{m}\,(E - V_{\text{eff}}(r))}\,, \end{aligned}$$

ce qui implique, en éliminant le temps,

$$\mathrm{d}\theta = \pm \frac{L\,\mathrm{d}r}{r^2\,\sqrt{2\,m\,(E - V_{\text{eff}}(r))}}\,.$$

L'angle apsidal $\delta\theta$ s'écrit donc

$$\delta\theta = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L\,\mathrm{d}r}{r^2\,\sqrt{2\,m\,(E - V_{\text{eff}}(r))}} + \int_{r_{\max}}^{r_{\min}} -\frac{L\,\mathrm{d}r}{r^2\,\sqrt{2\,m\,(E - V_{\text{eff}}(r))}}\,,$$

ou encore,

$$\delta\theta = 2\,\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L\,\mathrm{d}r}{r^2\,\sqrt{2\,m\,(E - V_{\text{eff}}(r))}}\,.$$

Pour que la trajectoire soit fermée, il faut qu'après q révolutions, le rayon vecteur $\vec{r}$ reprenne sa position : autrement dit, il faut que les axes de l'ellipse effectuent une rotation d'angle $2\,k\,\pi$, et $q\,\delta\theta = 2\,k\,\pi$. La condition est donc que l'angle apsidal soit une fraction rationnelle de π :

$$\delta\theta = \frac{p}{q}\,2\,\pi\,,$$

avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

4 - En $r = r_0$, la dérivée première du potentiel effectif étant nulle, un développement limité donne

$$V_{\text{eff}}(r) = V_0 + \frac{(r - r_0)^2}{2}\,V''_{\text{eff}}(r_0) + o((r - r_0)^2)\,.$$

En remplaçant cette expression dans l'intégrale donnant l'angle apsidal, et avec $r \simeq r_0$, on obtient

$$\delta\theta \simeq 2\,\frac{L}{\sqrt{2\,m}\,r_0^2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{E - V_0 - \frac{(r-r_0)^2}{2}\,V''_{\text{eff}}(r_0)}}\,,$$

c'est-à-dire,

$$\delta\theta \simeq \frac{2\,L}{\sqrt{m\,V''_{\text{eff}}(r_0)}\,r_0^2} \left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{V''_{\text{eff}}(r_0)}{2\,(E - V_0)}}\,(r - r_0)\right)\right]_{r_{\min}}^{r_{\max}}\,.$$

Comme le terme $m\,\dot{r}^2/2$, dans l'équation de E, s'annule en $r_{\max}$ (et en $r_{\min}$), on a

$$E = V_{\text{eff}}(r_{\max}) = V_0 + \frac{(r_{\max} - r_0)^2}{2}\,V''_{\text{eff}}(r_0) + o((r_{\max} - r_0)^2)\,,$$

et, comme E est proche de V_0, $E - V_0 \simeq \frac{(r_{\max}-r_0)^2}{2}\,V''_{\text{eff}}(r_0)$. Puisque $r_0 \simeq r_{\max} \simeq r_{\min}$, l'expression de $\delta\theta$ devient

$$\delta\theta \simeq \frac{2\,L}{\sqrt{m\,V''_{\text{eff}}(r_0)}\,r_0^2}\,[\arcsin(1) - \arcsin(-1)] = \frac{2\pi\,L}{\sqrt{m\,V''_{\text{eff}}(r_0)}\,r_0^2}\,.$$

Enfin, il ne reste plus qu'à exprimer les dérivées successives de V_{eff}, en r_0, en fonction de celles de V :

$$\begin{aligned} V'_{\text{eff}}(r_0) &= V'(r_0) - \frac{L^2}{m\,r_0^3} = 0\,, \\ V''_{\text{eff}}(r_0) &= V''(r_0) + \frac{3\,L^2}{m\,r_0^4}\,, \end{aligned}$$

ce qui implique : $L = \sqrt{m\, r_0^3\, V'(r_0)}$, et, en remplaçant dans l'expression de $\delta\theta$,

$$\delta\theta \simeq 2\pi \sqrt{\frac{V'(r_0)}{3\, V'(r_0) + r_0\, V''(r_0)}} \,.$$

L'angle apsidal ne dépendra pas de la distance r si et seulement si, quel que soit le potentiel V, celui-ci vérifie l'équation

$$\sqrt{\frac{V'(r_0)}{3\, V'(r_0) + r_0\, V''(r_0)}} = C \,,$$

avec C, une constante positive. Comme r_0 peut être quelconque, cette équation équivaut donc à

$$\frac{V''(r)}{V'(r)} = \frac{1 - 3\, C}{C}\, \frac{1}{r} \,,$$

c'est-à-dire,

$$V'(r) = A\, r^{((1-3\,C)/C} \,,$$

avec A, une constante. On peut alors distinguer deux cas :

(a) Si $((1 - 3\, C)/C = -1$, on obtient $V(r) = A\, \ln r$. Comme $\delta\theta/2\pi$ doit être un rationnel, l'expression de $\delta\theta$ avec un potentiel logarithmique donne $1/\sqrt{2} = p/q$, avec p et q deux entiers, ce qui est impossible ($\sqrt{2}$ étant irrationnel).

(b) Si $((1 - 3\, C)/C \neq -1$, on obtient $V(r) = A\, r^{\alpha}$, avec A, une cosntante, $\alpha = ((1 - 2\, C)/C > -2$ et $\alpha \neq 0$. La même condition sur la rationalité de $\delta\theta/2\pi$ donne $\alpha = (p/q)^2 - 2$, avec p et q deux entiers. Il faut donc que la puissance du potentiel, α, soit rationnelle.

2 Thermodynamique & rayonnement

■ **EXERCICE 1** :

Le Soleil est supposé se comporter comme un corps noir de température $T_\odot = 5750$ K, et rayonner de façon isotrope. Données numériques : on notera, $R_\odot = 6.96 \times 10^5$ km, le rayon du Soleil, $R_T = 6.38 \times 10^3$ km, le rayon terrestre, et $D = 1.5 \times 10^8$ km, la distance moyenne Terre-Soleil.

1 - Déterminer la puissance totale, $\mathcal{P}_\odot$, rayonnée par le Soleil, ainsi que celle reçue par la Terre et notée P_T.

2 - Exprimer la densité volumique d'énergie, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\tau$, issue du Soleil et reçue au niveau de l'orbite terrestre. Déduire la puissance reçue au niveau de l'orbite terrestre par unité de surface et notée $\mathrm{d}\mathcal{P}/\mathrm{d}S$: on supposera qu'un vecteur normal à cette surface fait un angle θ avec les rayons solaires.

3 - Calculer la température d'équilibre, T_{eq}, de la Terre si l'on suppose que cette dernière se comporte comme un corps noir et qu'elle réfléchit une fraction α, appelée albédo, de la puissance reçue du Soleil. Application numérique avec $\alpha = 1/3$.

► **SOLUTION** :

1 - La loi de Stéfan permet de relier la puissance totale rayonnée par unité de surface d'un corps noir et sa température. Dans notre situation, elle s'écrit

$$\frac{\mathcal{P}_\odot}{4\pi\, R_\odot^2} = \sigma\, T_\odot^4\,,$$

c'est-à-dire,

$$\mathcal{P}_\odot = 4\pi\, R_\odot^2\, \sigma\, T_\odot^4 \simeq 3.8 \times 10^{26}\,\mathrm{W}\,.$$

Depuis le centre du Soleil, la Terre est vu sous un angle solide Ω égal à $\pi\, R_T^2/D^2$. La puissance $\mathcal{P}_\odot$ étant rayonnée de façon isotrope dans un angle solide de 4π, la Terre ne reçoit qu'une fraction $\Omega/4\pi$ de cette puissance, donc

$$\mathcal{P}_T = \frac{\Omega}{4\pi}\,\mathcal{P}_\odot \simeq 1.72 \times 10^{17}\,\mathrm{W}\,.$$

2 - L'énergie rayonnée se propage à la vitesse de la lumière dans le vide. Entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, cette énergie est égale à $\mathcal{P}_\odot\,\mathrm{d}t$ et reste localisée dans un volume $\mathrm{d}\tau$ compris entre les sphères de rayon r et $r + \mathrm{d}r$, avec $r = c\,t$ et $\mathrm{d}r = c\,\mathrm{d}t$. On a donc $\mathrm{d}\tau = 4\pi\, r^2\, c\,\mathrm{d}t$, et

$$\frac{\mathrm{d}E(r)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathcal{P}_\odot\,\mathrm{d}t}{4\pi\, r^2\, c\,\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{P}_\odot}{4\pi\, r^2\, c}\,,$$

ce qui peut s'écrire, avec $r \simeq D$,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\sigma\, T_\odot^4}{c}\left(\frac{R_\odot}{D}\right)^2\,.$$

La puissance reçue par une unité de surface normale aux rayons solaires, au niveau de la Terre, est simplement $\mathrm{d}\mathcal{P}(\theta=0)/\mathrm{d}S = \mathrm{d}E/(4\pi\, D^2\,\mathrm{d}t)$, avec $\mathrm{d}E = \mathcal{P}_\odot\,\mathrm{d}t$, donc

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}(\theta=0)}{\mathrm{d}S} = \sigma\, T_\odot^4 \left(\frac{R_\odot}{D}\right)^2 .$$

Si le vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$ d'une surface S fait un angle θ avec les rayons solaires, alors la surface interceptée par ces rayons, S', est telle que

$$S' = \iint_{(S)} \vec{n}\,\mathrm{d}\vec{S} = S\,\cos\theta\,,$$

avec $\vec{n}$, un vecteur unitaire de même direction que les rayons solaires. On en déduit,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}(\theta)}{\mathrm{d}S} = \sigma\, T_\odot^4\,\cos\theta \left(\frac{R_\odot}{D}\right)^2 .$$

3 - La Terre est supposée être un corps noir qui ne rayonne qu'une fraction α de la puissance reçue. Cela se traduit par un équilibre thermique tel que

$$4\pi\,\sigma\,R_T^2\,T_{eq}^4 = (1-\alpha)\,\pi\,\sigma\,T_\odot^4\,\frac{R_T^2\,R_\odot^2}{D^2}\,,$$

c'est-à-dire,

$$T_{eq} = T_\odot\,\sqrt{\frac{R_\odot}{2D}}\,(1-\alpha)^{1/4} \simeq 250\ \mathrm{K}.$$

■ **EXERCICE 2** :

La puissance du rayonnement solaire reçue par unité de surface normale aux rayons solaires, au sommet de l'atmosphère terrestre, est $\Phi_0 = 1360\ \mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. L'atmosphère, dont on négligera l'épaisseur devant le rayon terrestre, est telle que le système Terre-atmosphère réfléchit une fraction α de la puissance solaire reçue. Données numériques : on notera, $R_\odot = 6.96\times10^5$ km, le rayon du Soleil, $R_T = 6.38\times10^3$ km, le rayon terrestre, et $D = 1.5\times10^8$ km, la distance moyenne Terre-Soleil.

1 - En supposant que le Soleil se comporte comme un corps noir, déterminer sa température $T_\odot$. Si le système Terre-atmosphère se comporte également comme un corps noir, quelle est la température planétaire moyenne T_P ?

2 - On se propose de faire un bilan des différentes puissances reçues. Pour cela, on fait les trois hypothèses suivantes :
(a) La Terre et l'atmosphère rayonnent comme des corps noirs.
(b) Il y a un équilibre thermique entre la Terre et son atmosphère.
(c) La Terre absorbent une fraction $\beta \simeq 0.7$, du rayonnement solaire, alors que l'atmosphère absorbe une fraction $1-\beta$, de ce même rayonnement.

Déterminer les températures moyennes T_0 du sol, et T_A de l'atmosphère en fonction de la température planétaire T_P et de β ?

► **SOLUTION** :

1 - Le Soleil étant assimilé à un corps noir, la puissance totale qu'il rayonne est

$$\mathcal{P}_\odot = \sigma\, T_\odot^2\, 4\pi\, R_\odot^2\,,$$

et comme $\Phi_0 = \mathcal{P}_\odot/4\pi\, D^2$, on déduit

$$T_\odot = \left[\frac{\Phi_0}{\sigma}\left(\frac{D}{R_\odot}\right)^2\right]^{1/4} \simeq 5767 \text{ K}\,.$$

Le système Terre-atmosphère étant assimilé à un corps noir, il émet toute la puissance qu'il absorbe. Cet équilibre se traduit par

$$(1-\alpha)\,\Phi_0\,\pi\, R_T^2 = \sigma\, T_P^2\, 4\pi\, R_T^2\,,$$

c'est-à-dire,

$$T_P = \left[\frac{(1-\alpha)\,\Phi_0}{4\sigma}\right]^{1/4} \simeq 250 \text{ K}.$$

2 - L'atmosphère reçoit une fraction $(1-\beta)$ de la puissance solaire reçue par le système Terre-atmosphère qui vaut, d'après la question précédente, $(1-\alpha)\,\Phi_0\,\pi\, R_T^2$. Elle reçoit également une puissance $\sigma\, T_0^4\, 4\pi\, R_T^2$ de la part du sol terrestre. Enfin, elle émet vers le sol et vers l'espace, la puissance $2\,\sigma\, T_A^4\, 4\pi\, R_T^2$. L'équilibre thermique de l'atmosphère s'écrit

$$(1-\beta)\,(1-\alpha)\,\Phi_0 = 4\sigma\,\left(2\, T_A^4 - T_0^4\right)\,.$$

Le sol terrestre reçoit une fraction β de la puissance solaire reçue par le système Terre-atmosphère, ainsi qu'une puissance $\sigma\, T_A^4\, 4\pi\, R_T^2$. Enfin, il émet une puissance $\sigma\, T_0^4\, 4\pi\, R_T^2$ vers l'atmosphère. L'équilibre thermique du sol s'écrit

$$\beta\,(1-\alpha)\,\Phi_0 = 4\sigma\,\left(2\, T_0^4 - T_A^4\right)\,.$$

On déduit facilement,

$$\begin{aligned} T_A &= \left[\frac{(1-\alpha)\,\Phi_0}{4\sigma}\right]^{1/4} = T_P \simeq 250 \text{ K}, \\ T_0 &= (1+\beta)^{1/4}\, T_P \simeq 286 \text{ K}. \end{aligned}$$

■ **EXERCICE 3** :

Le Soleil est supposé se comporter comme un corps noir et rayonner de façon isotrope. Le maximum de son spectre d'émission est atteint pour une longueur d'onde $\lambda_m = 5060$ Å. Données numériques : on notera, $C = 2.9 \times 10^{-3}$ m·K, la constante de la loi de Wien.

1 - En utilisant la loi de Wien, déterminer la température $T_\odot$ du Soleil. En déduire la luminosité du Soleil, c'est-à-dire sa puissance totale rayonnée.

2 - On suppose que le rayonnement solaire provient d'une réaction de fusion en son cœur, constituée d'un cycle de réaction conduisant à la formation d'un noyau d'hélium à partir de quatre noyaux d'hydrogène (ou protons). Cette réaction de fusion nécessite des températures supérieures à 10^8 K. On notera ξ, le rapport entre la masse d'un noyau d'hélium et celle d'un proton : $\xi \simeq 3.9726$.

(a) Exprimer la perte de masse par seconde provoquée par le processus de fusion. En déduire la durée de vie théorique du Soleil, en supposant que toute sa masse est initialement de l'hydrogène et participe à la réaction de fusion. On donne $M_\odot \simeq 1.99 \times 10^{30}$ kg.

(b) Calculer la masse d'hélium qui est produite chaque seconde.

3 - Un astéroïde sphérique de rayon r, assimilé à un corps noir, est en orbite circulaire autour du Soleil. Il voit le Soleil sous un angle α égal à 10^{-3} rad. On donne le rayon du Soleil, $R_\odot \simeq 6.95 \times 10^5$ km.

(a) Quelle est le rayon de l'orbite de l'astéroïde ? Quelle est la puissance totale reçue par l'astéroïde ? En déduire la température d'équilibre T_e de l'astéroïde.

(b) Cet astéroïde traverse un nuage de poussière opaque, occultant totalement la lumière du Soleil pendant une durée $t = 1$ h. Calculer la température de l'astéroïde lorsqu'il ressort du nuage. On négligera les interactions entre le nuage de poussière et l'astéroïde durant la traversée. On donne $m = 10^4$ kg, la masse de l'astéroïde, $r = 3$ m, son rayon, et $C = 750$ J·kg^{-1}·K^{-1}, sa chaleur massique.

► **SOLUTION** :

1 - D'après la loi de Wien, $\lambda_m T_\odot = C$, donc $T_\odot = C/\lambda_m \simeq 5730$ K. En utilisant la loi de Stefan, on déduit que la luminosité du Soleil, $L_\odot$, est telle que

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \, \sigma T_\odot^4 \simeq 3.78 \times 10^{26} \text{ W}.$$

2 - (a) Chaque seconde, une perte de masse Δm est associée à la réaction de fusion. Par hypothèse, la puissance produite par le processus de fusion, notée $\Delta m \, c^2/\Delta t$, est égale à la puissance totale rayonnée, $L_\odot$. On trouve donc

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{L_\odot}{c^2} = 4.2 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \, .$$

On déduit la durée de vie du Soleil qui est égale à $M_\odot \, \Delta t/\Delta m$ soit 4.7×10^{20} s.

(b) L'équation bilan de la réaction de fusion s'écrit

$$4\,\mathrm{H}^+ \rightarrow \mathrm{He}^{2+} + 2\,\mathrm{e}^+ + \gamma \, .$$

En négligeant la masse des positrons, la masse d'hydrogène qui disparaît, Δm_{H}, est égale à la masse d'hélium qui est créé, Δm_{He}, plus la masse Δm qui a disparu dans la réaction. De plus, il se forme un noyau d'hélium pour quatre noyaux d'hydrogène. Cela se traduit par les relations

$$\begin{aligned} \Delta m_{\mathrm{H}} &= \Delta m_{\mathrm{He}} + \Delta m \,, \\ \frac{\Delta m_{\mathrm{H}}}{4\, m_{\mathrm{H}}} &= \frac{\Delta m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}}} \,, \end{aligned}$$

avec m_{H}, la masse d'un noyau d'hydrogène, et m_{He}, la masse d'un noyau d'hélium. Comme on connaît $\xi = m_{\mathrm{He}}/m_{\mathrm{H}}$, on déduit facilement

$$\frac{\Delta m_{\mathrm{He}}}{\Delta t} = \frac{\xi\, L_\odot}{(4-\xi)\, c^2} \simeq 6.1 \times 10^{11} \ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1} \,.$$

3 - (a) Le rayon R_A de l'orbite de l'astéroïde est telle que

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R_\odot}{R_A} \,,$$

c'est-à-dire, comme $R_A \gg R_\odot$,

$$R_A = \frac{2\, R_\odot}{\alpha} \simeq 1.39 \times 10^9 \ \mathrm{km} \,.$$

Depuis le centre du Soleil, l'astéroïde est vu sous un angle solide Ω égal à $\pi\, r^2/R_A^2$. La puissance $\mathcal{P}_\odot$ étant rayonnée de façon isotrope dans un angle solide de 4π, l'astéroïde ne reçoit qu'une fraction $\Omega/4\pi$ de cette puissance, soit

$$\mathcal{P}_A = \frac{\Omega}{4\pi}\, \mathcal{P}_\odot = \frac{1}{4}\, \pi\, \sigma\, r^2\, \alpha^2\, T_\odot^4 \,.$$

L'astéroïde étant assimilé à un corps noir sphérique de rayon r, il rayonne la puissance $4\pi\, r^2\, \sigma\, T_e^4$. A l'équilibre, cette puissance étant égale à la puissance reçue $\mathcal{P}_A$, on obtient

$$T_e = \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\, T_\odot \simeq 91 \ \mathrm{K} \,.$$

(b) Durant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$, l'énergie cédée par l'astéroïde s'écrit $-m\, C\, \mathrm{d}T$, avec $\mathrm{d}T < 0$, la variation de température. Elle est égale à l'énergie rayonnée durant $\mathrm{d}t$, c'est-à-dire $\sigma\, T^4\, 4\pi\, r^2\, \mathrm{d}t$. On a donc

$$\frac{\mathrm{d}T}{T^4} = -\frac{4\pi\, \sigma\, r^2}{m\, C}\, \mathrm{d}t \,,$$

ce qui donne, après intégration,

$$\left(\frac{1}{T_A}\right)^3 = \left(\frac{1}{T_e}\right)^3 + \frac{12\pi\, \sigma\, r^2}{m\, C}\, t \,,$$

avec T_A, la température de l'astéroïde à la sortie du nuage. Application numérique : $T_A \simeq 86.5$ K.

■ EXERCICE 4 :

La *magnitude apparente* m d'une étoile, à la longueur d'onde λ, est une grandeur relative définie par

$$m = -2.5 \, \log \frac{F}{F_0} \,,$$

avec F le flux reçu, à la longueur d'onde λ et exprimé en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$, et F_0 un flux de référence. On définit alors la *magnitude absolue* M de cette même étoile, à la longueur d'onde λ, comme la magnitude apparente qu'elle aurait si elle était située à une distance de 10 parsec.

1 - L'étoile Sirius a une magnitude absolue $M = +1.41$, et une magnitude apparente $m = -1.45$. Déterminer la distance, en parsec, de Sirius.

2 - On considère une étoile double composée de deux étoiles de magnitudes apparentes m_1 et m_2. On note m_{12}, la magnitude apparente mesurée lorsqu'on prend en compte les flux F_1 et F_2 des deux étoiles à la fois, et α, le rapport F_1/F_2. Montrer que

$$m_1 = m_{12} + 2.5 \, \log \frac{1+\alpha}{\alpha} \,.$$

► SOLUTION :

1 - Le flux reçu, F, est tel que

$$F = \frac{L}{4\pi \, D^2} \,,$$

avec L, la luminosité de Sirius, et D, sa distance. On a donc

$$m = -2.5 \, \log F + 2.5 \, \log F_0 = -1.45 \,,$$
$$M = -2.5 \, \log F(10\,\mathrm{pc}) + 2.5 \, \log \mathrm{F}_0 = 1.41 \,,$$

ce qui implique,

$$M - m = 2.5 \, \log \left[\frac{F}{F(10\,\mathrm{pc})}\right] = 5 \, \log \left[\frac{10\,\mathrm{pc}}{D}\right] \,,$$

ou encore,

$$D = 10^{\frac{m-M+5}{5}} \simeq 3.0 \, \mathrm{pc} \,.$$

2 - On définit la magnitude apparente globale par

$$m_{12} = -2.5 \, \log \left[\frac{F_1 + F_2}{F_0}\right] \,.$$

Comme $\alpha = F_1/F_2$, on obtient

$$m_{12} = -2.5 \, \log \left[\frac{F_1\,(1+1/\alpha)}{F_0}\right] = -2.5 \log \frac{F_1}{F_0} - 2.5 \log \frac{1+\alpha}{\alpha} \,,$$

c'est-à-dire,

$$m_1 = m_{12} + 2.5\ \log \frac{1+\alpha}{\alpha}\ .$$

■ **EXERCICE 5** :

On décrit l'atmosphère terrestre comme étant la superposition de plusieurs couches de gaz (l'air) dans lesquelles les conditions de température et de pression varient de façon différente. Dans un modèle simple et statique d'atmosphère, c'est-à-dire dans lequel on néglige tout mouvement, vertical ou horizontal, du gaz qui la constitue, on s'intéresse aux deux couches les plus basses que sont la *troposphère* et la *stratosphère*. Dans ces deux couches, le gaz sera considéré comme parfait et constitué de molécules, supposées identiques, de masse m, et de masse molaire $M = 29$ g·mol^{-1}.

A - La stratosphère isotherme

La stratosphère est une région de l'atmosphère terrestre située approximativement entre l'altitude $z_1 = 11$ km et l'altitude $z_2 = 40$ km. On suppose qu'elle est constituée d'un gaz parfait, en équilibre hydrostatique et isotherme de température $T = 217$ K. Le champ de pesanteur sera supposé uniforme et d'intensité $g = 9.76$ m·s^{-2}.

A-1 - Déterminer la pression P, dans la stratosphère, en fonction de l'altitude z et de la pression en $z = z_1$.

A-2 - On suppose que le nombre N, de molécules de la stratosphère qui possèdent une énergie potentielle E_p, obéit à une loi de Boltzmann du type :

$$N = N_0\ \exp\left(-\frac{E_p}{k\,T}\right)\ ,$$

avec k, la constante de Boltzmann. Exprimer la concentration moléculaire, n, du gaz à l'altitude z, en fonction de la pression en z_1. En déduire, à nouveau, la pression P.

B - La troposphère non-isotherme

La troposphère est la région de l'atmosphère terrestre dont l'altitude est inférieure à 11 km. On suppose qu'elle est constituée d'un gaz parfait, en équilibre hydrostatique, mais dont la température varie en fonction de l'altitude z, selon différentes lois :
- Si $0 < z < z_1$ =2 km, alors $T(z) = T_0/(1 + a\,z)$.
- Si $z_1 < z < z_2 = 9$ km, alors $T(z) = T_1\,(1 - b\,z)$.
- Si $z_2 < z < z_3 = 11$ km, alors $T(z) = T_2\,\sqrt{1 - c\,z}$.

Les constantes T_0, T_1, T_2, a, b, et c sont positives. Enfin, le champ de pesanteur sera supposé uniforme et d'intensité $g = 9.80$ m·s^{-2}.

B-1 - La pression P étant supposée varier de façon continue dans la troposphère, déterminer $P(z)$ en fonction de $P(0)$ et de $P(z_2)$.

B-2 - On suppose que T_0 =290 K et que $T_2 = 305$ K. De plus, on admet que la température décroît de 1 K lorsque z varie de 140 m au voisinage du sol, et de 1 K lorsque z varie de 125 m vers l'altitude $z = 5$ km. Enfin, on prendra $P(z_2) = 0.28$ atm, et $P(z_3) = 0.20$ atm. Déterminer les constantes T_1, a, b, et c. En déduire les pressions et les températures aux altitudes z =1 km, 6 km et 11 km.

► **SOLUTION** :

A-1 - Les grandeurs ne dépendant que l'altitude z, la relation locale de l'équilibre hydrostatique s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\mu(z)\,g\,,$$

avec $\mu(z)$, la masse volumique de l'air, qui est telle que

$$\mu(z) = \frac{M}{V} = \frac{M}{R\,T}\,P(z)\,,$$

dans l'hypothèse d'un gaz parfait, avec $R = 8.31$ J·K^{-1}·mol^{-1}. On déduit donc

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M\,g}{R\,T}\,\mathrm{d}z\,,$$

ce qui s'intègre facilement pour donner

$$P(z) = P(z_1)\,\exp\left[-\frac{M\,g}{R\,T}\,(z-z_1)\right]\,.$$

A-2 - L'énergie potentielle est gravitationnelle : pour une molécule à l'altitude z, elle est égale à $m\,g\,z$, en posant qu'elle est nulle pour toutes les molécules qui sont au niveau du sol ($z = 0$). On peut donc écrire, pour $z \in [z_1, z_2]$,

$$N(z) = N(z_1)\,\exp\left[-\frac{m\,g}{k\,T}\,(z-z_1)\right]\,.$$

Par ailleurs, $k = R\,m/M$, et la concentration moléculaire est égale à N/V, donc

$$n(z) = n(z_1)\,\exp\left[-\frac{m\,g}{k\,T}\,(z-z_1)\right]\,.$$

Comme $n(z_1) = P(z_1)/(k\,T)$, on trouve

$$n(z) = \frac{P(z_1)}{k\,T}\,\exp\left[-\frac{m\,g}{k\,T}\,(z-z_1)\right]\,,$$

et l'on obtient, à nouveau,

$$P(z) = P(z_1)\,\exp\left[-\frac{m\,g}{k\,T}\,(z-z_1)\right]\,.$$

B-1 - Comme précédemment, l'équilibre hydrostatique se traduit par

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M\,g}{R\,T}\,\mathrm{d}z\,,$$

mais ici, la température dépend de l'altitude z.

- Pour $0 \leq z \leq z_1$, on a

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M\,g}{R\,T_0}\,(1 + a\,z)\,\mathrm{d}z\,,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$P(z) = P(0)\,\exp\left[-\frac{M\,g\,z}{R\,T}\,\left(1 + \frac{a}{2}\,z\right)\right]\,.$$

- Pour $z_1 \leq z \leq z_2$, on a

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M\,g}{R\,T_1}\,\frac{\mathrm{d}z}{1 - b\,z}\,,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$P(z) = P(0)\,\left(\frac{1 - b\,z}{1 - b\,z_1}\right)^{\frac{M\,g}{b\,R\,T_1}}\,\exp\left[-\frac{M\,g\,z_1}{R\,T}\,\left(1 + \frac{a}{2}\,z_1\right)\right]\,.$$

- Pour $z_2 \leq z \leq z_3$, on a

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M\,g}{R\,T_2}\,(1 - c\,z)^{-1/2}\,\mathrm{d}z\,,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$P(z) = P(z_2)\,\exp\left[-\frac{2\,M\,g}{R\,T_2\,c}\,\left(\sqrt{1 - c\,z_2} - \sqrt{1 - c\,z}\right)\right]\,.$$

B-2 - Le gradient de température au voisinage du sol est tel que

$$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right)_{z \simeq 0} = -a\,T_0 = -\frac{1}{140}\ \mathrm{K}\cdot\mathrm{m}^{-1}\,,$$

ce qui implique $a \simeq 2.46 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^{-1}$.
Autour de $z = 5$ km, le gradient de température s'écrit

$$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right)_{z \simeq 5\,\mathrm{km}} = -b\,T_1 = -\frac{1}{125}\ \mathrm{K}\cdot\mathrm{m}^{-1}\,,$$

et l'expression de la pression pour $z \in [z_1, z_2]$, calculée en $z = z_2$, donne facilement $b = 2.89 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^{-1}$, donc $T_1 \simeq 277$ K.
Enfin, l'expression de la pression pour $z \in [z_2, z_3]$, calculée en $z = z_3$, donne

$$\frac{\sqrt{1 - c\,z_2} - \sqrt{1 - c\,z_3}}{c} = \frac{R\,T_2}{2\,M\,g}\,\ln\left(\frac{P(z_2)}{P(z_3)}\right) = 1500\,,$$

c'est-à-dire, $c \simeq 5.54 \times 10^{-5}$.

Conclusion :

Altitude	1 km	6 km	11 km
Pression (en atm)	0.887	0.449	0.238
Température (en K)	283	229	190