Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques - Exemples

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. Une fonction f définie au voisinage d'un point z_0 de Ω est dite *développable en série entière en* z_0 (on notera DSE_{z_0}) lorsqu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et un voisinage V de z_0 tels que, pour tout $z \in V$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n$.

Théorème 2 - Soit f une fonction DSE_{z_0}. Alors,
(1) il existe un voisinage de z_0 sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^\infty$,
(2) le développement en série entière de f en z_0 est son développement en série de Taylor en z_0.

Corollaire 3 - S'il existe, le développement en série entière de f en z_0 est unique, et les dérivées successives de f sont également développables en série entière.

Définition 4 - Une fonction f est dite *analytique sur* Ω lorsque, pour tout $z_0 \in \Omega$, f est DSE_{z_0}. On notera $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω.

Exemple 5 - Les fonctions polynomiales sont analytiques sur $\mathbb{C}$.

Proposition 6 - Si une série entière a un rayon de convergence $R > 0$, alors sa somme est analytique sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$.

Corollaire 7 - Les fonctions analytiques sur Ω, sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω. Leurs dérivées successives sont également analytiques.

2 Fonctions analytiques d'une variable réelle

On désignera par I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Proposition 8 - Soit $x_0 \in I$. Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est DSE_{x_0} si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que la suite de fonction $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $R_n(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$ converge simplement vers 0 sur $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$.

Remarque 9 - f est DSE_{x_0} si et seulement si $g : x \mapsto f(x+x_0)$ est DSE_0.

Exemple 10 - Développements en série entière en 0 de quelques fonctions usuelles :
– $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
– $\forall x \in]-1,1[, \forall a \in \mathbb{R}$, $(1+x)^a = 1 + a\,x + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a\,(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}\, x^n$.
– $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$, $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$.

Exemple 11 - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais n'est pas DSE_0.

Théorème 12 - [Théorème de Bernstein] Soient $a > 0$ et $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-a,a[$, $f^{(2k)}(x) \geqslant 0$, alors f est DSE_0 sur $]-a,a[$.

Proposition 13 - Si f est analytique sur I alors
(a) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et ses dérivées sont analytiques,
(b) toute primitive de f est analytique sur I,
(c) $1/f$ est analytique sur $I - \{x_0 \in I ; f(x_0) = 0\}$,
(d) si g est analytique sur I, $f + g$ et $f \cdot g$ sont analytiques sur I,
(e) si g est analytique sur $J \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Im}(f) \subset J$, $g \circ f$ est analytique sur I.

Exemple 14 - Les polynômes sont des fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$. Les fractions rationnelles P/Q sont des fonctions analytiques sur $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \,;\, Q(x) = 0\}$. La fonction arctan est analytique sur $\mathbb{R}$.

Exemple 15 - La fonction exponentielle est analytique sur $\mathbb{R}$.

Application 16 - Soient p et q deux fonctions analytiques sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ sont analytiques sur I.

Théorème 17 - Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est analytique si et seulement si, en tout point $x_0 \in I$, il existe un voisinage V de x_0 et $M, t \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que ; $\forall x \in V$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\left| \dfrac{1}{p!}\, f^{(p)}(x) \right| \leqslant M\, t^p$.

Théorème 18 - Soient f une fonction analytique sur I et $x_0 \in I$. Alors, il y a équivalence entre
(a) $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
(b) f est identiquement nulle au voisinage de x_0 ;
(c) f est identiquement nulle sur I.

Corollaire 19 - [Principe du prolongement analytique] Si f et g sont deux fonctions analytiques sur I et coïncident au voisinage d'un point de I, alors $f = g$ sur I.

Proposition 20 - Si f est une fonction analytique sur I et si elle n'est pas identiquement nulle, alors l'ensemble des zéros de f est un ensemble discret.

3 Fonctions analytiques d'une variable complexe

Définition 21 - Une fonction $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est *dérivable en* $z_0\in\Omega$ lorsque $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe. Dans un tel cas, on l'appelle *dérivée* de f en z_0 et on la note $f'(z_0)$.

Définition 22 - Lorsqu'une fonction $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est dérivable en tout $z_0\in\Omega$, elle est dite *holomorphe sur* Ω. On notera $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Exemple 23 - Les fonctions polynomiales sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. Les fractions rationnelles ne possédant aucun pôle dans Ω sont holomorphes sur Ω.

Proposition 24 - Toute fonction analytique sur Ω est holomorphe sur Ω.

Exemple 25 - Les fonctions $z\mapsto\mathcal{R}e(z)$ et $z\mapsto\bar{z}$ ne sont pas holomorphes donc elles ne sont pas analytiques.

Théorème 26 - Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $z_0\in\Omega$ et $f\in\mathcal{A}(\Omega)$. Il y a équivalence entre :
(a) f est identiquement nulle dans Ω.
(b) f est identiquement nulle dans un voisinage de z_0.
(c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(z_0)=0$.

Corollaire 27 - [Principe du prolongement analytique] Si f et g sont deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ qui coïncident au voisinage d'un point de Ω, alors $f=g$ sur Ω.

Corollaire 28 - Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. $(\mathcal{A}(\Omega),+,\times)$ est un anneau intègre.

Théorème 29 - Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si $f\in\mathcal{A}(\Omega)$ et f non identiquement nulle, alors l'ensemble des zéros de f est une partie discrète de $\mathbb{C}$.

Exemple 30 - Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant 0. Il n'existe pas de fonction $f\in\mathcal{A}(\Omega)$ telle que $f(1/n)=f(-1/n)=1/n$ pour $n\in\mathbb{N}^\star$ assez grand.

Corollaire 31 - Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f\in\mathcal{A}(\Omega)$, et $z_0\in\Omega$ un zéro de de f. Il existe un unique $k\in\mathbb{N}$ vérifiant les conditions suivantes équivalentes :
(a) On a $f^{(k)}(z_0)\neq 0$ et $f^{(p)}(z_0)=0$ si $p\in\{0,1,\ldots,k-1\}$.
(b) Le premier terme non nul du développement en série entière de f en z_0 est de la forme $a_k\,(z-z_0)^k$, avec $a_k\in\mathbb{C}^\star$.
(c) Il existe un voisinage V de z_0 dans Ω et $g\in\mathcal{A}(\Omega)$ tels que, pour tout $z\in V$, $f(z)=(z-z_0)^k\,g(z)$ et $g(z)\neq 0$.
On dit que k est l'*ordre de multiplicité* du zéro z_0 de f.

4 Analyticité et holomorphie

Définition 32 - Soient γ un chemin fermé de $[a,b]$ ($\subset \mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$, et $\Omega = \mathbb{C}\backslash\gamma^\star$ où $\gamma^\star$ est l'image de γ. L'*indice d'un point* $z \in \Omega$ pour le chemin γ est

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,\mathrm{d}t.$$

Ind_γ est à valeurs entières sur Ω, constante sur chacune des composantes connexes de Ω et nulles sur la composante connexe non bornée de Ω.

Théorème 33 - [Théorème de Cauchy] Soient Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, $p \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application continue telle que $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{p\})$. Alors, pour tout chemin fermé γ dans Ω, $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Théorème 34 - [Formule de Cauchy] Soient Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, γ un chemin fermé dans Ω, et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pour tout $z \in \Omega$ tel que $z \notin \gamma^\star$,

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Théorème 35 - Toute fonction holomorphe sur Ω est analytique sur Ω.

Corollaire 36 - Soit f une fonction holomorphe sur Ω. Alors f est DSE_{z_0} en tout $z_0 \in \Omega$, et sa série entière $\sum a_n\,(z-z_0)^n$, de rayon de convergence $R \geqslant d(z_0, \mathbb{C}\backslash\Omega)$, est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\,\pi}\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi,$$

avec $\mathcal{C}(z_0, r)$ le cercle orienté centré en z_0 et de rayon r tel que $0 < r < R$.

Corollaire 36bis -[Inégalités de Cauchy] Avec les mêmes hypothèses et notations que dans le corollaire 36, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \in]0, R[$,

$$\Big|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\Big| \leqslant \frac{\sup_{z\in\mathcal{C}(z_0,r)} |f(z)|}{r^n}.$$

Théorème 37 - [Théorème de Liouville] Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante.

Application 38 - [Théorème de d'Alembert-Gauss] Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ et non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Proposition 39 - [Propriété de la moyenne] Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur Ω. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) Pour tout disque fermé $D_f(z_0, r) \subset \Omega$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,e^{it})\,\mathrm{d}t.$$

(b) Pour tout disque fermé $D_f(z_0, r) \subset \Omega$,

$$f(a) = \frac{1}{\pi\,r^2}\int_{D_f(z_0,r)} f(x + i\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Si elles sont vérifiées, on dit que f possède *la propriété de la moyenne* dans Ω.

Proposition 40 - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ alors f possède la propriété de la moyenne.

Définition 41 - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction définie sur Ω. On dit que f admet un *maximum relatif* en $z_0 \in \Omega$ s'il existe un voisinage V de z_0 tel que, pour tout $z \in V$, $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$. On dit que f vérifie *le principe du maximum* dans Ω si elle est constante au voisinage de tout z_0 en lequel elle admet un maximum relatif.

Proposition 42 - Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction définie sur Ω. Si f admet un maximum relatif en un point de Ω, alors f est constante sur Ω.

Proposition 43 - [Principe du maximum] Si $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ alors f vérifie le principe du maximum dans Ω.

Corollaire 44 - Soient Ω un ouvert connexe et borné de $\mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ continue sur $\bar{\Omega}$. Si M est le maximum de $|f|$ sur $\mathrm{Fr}(\Omega)$ alors, pour tout $z \in \Omega$, $|f(z)| \leqslant M$. Et si il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $|f(z_0)| = M$ alors f est constante sur Ω.

Théorème 45 - [Théorème d'holomorphie sous le signe intégral] Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{C}$. On suppose que
(1) pour tout $z \in \Omega$, $x \mapsto f(x,z)$ est continue sur I,
(2) pour tout $x \in I$, $z \mapsto f(x,z)$ est holomorphe sur Ω,
(3) pour tout compact $K \subset I$, il existe une fonction g positive et intégrable sur I telle que $|f(x,z)| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$ et pour tout $z \in K$.
Alors, la fonction $F : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$F(z) = \int_I f(x,z)\,\mathrm{d}x$$

est holomorphe sur Ω, et pour tout $z_0 \in \Omega$,

$$F'(z_0) = \int_I \partial_z f(x,z_0)\,\mathrm{d}x.$$

Application 46 - [Densité des polynômes orthogonaux]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction poids $\rho : I \to \mathbb{R}_+^\star$ mesurable telle qu'il existe une réel $\alpha > 0$ avec $\displaystyle\int_I e^{\alpha\,|x|}\,\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$.
On notera $\mathcal{L}^2(I,\rho) = \{f : I \to \mathbb{C}$ mesurable, $\displaystyle\int_I |f(x)|^2\,\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty\}$ l'espace de Hilbert muni du produit scalaire : $< f, g >= \int_I f(x)\,\bar{g}(x)\,\rho(x)\,\mathrm{d}x$.
Alors, les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $\mathcal{L}^2(I,\rho)$.

5 Lien analycité réelle - analycité complexe

Théorème 47 - Pour toute fonction f analytique sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, il existe un ouvert $\Omega \subset \mathcal{C}$ contenant I et une fonction $g \in \mathcal{A}(\Omega)$ tels que $g = f$ sur I.

Exemple 48 - La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est analytique sur $]-1,+\infty[$. Elle se prolonge sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,-1[$.

Références

Cartan, H., *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*, éd. Hermann.
Tauvel, P., *Analyse complexe pour la licence 3*, éd. Dunod.
Gourdon, X., *Les maths en tête, Analyse*, éd. Ellipses.
Beck, & al., *Objectif agrégation*, éd. H&K.
Monier, J. M., *Analyse, MPSI*, éd. Dunod.
Monier, J. M., *Analyse, MP*, éd. Dunod.