

Gravitation newtonienne

Denis Gialis*

1 Champ gravitationnel d'un astre

La loi de la gravitation universelle de Newton stipule que le vecteur champ de gravitation, $\vec{g}(r)$, créé par une masse ponctuelle m à une distance r , s'écrit, en coordonnées sphériques:

$$\vec{g}(r) = -\frac{\mathcal{G} m}{r^2} \vec{u}_r, \quad (1)$$

avec $\mathcal{G} = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$, la constante de gravitation.

Le flux élémentaire de $\vec{g}(r)$ à travers une surface orientée dS sera

$$d\Phi = \vec{g}(r) \cdot d\vec{S} = -\mathcal{G} m \frac{dS \cos \theta}{r^2}, \quad (2)$$

avec $d\vec{S} = dS \vec{n}$ où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface considérée et θ l'angle entre $\vec{g}(r)$ et \vec{n} .

En considérant une surface orientée fermée S , deux situations peuvent être distinguées:

(1) Si la masse ponctuelle m est située à l'extérieur de S , le flux total sortant à travers cette surface est nul : $\Phi = \oint d\Phi = 0$. Cela est évident si l'on écrit $d\Phi = \vec{g}(r) \cdot d\vec{S} = -\mathcal{G} m d\Omega$ avec $d\Omega$ l'angle solide sous lequel est vu l'élément de surface dS . La ligne de visée suivant laquelle est vu cet angle solide intercepte deux fois la surface fermée: dans l'angle solide $d\Omega$, deux

*Docteur en Astrophysique - Université J. Fourier, Grenoble.

flux élémentaires égaux mais de signes opposés s'ajoutent et donc, s'annulent.

(2) Si, à présent, la masse ponctuelle m est située à l'intérieur de S , alors le flux total sortant à travers cette surface est tel que:

$$\Phi = \oint_{(S)} d\Phi = -4\pi \mathcal{G} m. \quad (3)$$

Ce résultat est l'équivalent gravitationnel du célèbre théorème de Gauss rencontré en électrostatique. **On remarque que ce flux est indépendant de la position de la masse ponctuelle m à l'intérieur de la surface fermée S .** Aussi, pour une collection de masses ponctuelles (m_i) réparties aléatoirement à l'intérieur de S , le flux total sera simplement égal à la somme des flux produits par chacune des masses. On peut alors écrire:

$$\Phi_{total} = -4\pi \mathcal{G} \sum_i m_i = -4\pi \mathcal{G} M_{int}, \quad (4)$$

où M_{int} est la masse totale intérieure à la surface S .

Comment s'exprime le champ gravitationnel résultant ? Chaque masse ponctuelle m_i produit un champ gravitationnel $\vec{g}_i(r_i)$ à une distance r_i . Le champ gravitationnel résultant $\vec{g}(P)$ en un point P quelconque de S , sera égal à la somme de tous les champs gravitationnels produits par les masses m_i soit: $\vec{g}(P) = \sum_i \vec{g}_i(r_i)$. Les équations (3) et (2) permettent d'exprimer $\vec{g}(P)$ sous la forme:

$$\Phi_{total} = \oint_{(S)} \left(\sum_i \vec{g}_i(r_i) \right) \cdot d\vec{S} = \oint_{(S)} \vec{g}(P) \cdot d\vec{S} = -4\pi \mathcal{G} M_{int}. \quad (5)$$

Remarque: l'utilisation du théorème de Gauss, via l'Eq. (5), pour exprimer la valeur d'un champ gravitationnel, nécessite de trouver une surface S sur laquelle le flux élémentaire $d\Phi$ est constant. Sinon, la connaissance du flux total Φ_{total} ne permet évidemment pas de retrouver le champ gravitationnel en un point de S .

Tout corps massif pouvant être considéré comme une collection de masses ponctuelles, ce résultat va nous permettre d'établir la valeur du champ gravitationnel d'un astre dans le cas simple suivant, qui constitue une bonne approximation de beaucoup de cas réels.

Soit un astre sphérique, de rayon R et de masse M , ayant une densité homogène. Par symétrie sphérique, le champ gravitationnel produit ne peut dépendre que de la distance, r , au centre de l'astre et reste orienté selon le vecteur radial unitaire \vec{u}_r . Ce problème permet de distinguer deux régions différentes selon r :

(1) A une distance $r > R$, on doit considérer la sphère S de rayon r et de même centre que l'astre. La masse totale, intérieure à S , est donc égale à M : aussi, d'après l'équation (5), on déduit que le champ gravitationnel, $\vec{g}(r)$, à la distance r est tel que

$$\oint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = g(r) 4\pi r^2 = -4\pi \mathcal{G} M. \quad (6)$$

Autrement dit,

$$\vec{g}(r) = -\frac{\mathcal{G} M}{r^2} \vec{u}_r. \quad (7)$$

En appelant $g_0 = \mathcal{G} M/R^2$, l'intensité du champ gravitationnel à la surface de l'astre, on obtient:

$$\vec{g}(r) = -g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \vec{u}_r. \quad (8)$$

(2) A une distance $r < R$, la masse intérieure à la sphère S de rayon r est égale à

$$M_{int} = M \left(\frac{r}{R}\right)^3, \quad (9)$$

étant données les hypothèses de symétrie sphérique et de densité homogène. On a donc

$$\oint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = g(r) 4\pi r^2 = -4\pi \mathcal{G} M \left(\frac{r}{R}\right)^3, \quad (10)$$

c'est-à-dire

$$\vec{g}(r) = -\frac{\mathcal{G} M r}{R^3} \vec{u}_r, \quad (11)$$

ou bien encore,

$$\vec{g}(r) = -g_0 \left(\frac{r}{R}\right) \vec{u}_r. \quad (12)$$

On notera que le champ gravitationnel s'annule au centre de l'astre et atteint un maximum à sa surface où son intensité vaut g_0 .

Remarque: une situation plus réaliste et plus complexe est, par exemple, celle pour laquelle la masse volumique, $\mu(r)$, à l'intérieur de l'astre, est fonction de la distance au centre, r . Le champ gravitationnel sera alors de la forme:

$$\vec{g}(r) = -(1/r^2) \int_{r'=0}^R \mu(r') r'^2 dr' \vec{u}_r. \quad (13)$$

Le problème reste, bien sûr, la détermination de la loi de densité qui nécessite une étude précise des conditions physiques du milieu telles que la température ou la pression dans le cas d'un intérieur fluide.

2 Mouvement dans un champ newtonien

2.1 Définition d'un champ newtonien

Par définition, un *champ newtonien* est un champ de forces centrales en $1/r^2$, ce qui signifie qu'une particule ayant un vecteur position \vec{r} , défini par rapport à un centre actif, subit une force, $\vec{F}(\vec{r})$, qui est telle que

$$\vec{F}(\vec{r}) = K \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (14)$$

Si $K > 0$, cette force est dite *répulsive* et si $K < 0$, elle est dite *attractive*. Il est important de noter que le centre actif subit lui aussi cette force mais orientée dans le sens opposé.

Un premier exemple est celui de la force électrostatique exercée par une charge Q sur une particule de charge q . La force s'écrit alors

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Qq}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{r}. \quad (15)$$

Elle peut être attractive ou répulsive suivant les signes des charges.

Mais l'exemple qui va nous intéresser ici est celui de la force gravitationnelle: un astre, de masse M et de rayon R , exerce sur une particule de masse m la force suivante,

$$\vec{F}(\vec{r}) = m \vec{g}(r) = -\frac{m \mathcal{G} M}{r^3} \vec{r}, \quad (16)$$

où l'on a supposé que $r > R$. En fait, cette force s'exerce sur le centre de gravité de tout corps de masse m ; la seule différence est que si l'extension spatiale du corps massif considéré est non négligeable, alors ce corps subira des effets de marée. D'après le théorème du centre d'inertie (ou de la résultante cinétique), sa trajectoire sera cependant identique à celle qu'il aurait si toute sa masse était concentrée en son centre de gravité. Dans l'étude des trajectoires, on assimilera donc tout corps massif à un point matériel de même masse.

2.2 Equation du mouvement

Quelles sont les caractéristiques du mouvement d'un corps massif dans un champ gravitationnel ? Pour répondre à cette question, nous supposons, tout d'abord, que $m \ll M$, c'est-à-dire que la masse attractive M peut être considérée comme fixe en un point O de l'espace. C'est par rapport à ce point, pris comme origine d'un référentiel galiléen, que seront exprimées la vitesse et l'accélération du corps en orbite. Cette hypothèse reste tout à fait raisonnable lorsque l'on s'intéresse, par exemple, aux systèmes Terre-Lune, Terre-Soleil ou satellite artificiel-Terre. Elle est fautive, en revanche, lorsque l'on veut étudier un système d'étoiles doubles. Mais nous reviendrons plus tard sur ce cas.

Par ailleurs, le système corps-astre attractif sera supposé isolé: nous traitons ici un problème simple à deux corps. Le système Terre-Lune-Soleil constitue, lui, un problème à trois corps dont les équations du mouvement sont nettement plus complexes à résoudre. Seules des simulations numériques élaborées peuvent apporter des solutions à un problème dit à N -corps ($N \geq 3$) comme c'est le cas, par exemple, lorsque l'on souhaite étudier la dynamique d'une population d'étoiles au sein d'une galaxie ou d'un amas.

D'après le principe fondamental de la dynamique et d'après l'équation (16), nous savons que l'accélération du corps, notée \vec{a} , est égale à $\vec{g}(r)$. Aussi, la première propriété intéressante d'une force centrale, telle que la force gravitationnelle, est que

$$\vec{r} \wedge \vec{F}(\vec{r}) = m \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{0}. \quad (17)$$

La conséquence est que le vecteur $\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v}$, où $\vec{v} (= d\vec{r}/dt)$ est la vitesse

du corps, reste constant dans le temps. En effet,

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{0}. \quad (18)$$

Ainsi, puisque le vecteur \vec{C} garde une direction constante dans le temps, les vecteurs \vec{r} et \vec{v} sont toujours dans le même plan orthogonal. Autrement dit, nous venons de montrer que **la trajectoire d'un corps, soumis uniquement à une force gravitationnelle, est plane.**

Plaçons-nous, à présent, dans le plan défini par (\vec{r}, \vec{v}) , et exprimons la norme C du vecteur \vec{C} en coordonnées cylindriques de centre O dont la base orthonormée sera notée $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k}\}$, avec $\vec{k} = \vec{C}/\|\vec{C}\|$: nous avons $\vec{r} = r\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ donc $\vec{C} = r^2\dot{\theta}\vec{k}$. Comme $r^2\dot{\theta}dt = r^2d\theta = 2dS$ où dS est l'aire élémentaire balayée par le rayon vecteur \vec{r} lorsque la coordonnée θ du corps varie de $d\theta$, nous pouvons écrire

$$C = 2 \frac{dS}{dt}, \quad (19)$$

et la norme C du vecteur \vec{C} est appelée *constante de la loi des aires*. Cela signifie que **le rayon vecteur \vec{r} d'un corps, soumis uniquement à une force gravitationnelle, balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.** C'est, ce que l'on appelle, *la deuxième loi de Képler*. Avec des conditions initiales (\vec{r}_0, \vec{v}_0) , on a: $C = r_0 v_0 |\sin(\vec{r}_0, \vec{v}_0)|$. Remarquons, enfin, que le moment cinétique de la particule, par rapport à O , n'est rien d'autre que le vecteur $\vec{\sigma} = m\vec{C}$: ce moment cinétique reste donc constant le long de la trajectoire du corps.

La constante de la loi des aires permet de déterminer ce que l'on appelle les *formules de Binet*, en éliminant le temps des expressions de v^2 et de \vec{a} : comme $\dot{r} = \dot{\theta} dr/d\theta$ et que $\dot{\theta} = C/r^2$, on calcule aisément le module au carré de la vitesse \vec{v} qui est

$$v^2 = C^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right)^2 \right], \quad (20)$$

et qui constitue *la première formule de Binet*.

La seconde formule est obtenue en dérivant encore une fois r : on a

$$\ddot{r} = \dot{\theta} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (21)$$

et comme

$$\vec{a} = \left[\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right] \vec{e}_r, \quad (22)$$

on définit la *seconde formule de Binet* comme étant

$$\vec{a} = -\frac{C^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \vec{e}_r. \quad (23)$$

Cette seconde formule nous amène directement à la détermination de la trajectoire d'un corps. En effet, d'après l'équation (16), en coordonnées polaires,

$$\frac{\mathcal{G} M}{r^2} = \frac{C^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right], \quad (24)$$

c'est-à-dire,

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{\mathcal{G} M}{C^2}. \quad (25)$$

La solution générale de cette équation différentielle, dont la variable est $u = 1/r$, est telle que

$$\frac{1}{r} = \frac{\mathcal{G} M}{C^2} + A \cos(\theta - \alpha). \quad (26)$$

L'axe polaire peut toujours être choisi de sorte que $\alpha = 0$: cela équivaut, comme nous allons voir ci-après, à confondre l'axe polaire avec l'axe de la conique représentant la trajectoire. La constante A , quant à elle, dépend des conditions initiales (\vec{r}_0, \vec{v}_0) , données en un point de la trajectoire:

$$A = \frac{1}{\cos(\theta_0)} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{\mathcal{G} M}{C^2} \right), \quad (27)$$

avec θ_0 l'angle entre l'axe polaire et \vec{r}_0 .

L'équation (26) peut se mettre sous la forme d'une équation de conique¹, en coordonnées polaires, dont un des foyers est au centre de la masse attractive:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}, \quad (28)$$

¹Voir la Sec. 2.3.

avec $p = C^2/(\mathcal{G} M) > 0$, le paramètre de la conique, et $e = AC^2/(\mathcal{G} M)$ son excentricité.

Nous avons donc démontré que **la trajectoire d'un corps, soumis uniquement à une force gravitationnelle, est une conique dont un des foyers est le centre attractif**. Ce résultat est plus connu sous le nom de *première loi de Képler*.

2.3 Géométrie des coniques

2.3.1 Définitions

Dans un plan affine euclidien (P) , soient F et F' , deux points distincts et (D) une droite. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$:

- Si $a > \frac{1}{2}FF'$, alors l'ensemble $\{M \in (P); MF + MF' = 2a\}$ est une *ellipse* de foyer F et F' . Lorsque $F = F'$, cet ensemble est un *cercle* de centre F .
- Si $a < \frac{1}{2}FF'$, alors l'ensemble $\{M \in (P); MF - MF' = 2a\}$ est une *hyperbole* de foyer F et F' .
- L'ensemble $C = \{M \in (P); MF = eMH\}$, avec H le projeté orthogonal de M sur (D) , est une ellipse si $0 < e < 1$, une *parabole* de foyer F si $e = 1$, et une hyperbole si $e > 1$. Le réel e est l'*excentricité*, et la droite (D) est appelée *directrice* de la conique.

2.3.2 Equation cartésienne des coniques

Avec les notations de la Sec. 2.3.1, soit I le projeté de F sur la droite (D) . En notant $d = IF$, on définit le repère orthonormé direct (I, \vec{i}, \vec{j}) , tel que $\vec{i} = \frac{1}{d}\vec{IF}$ et $\vec{j} = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{i})$. Dans le repère (I, \vec{i}, \vec{j}) , comme H a pour coordonnées $(0, y)$, on a:

$$M \in C \iff (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2dx + d^2 = 0. \quad (29)$$

Pour une **parabole**, $e = 1 \implies y^2 = 2d \left(x - \frac{d}{2}\right)$.

Lorsque $e \neq 1$, l'équation de la conique C s'écrit

$$(1 - e^2) \left(x - \frac{d}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{d^2 e^2}{1 - e^2}. \quad (30)$$

Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) avec le point O de coordonnées $(\frac{d}{1-e^2}, 0)$, cette dernière équation devient

$$\frac{X^2}{a^2} + \varepsilon \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad (31)$$

avec $p = d e$, le paramètre de la conique,

$$a = \frac{p}{|1 - e^2|}, \quad (32)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{|1 - e^2|}}, \quad (33)$$

et ε le signe de $1 - e^2$. Le point O est donc le centre de symétrie de C . La distance entre un foyer (F ou F') est le centre de symétrie O , notée c est telle que $c = e a$. La distance minimale entre un point de la conique et un foyer est égale à $d_{\min} = a |e - 1|$. On aura également $p = b^2/a$ et:

- Pour un **cercle**, $a = b = R$, R étant le rayon du cercle.
- Pour une **ellipse**, $0 < b < a$ et $a^2 = b^2 + c^2$, avec a la longueur du demi-grand axe et b la longueur du demi-petit axe (voir Fig. 1). De plus, on a

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (34)$$

- Pour une **hyperbole**, $c^2 = a^2 + b^2$, avec a la distance entre un sommet de l'hyperbole et son centre de symétrie O , et b le paramètre d'impact, c'est-à-dire la distance entre un foyer et les asymptotes d'équations $y = \pm \frac{b}{a} x = \tan(\pm \arccos(-1/e)) x$ (voir Fig. 2). Enfin, on a

$$e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}. \quad (35)$$

2.3.3 Equation polaire des coniques

En prenant pour origine du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , un foyer de la conique C , et en posant $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ avec (r, θ) les coordonnées polaires usuelles, on obtient facilement l'équation polaire d'une conique:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}, \quad (36)$$

lorsque le vecteur \vec{i} est orthogonal à la directrice (D).

On remarque que r est minimal en $r_{\min} = p/(1 + e)$ ($\theta = 0$), et que $r = p$

lorsque $\theta = \pi/2$. De plus, lorsque θ parcourt l'intervalle $[0, 2\pi]$, r est borné uniquement si $0 \leq e < 1$, et il atteint son maximum en $r_{\max} = p/(1 - e) = a(1 + e)$. Enfin, si $e \geq 1$, $r \rightarrow +\infty$, lorsque $\theta \rightarrow \pm \arccos(-1/e)$.

De façon générale, en notant $\phi = (\vec{i}, D) + \frac{\pi}{2} [\pi]$, l'angle entre l'axe de symétrie de la conique qui passe par les foyers et l'axe des abscisses (ou axe polaire), l'équation polaire d'une conique s'écrit:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \phi)}. \quad (37)$$

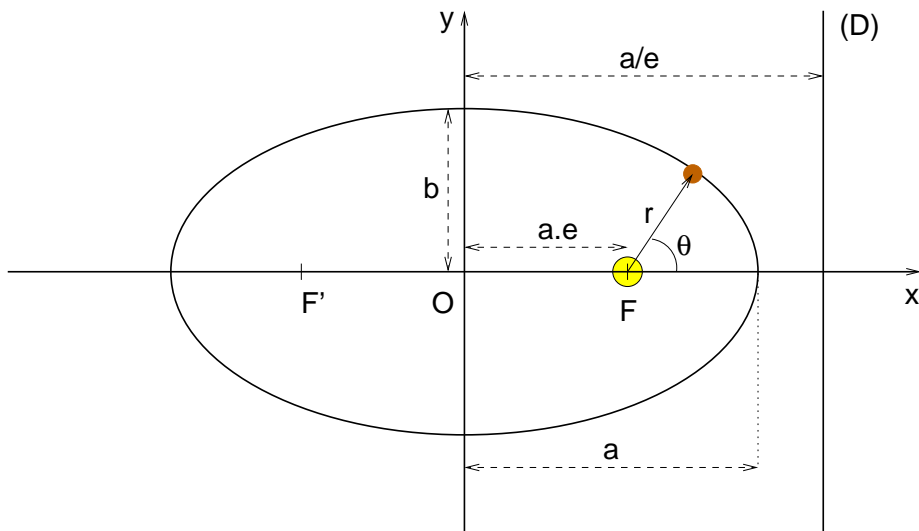


Figure 1: Principales caractéristiques de la trajectoire elliptique.

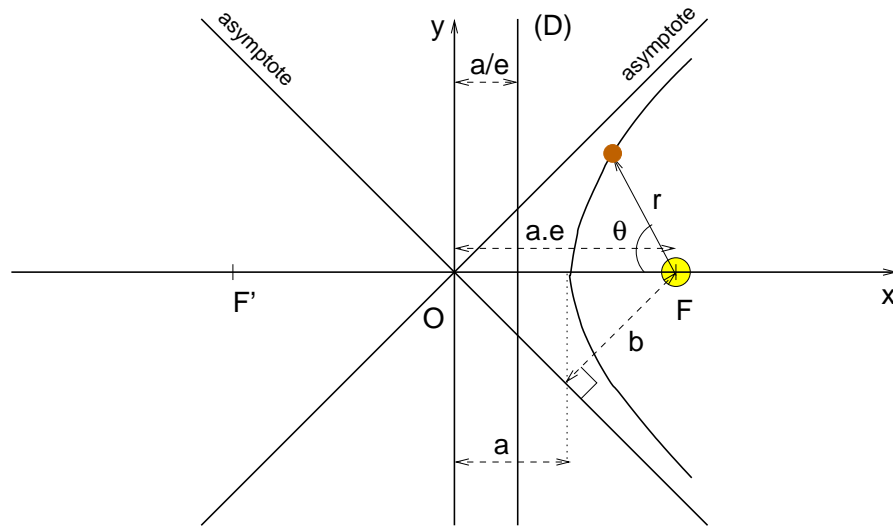


Figure 2: Principales caractéristiques de la trajectoire hyperbolique. L'angle entre l'axe de symétrie, (Ox) , de l'hyperbole et une asymptote est égal à $\pm \arccos(-1/e)$.

2.4 Energie d'un corps en orbite

Le mouvement d'un corps massif dans un champ gravitationnel ayant été déterminé, nous allons exprimer son énergie mécanique², E , qui est constante au cours du temps (le système étant supposé isolé). Cette énergie est égale à la somme de son énergie cinétique, E_c , et de son énergie potentielle, E_p . L'énergie potentielle d'un corps massif est définie à une constante près par la relation

$$E_p = -\frac{\mathcal{G} M m}{r} + Cte, \quad (38)$$

Elle ne représente rien d'autre que le potentiel d'interaction gravitationnelle, $U(\vec{r})$, entre le corps et le centre attractif, qui est tel que

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}}(U(\vec{r})). \quad (39)$$

²Il serait plus exact, ici, de dire que l'on considère l'énergie mécanique du point matériel de même masse que le corps. Pour obtenir l'énergie cinétique du corps, par exemple, il faudrait rajouter, à l'énergie cinétique du point matériel, l'énergie cinétique liée aux mouvements du corps dans son propre référentiel barycentrique.

Par convention, en considérant que l'énergie potentielle est nulle à l'infini ($r \rightarrow +\infty$), la constante sera choisie nulle ($Cte = 0$).

Quant à l'énergie cinétique du corps, étant donnée la constante de la loi des aires et d'après l'équation (20), elle s'écrit

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m C^2}{2} \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right)^2 \right]. \quad (40)$$

En introduisant le paramètre p et l'excentricité e associés à la trajectoire conique du corps, on réexprime les deux énergies précédentes qui deviennent

$$E_p = -\frac{\mathcal{G} M m}{p} (1 + e \cos \theta), \quad (41)$$

et

$$E_c = \frac{1}{2} \mathcal{G} M m \left[\frac{1 + 2 e \cos \theta + e^2}{p} \right], \quad (42)$$

ce qui implique

$$E = \frac{\mathcal{G} M m}{2p} [e^2 - 1]. \quad (43)$$

Ainsi, nous voyons que le signe de l'énergie mécanique, E , est directement lié à l'excentricité, e , donc au genre de la conique représentant la trajectoire de la particule. On peut exprimer la vitesse du corps en fonction de l'énergie mécanique et de sa distance au centre attracteur:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{\mathcal{G} M m}{r} \right)}. \quad (44)$$

Quelle que soit la trajectoire, on retrouve donc que la vitesse est maximale au périastre, lorsque $r = r_{\min}$, et minimale à l'apoastre, lorsque $r = r_{\max}$ ou $+\infty$.

- Pour une trajectoire *circulaire* de rayon R , l'énergie mécanique est négative et s'écrit

$$E = -\frac{\mathcal{G} M m}{2R} < 0, \quad (45)$$

et la vitesse, constante, est telle que

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M}{R}}. \quad (46)$$

- Pour une trajectoire *parabolique*, $e = 1$, l'énergie mécanique est toujours nulle, et la vitesse s'écrit

$$v = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{r}}. \quad (47)$$

C'est le cas limite pour lequel le corps a une vitesse nulle à l'infini, c'est-à-dire aux instants $t = \pm\infty$. Il ne s'approche donc qu'une seule fois du centre attracteur avec une vitesse qui atteint sa valeur maximale en $r_{\min} = p/2$ et qui égale à $v_{\max} = 2\sqrt{\mathcal{G}M/p}$.

- Pour une trajectoire *hyperbolique*, $e > 1$, l'énergie mécanique est toujours positive: lorsque $r \rightarrow +\infty$, $E_p \rightarrow 0$ donc $E \rightarrow E_c > 0$. Comme $p = a(e^2 - 1)$ (voir la Sec. 2.3), l'énergie mécanique prend alors la forme simple suivante³:

$$E = \frac{\mathcal{G}Mm}{2a} > 0, \quad (48)$$

et la vitesse,

$$v = \sqrt{\mathcal{G}M \left(\frac{2a+r}{ar} \right)}, \quad (49)$$

est comprise entre la valeur $v_{\min} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{a}}$, lorsque $r \rightarrow +\infty$, et la valeur $v_{\max} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M(e+1)}{a(e-1)}}$, en $r = r_{\min} = a(e-1)$.

- Pour une trajectoire *elliptique*, $e < 1$, l'énergie mécanique est toujours négative: la distance r atteint un maximum, au cours du mouvement du corps, qui correspond à $r_{\max} = a(1+e)$. Comme $p = a(1-e^2)$, l'énergie mécanique devient:

$$E = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a} < 0, \quad (50)$$

et la vitesse,

$$v = \sqrt{\mathcal{G}M \left(\frac{2a-r}{ar} \right)}, \quad (51)$$

³Cette équation montre que le demi-grand axe, a , ne dépend que de l'énergie mécanique. Il n'en est pas de même du demi-petit axe, $b = \sqrt{pa}$, qui dépend à la fois de l'énergie mécanique et du moment cinétique du corps par rapport à O (via la constante de la loi des aires).

est comprise entre la valeur $v_{\min} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M(1-e)}{a(1+e)}}$, en $r = r_{\max}$, et la valeur $v_{\max} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M(1+e)}{a(1-e)}}$, en $r = r_{\min} = a(1 - e)$.

Remarque : les trajectoires elliptiques ou circulaires sont, par définition, des trajectoires fermées. Cela signifie que la mise en orbite d'un satellite autour d'un astre ne peut pas se faire avec un lancement du type *boulet de canon*. Dans un tel cas, le satellite reviendrait à son point de départ, c'est-à-dire sur celui qui l'a lancé. On doit donc effectuer une mise en orbite en deux étapes minimum: une première, pour atteindre la distance voulue correspondant au rayon de l'orbite et, la seconde, pour régler la vitesse du satellite sur la vitesse orbitale qui correspond à l'orbite choisie.

Application - Calcul de la vitesse de libération

Par définition, la *vitesse de libération* est la vitesse initiale minimale qu'il faut communiquer à un corps, depuis la surface d'un astre, pour qu'il puisse partir à l'infini. Cette vitesse est calculée par rapport au centre, supposé fixe, de l'astre, auquel on peut associer un référentiel galiléen: l'énergie mécanique étant une constante du mouvement, la condition initiale permettant au corps de s'échapper à l'infini s'écrit

$$-\frac{\mathcal{G}Mm}{R} + \frac{1}{2}mv_i^2 \geq 0, \quad (52)$$

avec R , le rayon de l'astre et v_i , la vitesse initiale du corps. La vitesse de libération, notée v_{lib} , sera donc

$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{R}}. \quad (53)$$

Comme on peut le voir sur le tableau comparatif ci-dessous, pour la Terre, cette vitesse de libération vaut environ $11.2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Nous distinguerons la vitesse de libération de la *vitesse d'échappement*, qui a la même définition mais avec $r \geq R$. La vitesse de libération n'est alors que la valeur maximale de la vitesse d'échappement.

Par ailleurs, la vitesse de libération ne doit pas être confondue avec la vitesse de lancement du corps mesurée par un observateur terrestre: en effet, ce dernier a déjà une vitesse non nulle par rapport au centre de la Terre, qui est la vitesse de rotation autour de l'axe de rotation terrestre. Il faut donc tenir compte de cette vitesse d'entraînement. Pour obtenir la vitesse de lancement minimale, \vec{v}_{lan} , pour envoyer le corps à l'infini, on aura la relation suivante:

$$\vec{v}_{lan} = \vec{v}_{lib} - \vec{v}_e, \quad (54)$$

où \vec{v}_e est la vitesse d'entraînement de l'observateur terrestre. La norme de cette vitesse, qui est maximale à l'équateur, est égale à ΩR_e (voir Ex. 1) soit environ $466 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Enfin, la vitesse de libération peut être comparée à la vitesse, v_0 , qu'aurait un corps en orbite circulaire basse, c'est-à-dire dont le rayon est proche de R . D'après l'équation (46), on voit que le rapport v_{lib}/v_0 n'est égal qu'à $\sqrt{2}$: la différence de vitesse est donc faible entre une orbite circulaire basse et une trajectoire partant à l'infini.

	Masse	Rayon	Vitesse de libération
Terre	$5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$	6378 km	$11.2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$
Lune	$7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$	1738 km	$2.37 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$
Jupiter	$1.90 \times 10^{27} \text{ kg}$	71400 km	$59.6 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$
Soleil	$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	$6.95 \times 10^5 \text{ km}$	$618 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$
Naine blanche	$\simeq 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$	$\simeq 10000 \text{ km}$	$\simeq 5200 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$
Etoile à neutrons	$\simeq 4.0 \times 10^{30} \text{ kg}$	$\simeq 10 \text{ km}$	$\simeq 230000 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$

2.5 Mouvement dans un système double

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le mouvement de deux corps massifs, placés en M_1 et en M_2 , en interaction gravitationnelle. Le système physique, constitué par les deux corps, est supposé isolé: la conséquence est que le référentiel barycentrique de ce système, noté (\mathcal{R}_G) , est galiléen.

Ecrivons, pour chaque corps, l'équation du mouvement dans (\mathcal{R}_G) :

$$m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{GM}_1}{dt^2} = \frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{\|M_1 M_2\|^3} \overrightarrow{M_1 M_2}, \quad (55)$$

$$m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{GM}_2}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{\|M_1 M_2\|^3} \overrightarrow{M_1 M_2}, \quad (56)$$

avec G , le barycentre des deux corps, et m_1 et m_2 , leurs masses.

Comme, par définition, $m_1 \overrightarrow{GM}_1 + m_2 \overrightarrow{GM}_2 = 0$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{GM}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \overrightarrow{GM}_1, \quad (57)$$

les deux corps ont des trajectoires homothétiques dans (\mathcal{R}_G) .

En multipliant par $-m_2$ la première des deux équations du mouvement précédentes et, par m_1 la seconde, on obtient, en additionnant les deux équations obtenues,

$$m_1 m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|^3} (m_1 + m_2) \overrightarrow{M_1 M_2}. \quad (58)$$

Comme le barycentre G est situé entre les points M_1 et M_2 , il existe un point M tel que $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1 M_2}$. L'équation (57) implique alors

$$\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM}, \quad (59)$$

$$\overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM}. \quad (60)$$

Il suffit donc de connaître la trajectoire du point M , appelé aussi *mobile fictif*, pour trouver celle de M_1 et celle de M_2 . Pour déterminer cette trajectoire, ré-écrivons l'équation (58);

$$\mu \frac{d^2 \overrightarrow{GM}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G} (m_1 + m_2) \mu}{\|\overrightarrow{GM}\|^3} \overrightarrow{GM}, \quad (61)$$

avec μ , la masse dite *réduite*, que l'on associe au mobile fictif et qui est définie par

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (62)$$

Autrement dit, tout se passe comme si le mobile fictif M de masse μ est en orbite autour du point G , auquel on associe la masse $m_1 + m_2$. La troisième loi de Képler liant le demi-grand axe de l'orbite de M , noté a_M et sa période de révolution T (qui est donc la même que celle de M_1 et M_2) s'écrit :

$$\frac{a_M^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G} (m_1 + m_2)}{4\pi^2}. \quad (63)$$

Lorsque $m_1 \gg m_2$, on retrouve

$$\frac{a_M^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G} m_1 (1 + m_2/m_1)}{4\pi^2} \simeq \frac{\mathcal{G} m_1}{4\pi^2}, \quad (64)$$

avec $a_M \simeq a_{M_2}$, le demi-grand axe de l'orbite de M_2 .

3 Problèmes et exercices corrigés

Exercice 1 - Calcul de l'accélération de la pesanteur sur Terre

Dans cet exercice, nous allons faire une estimation précise du champ gravitationnel effectif à la surface de la Terre au niveau des pôles et de l'équateur. Le terme *effectif* signifie ici que nous allons tenir compte de la rotation de la Terre et de son aplatissement aux pôles afin de calculer l'accélération de la pesanteur.

Rappelons que la Terre a une période de rotation autour de son axe d'environ 23 h 56 min ce qui équivaut à une vitesse angulaire Ω de l'ordre de $7.3 \times 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. L'aplatissement du globe terrestre est tel que le rayon aux pôles, noté R_p , est d'environ 6357 km alors qu'à l'équateur, il atteint les 6378 km. Ce dernier rayon sera noté R_e . La Terre peut ainsi être modélisée par un ellipsoïde dont le volume est égal à $(4/3)\pi R_p R_e^2$. Enfin, la masse de la Terre, M_T , est de $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$.

Le terme d'accélération lié à la rotation de la Terre s'écrit:

$$\vec{a}_{rot} = \Omega^2 d \vec{u}_r, \quad (65)$$

où d est la distance à l'axe de rotation de la Terre. Ainsi, $d = 0$ si l'on est aux pôles (où il n'y a donc pas de terme d'accélération supplémentaire) et $d = R_e$ à l'équateur.

Pour appliquer le théorème de Gauss (voir l'Eq. (5)), nous allons tout d'abord définir une sphère, S_p , de rayon R_p dont le centre est le centre de la Terre. Comme $R_p < R_e$, cette sphère ne contient pas tout le volume et donc toute la masse de la Terre: la différence de volume vaut

$$\delta V = \frac{4}{3} \pi R_p (R_e^2 - R_p^2), \quad (66)$$

et la masse intérieure à la sphère S_p est donc

$$M_{int} = M_T - \mu \delta V, \quad (67)$$

avec $\mu \simeq 2,5 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, la masse volumique moyenne de la croûte terrestre qui s'avère être moins dense que les couches plus profondes. La masse M_{int} est donc d'environ $5.96 \times 10^{24} \text{ kg}$ et on peut déterminer l'accélération de la pesanteur aux pôles qui est égale à:

$$\vec{g}_p = -\frac{\mathcal{G} M_{int}}{R_p^2} \vec{u}_r, \quad (68)$$

soit une intensité de $9.84 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

A l'équateur, le calcul est plus direct puisque toute la masse de la Terre est contenue dans la sphère de rayon R_e . Etant donné le terme d'accélération lié à la rotation, l'accélération de la pesanteur s'écrira:

$$\vec{g}_e = \left(\Omega^2 R_e - \frac{\mathcal{G} M_T}{R_e^2} \right) \vec{u}_r, \quad (69)$$

soit une intensité de $9.77 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Il est assez remarquable que les deux valeurs que nous avons trouvées sont très proches de celles que l'on obtient expérimentalement et qui valent respectivement, aux pôles et à l'équateur, 9.83 et $9.78 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Cependant, dans cet exemple, nous avons dû appliqué deux fois le théorème de Gauss pour trouver le champ gravitationnel: cela suppose que le flux élémentaire $d\Phi$ est constant sur les sphères considérées, alors qu'il n'en est rien puisqu'il n'y a pas - par exemple - de symétrie sphérique dans la répartition des masses. Bien que rigoureusement inexacte, cette méthode reste donc, ici, une bonne approximation.

Exercice 2 - La troisième loi de Képler

On considère ici uniquement le cas des trajectoires elliptiques c'est-à-dire celle pour lesquelles $e < 1$. Au cours d'une révolution complète, en un temps T , autour de l'astre attractif, la surface balayée par le rayon vecteur \vec{r} est égale à $\pi a b$ avec a , le demi-grand axe de l'ellipse et b , son demi-petit axe (voir la Fig. 1). La constante de la loi des aires sera donc

$$C = 2 \frac{\pi a b}{T}. \quad (70)$$

En remplaçant C par son expression, on obtient

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G} M}{4 \pi^2}, \quad (71)$$

ce qui constitue *la troisième des lois de Képler*. Cette relation permet de calculer aisément la masse du centre attractif en connaissant les deux caractéristiques simples de l'orbite d'un satellite que sont a , le demi-grand axe de l'orbite elliptique, et T , la période de révolution. Dans le cas du Système Solaire, il est intéressant de choisir comme unités, l'année, pour la période, et, l'unité astronomique (U.A.⁴), pour la taille

⁴1 U.A.=149.6 millions de kilomètres = distance moyenne Terre-Soleil.

des demi-grands axes: avec ces unités, on obtient l'approximation simple : $a^3/T^2 = 1$, puisque la Terre tourne autour du Soleil en une année...

Exercice 3 - Le cas simple d'une orbite circulaire

L'orbite circulaire est celle pour laquelle $e = 0$. D'après le principe fondamental de la dynamique, l'accélération d'un corps de masse m , sur son orbite, doit être telle que

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R_0} \vec{e}_r = \frac{\mathcal{G} M}{R_0^2} \vec{e}_r, \quad (72)$$

avec v , la vitesse du corps et R_0 , le rayon de l'orbite circulaire. Autrement dit, on retrouve que la vitesse d'un corps sur une orbite circulaire est

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M}{R}}. \quad (73)$$

Elle est donc constante et, bien sûr, indépendante de la masse m . On déduit une période, T , de révolution qui s'écrit

$$T = \frac{2\pi R_0}{v} = \frac{2\pi R_0^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G} M}}. \quad (74)$$

Notons, enfin, que l'énergie mécanique d'un corps en orbite circulaire est égal à

$$E = -\frac{\mathcal{G} M m}{2R_0}. \quad (75)$$

Un problème classique et simple consiste à chercher le rayon de l'orbite circulaire d'un satellite géostationnaire⁵. Par définition, la période de révolution d'un tel satellite est égale à la période de rotation de la Terre autour de son axe, soit $T = 86164$ s. D'après l'équation (74), le rayon cherché sera égal à

$$R_{geo} = \left(\frac{\mathcal{G} M_T T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \simeq 4.22 \times 10^7 \text{ m}, \quad (76)$$

avec $M_T \simeq 5.98 \times 10^{24}$ kg, la masse de la Terre. En tenant compte du rayon de la Terre, un satellite géostationnaire doit donc être placé à une altitude d'environ 35800 km soit un peu moins d'un dixième de la distance Terre-Lune.

⁵C'est un satellite, placé dans le plan de l'équateur, qui paraît fixe, dans le ciel, pour un observateur terrestre au repos.

Exercice 4 - Caractéristiques orbitales d'une comète

La comète de Halley est une comète à courte période⁶: elle parcourt son orbite elliptique en une période, T , égale à 76 ans, et s'approche à une distance $d_{min} = 0.587$ U.A du Soleil à son périhélie. Ces deux données, relativement faciles à obtenir par le biais d'observations astronomiques, vont nous permettre de caractériser l'orbite de cette comète. La troisième loi de Képler nous donne directement le demi-grand axe:

$$a = \left(\frac{\mathcal{G} M_{\odot} T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \simeq 17.9 \text{ U.A.} \quad (77)$$

Au périhélie, d'après les propriétés de l'ellipse, on a la relation

$$d_{min} = a(1 - e), \quad (78)$$

ce qui donne l'excentricité $e = 1 - d_{min}/a \simeq 0.967$.

La distance au Soleil à l'aphélie, d_{max} , sera donc égale à

$$d_{max} = a(1 + e) \simeq 35.2 \text{ U.A.} \quad (79)$$

Enfin, l'expression de l'énergie mécanique (voir l'équation (50)) permet de déterminer la vitesse de la comète en un point de sa trajectoire: en effet, on peut écrire

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\mathcal{G} M_{\odot} m}{r} = -\frac{\mathcal{G} M_{\odot} m}{2a}, \quad (80)$$

avec m la masse de la comète. La vitesse, qui est une fonction de la distance à l'astre attractif (ici, le Soleil), se déduit facilement:

$$v = \sqrt{2\mathcal{G} M_{\odot} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}. \quad (81)$$

La vitesse est donc maximale au périhélie et, comme $d_{min} = a(1 - e)$, cette dernière vaut

$$v_{max} = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_{\odot}}{a} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)} \simeq 54.5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad (82)$$

Enfin, la vitesse est minimale à l'aphélie, en $d_{max} = a(1 + e)$. Elle est telle que;

$$v_{min} = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_{\odot}}{a} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)} \simeq 0.9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (83)$$

⁶c'est-à-dire dont la période de révolution est inférieure à 200 ans.

Exercice 5 - Les points de Lagrange du système Terre-Soleil

Par définition, un corps massif qui reste naturellement immobile par rapport à l'axe Terre-Soleil occupe un point de Lagrange du système Terre-Soleil. Autrement dit, en chaque point de Lagrange, on peut placer un satellite, de masse $\mu \ll M_T$, qui reste fixe dans le référentiel tournant associé à la Terre et de repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Pour déterminer simplement la position des divers points de Lagrange, nous supposons que l'orbite de la Terre autour du Soleil est circulaire de rayon a et que le référentiel associé au Soleil est galiléen. De plus, nous négligerons l'influence de la Lune.

Nous allons tout d'abord calculer la position des points de Lagrange appelés L_1 , L_2 et L_3 qui sont situés sur l'axe Terre-Soleil (voir la Fig. 3) et qui correspondent aux trois positions possibles sur cet axe.

La relation fondamentale de la dynamique pour un corps massif situé en L_1 peut être écrite dans le référentiel tournant associé à la Terre. Ce référentiel n'étant pas galiléen, il faut tenir compte de l'accélération d'entraînement⁷. Si le centre de la Terre, noté T , est pris comme origine du repère, on aura (suivant \vec{e}_r)

$$-\frac{\mathcal{G} M_\odot}{(a-x)^2} + \frac{\mathcal{G} M_T}{x^2} + \omega_T^2 (a-x) = 0, \quad (84)$$

avec $x > 0$ la distance L_1T , et ω_T la vitesse angulaire de la Terre autour du Soleil soit $2\pi/T$ avec $T = 1$ an. D'après la troisième loi de Képler, la vitesse angulaire ω_T est telle que

$$\omega_T^2 = \frac{\mathcal{G} M_\odot}{a^3}. \quad (85)$$

En développant l'équation (84), on aboutit alors à une condition d'annulation d'un polynôme P , de degré 5 en x , de la forme suivante:

$$P(x) = -x^5 + 3ax^4 - 3a^2x^3 + ha^3x^2 - 2ha^4x + ha^5 = 0, \quad (86)$$

où l'on a posé $h = M_T/M_\odot$. La recherche mathématique, sans intérêt ici, des solutions montre que ce polynôme a 4 racines complexes et une racine réelle. C'est, bien entendu, la racine réelle qui va nous intéresser. Pour la calculer simplement, nous allons remarquer que $h \ll 1$ (en effet, h est de l'ordre de 10^{-6} !). Une des conséquences est que le point d'équilibre recherché se situe beaucoup plus près de la Terre que du Soleil: dans le cas contraire, la force d'attraction terrestre serait négligeable devant

⁷L'accélération de Coriolis sera nulle puisque le corps doit être fixe dans le référentiel tournant.

celle du Soleil et tout équilibre serait impossible. Ainsi, nous pouvons également conclure que $x \ll a$.

Ces remarques nous permettent d'effectuer un développement limité suivant x/a au premier ordre en 0 de l'équation (84). Cela donne

$$-\frac{\mathcal{G} M_{\odot}}{a^2} \left(1 + \frac{2x}{a} + o(x/a)\right) + \frac{\mathcal{G} M_T}{x^2} + \frac{\mathcal{G} M_{\odot}}{a^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0, \quad (87)$$

ce qui se simplifie en

$$-\frac{3\mathcal{G} M_{\odot} x}{a^3} + \frac{\mathcal{G} M_T}{x^2} + o(x/a) = 0. \quad (88)$$

On obtient donc

$$x \simeq a \left(\frac{M_T}{3M_{\odot}}\right)^{1/3} \simeq 1.5 \times 10^6 km, \quad (89)$$

soit environ 1 % de la distance Terre-Soleil. On peut noter que la résolution numérique de l'équation (86) conduit à une solution réelle très proche (à 10^{-2} près) de la valeur obtenue grâce au raisonnement précédent. Cependant, il est important de souligner, et nous l'admettrons ici⁸, que le point L_1 est un point d'équilibre instable.

Pour calculer la position du point L_2 , il suffit de modifier l'équation (84) et l'on obtient alors

$$-\frac{\mathcal{G} M_{\odot}}{(a+x')^2} - \frac{\mathcal{G} M_T}{x'^2} + \omega_T^2 (a+x') = 0, \quad (90)$$

avec $x' > 0$ la distance $L_2 T$. Le même raisonnement conduit au même résultat;

$$-\frac{3\mathcal{G} M_{\odot} x'}{a^3} + \frac{\mathcal{G} M_T}{x'^2} + o(x'/a) = 0, \quad (91)$$

c'est-à-dire

$$x' \simeq a \left(\frac{M_T}{3M_{\odot}}\right)^{1/3}. \quad (92)$$

Le point L_2 , qui est aussi un point d'équilibre instable, est donc le point symétrique de L_1 par rapport au centre de la Terre.

Enfin, la position du point L_3 est déterminée par l'équation

$$\frac{\mathcal{G} M_{\odot}}{(a-z)^2} + \frac{\mathcal{G} M_T}{z^2} + \omega_T^2 (a-z) = 0, \quad (93)$$

⁸L'accélération de Coriolis joue un rôle essentiel dans l'étude de la stabilité des points.

avec $z > 0$ la distance L_3T . Le point L_3 étant plus près du Soleil que de la Terre, l'attraction terrestre en L_3 peut être négligée devant celle du Soleil. L'équation (93) se simplifie alors et devient

$$\frac{\mathcal{G} M_{\odot}}{(a-z)^2} + \omega_T^2 (a-z) \simeq 0, \quad (94)$$

dont la solution, via la troisième loi de Képler, est $z = 2a$. Le point de Lagrange L_3 est donc le point symétrique du centre de la Terre par rapport au centre du Soleil. C'est également un point d'équilibre instable.

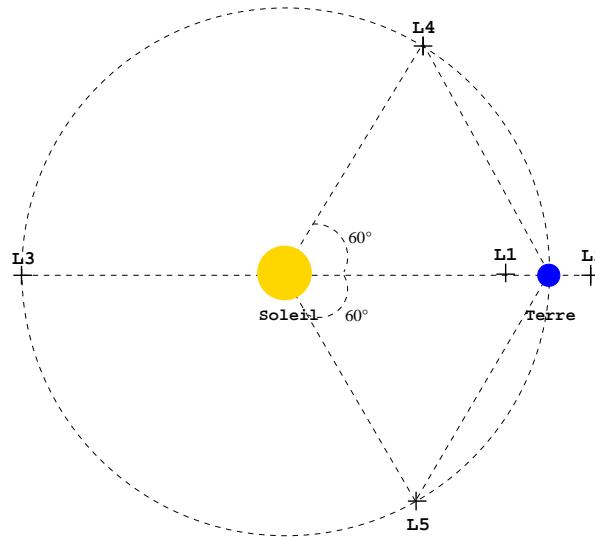


Figure 3: Position des différents points de Lagrange du système Terre-Soleil. L'échelle des distances n'est pas respectée.

Le calcul des points de Lagrange L_4 et L_5 peut paraître plus complexe. Cependant, une solution élégante consiste à considérer le cas général de la configuration d'équilibre gravitationnel d'un système de trois masses quelconques (voir la Fig. 4). On notera G , le centre de gravité des trois masses non alignées m_1 , m_2 et m_3 . Ce système est en équilibre lorsque la distance entre deux masses quelconques du système reste constante au cours du temps. La première relation intéressante vient directement de la définition du barycentre (avec les notations de la Fig. 4);

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = \vec{0}. \quad (95)$$

Elle nous permet, par exemple, de réexprimer \vec{r}_1 ;

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{m_1 m_2 m_3} (m_2 \vec{c} + m_3 \vec{a}) . \quad (96)$$

Nous pouvons également exprimer la relation fondamentale de la dynamique pour la masse m_1 qui, dans son référentiel tournant, est telle que

$$-\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{c^3} \vec{c} - \frac{\mathcal{G} m_1 m_3}{a^2} \vec{a} + m_1 \omega^2 \vec{r}_1 = \vec{0} , \quad (97)$$

avec ω la vitesse angulaire des trois masses autour de G . D'après l'équation (96), l'équation précédente devient;

$$\left(\frac{\mathcal{G} m_2}{c^3} - \frac{\omega^2}{m_1 m_2 m_3} \right) \vec{c} + \left(\frac{\mathcal{G} m_3}{a^3} - \frac{\omega^2}{m_1 m_2 m_3} \right) \vec{a} = \vec{0} . \quad (98)$$

Les vecteurs \vec{a} et \vec{c} n'étant pas colinéaires, on obtient le système;

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{G} m_2}{c^3} - \frac{\omega^2}{m_1 m_2 m_3} &= 0 , \\ \frac{\mathcal{G} m_3}{a^3} - \frac{\omega^2}{m_1 m_2 m_3} &= 0 . \end{aligned} \quad (99)$$

Autrement dit, le rapport a/c est égal à 1. Ce calcul étant identique pour les deux autres masses, le triangle formé par les trois masses est donc équilatéral. Les points de Lagrange L_4 et L_5 du système Terre-Soleil sont donc situés sur l'orbite terrestre aux deux positions possibles permettant de former deux triangles équilatéraux (voir la Fig. 3). Ce sont des points d'équilibre stable. De plus, leur position relative est indépendante de la masse que l'on y place: seule la taille du triangle et sa vitesse de rotation autour du centre de gravité changeront.

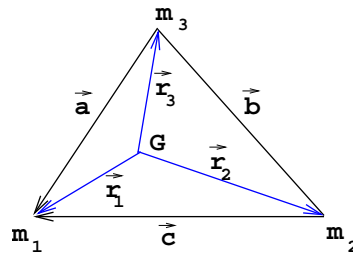


Figure 4: Quelle est la configuration d'équilibre gravitationnel d'un système de trois masses ?

Les points de Lagrange peuvent être mis en évidence par le tracé des lignes équipotentielles associées au potentiel effectif produit par deux masses dans le référentiel tournant (voir la Fig. 5). Pour deux masses m_1 et m_2 placées respectivement en M_1 et M_2 et dont le centre de gravité est en G , ce potentiel effectif, en un point M quelconque, s'écrit:

$$U_{\text{eff}}(M) = -\frac{\mathcal{G} m_1}{\|MM_1\|} - \frac{\mathcal{G} m_2}{\|MM_2\|} - \frac{1}{2} \omega^2 \|GM\|^2, \quad (100)$$

avec (voir la section (2.5));

$$\omega^2 = \frac{\mathcal{G} (m_1 + m_2)}{\|M_1 M_2\|^3}. \quad (101)$$

Dans le référentiel tournant, la force qui s'exerce sur une masse ponctuelle, négligeable devant m_1 et m_2 et placée en M , est bien sûr: $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(U_{\text{eff}})$.

Remarques:

(a) Dans le système Terre-Soleil, le satellite SOHO, dédié à l'observation du Soleil, a été placé en orbite autour du point L_1 depuis 1995. Le satellite WMAP, chargé d'observer le fond diffus cosmologique depuis 2001, est, quant à lui, en orbite autour de L_2 .

(b) Dans le système Jupiter-Soleil, plusieurs centaines d'astéroïdes dits *troyens* sont en orbite stable aux points L_4 et L_5 . Certains ont une taille de plusieurs centaines de kilomètres.

(c) Dans le système Terre-Lune, deux gros nuages de poussière, mesurant environ quatre fois le diamètre de la Lune, ont été découverts aux points L_4 et L_5 .

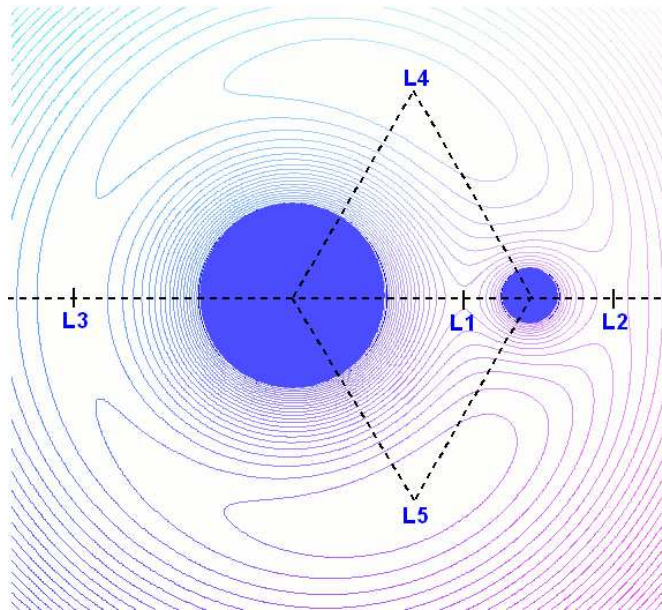


Figure 5: Equipotentiels gravitationnelles ($U_{\text{eff}} = \text{constante}$) dans le référentiel tournant: le potentiel effectif est la somme du potentiel gravitationnel de chacun des deux astres et du potentiel lié à l'accélération d'entraînement. Les points L_4 et L_5 sont en équilibre stable sur des îlots alors que les points L_1 , L_2 et L_3 sont en équilibre instable sur des cols. Le tracé a été effectué avec deux astres dont le rapport de masse était égal à 10.

Exercice 6 - Les effets de marée

La forme des corps massifs, qu'elle soit quasi-sphérique comme dans le cas d'une étoile ou irrégulière comme dans le cas d'un petit astéroïde, n'exerce aucune influence sur le mouvement du centre de gravité de chacun de ces corps et cela, même s'ils sont en interaction gravitationnelle. En revanche, le mouvement des corps et leur interaction gravitationnelle vont avoir un effet certain sur leur forme: ce sont justement les effets de marée. Plus précisément, considérons deux astres A et B liés gravitationnellement: l'astre B exerce, sur tout élément de matière de l'astre A , une force gravitationnelle qui dépend de la distance entre l'élément de matière et le centre de gravité de B . Autrement dit, puisque la distance varie suivant l'élément de matière considéré, cette force gravitationnelle va être d'intensité différente en chaque point de A . Ainsi, le corps A tend à se déformer. Le corps B subit également les mêmes effets

de la part de A .

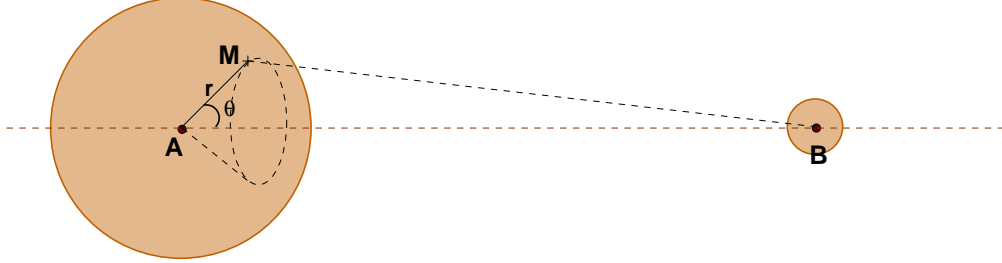


Figure 6: Phénomène des marées: suivant la position du point M , la force gravitationnelle exercée par l'astre B est différente. Dans le référentiel non-galiléen associé au point A , il en résulte une force de marée qui tend à déformer l'astre A .

En un point M quelconque à l'intérieur de l'astre A , évaluons le champ gravitationnel produit par l'astre B , de masse M_B . Avec les notations de la figure 6, le potentiel gravitationnel, produit par l'astre B en M , s'écrit:

$$V_B(M) = -\frac{\mathcal{G} M_B}{\|MB\|}, \quad (102)$$

avec $\|MB\| = (D^2 + r^2 - 2 D r \cos \theta)^{1/2}$ et $D = \|AB\|$. En coordonnées sphériques de centre A et d'axe (AB) , on déduit facilement le champ gravitationnel, noté $\vec{G}_B(M)$, produit par B en M :

$$\vec{G}_B(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V(M)) = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta, \quad (103)$$

avec

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{\mathcal{G} M_B (D \cos \theta - r)}{(D^2 + r^2 - 2 D r \cos \theta)^{3/2}}, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= -\frac{\mathcal{G} M_B (D \sin \theta)}{(D^2 + r^2 - 2 D r \cos \theta)^{3/2}}. \end{aligned}$$

La différence entre ce champ et le champ gravitationnel au centre de gravité de l'astre A , supposé en A , est égale à l'accélération d'un élément de matière placé en M dans le référentiel associé au point A ⁹. Cette accélération (ou force de marée par unité de

⁹Ce référentiel est non-galiléen. Il est soumis à une accélération d'entraînement dont l'intensité est égale à $\mathcal{G} M_B/D^2$.

masse), notée $\|\Delta\vec{G}\|$, représente les effets de marée au point M . Elle est maximale lorsque M est situé sur l'axe (AB) ($\theta = 0$ ou π):

$$\Delta\vec{G}_{max} = \vec{G}_B(M, \theta = 0) - \vec{G}_B(A) = \mathcal{G} M_B \left(\frac{1}{(D-r)^2} - \frac{1}{D^2} \right) \vec{e}_r. \quad (104)$$

Lorsque $r \ll D$, un développement limité de $\Delta\vec{G}_{max}$ donnera

$$\Delta\vec{G}_{max}(\theta = 0) = \frac{\mathcal{G} M_B}{D^2} \left[\frac{2r}{D} + 3 \left(\frac{r}{D} \right)^2 + 4 \left(\frac{r}{D} \right)^3 + o \left(\left(\frac{r}{D} \right)^3 \right) \right] \vec{e}_r(\theta = 0). \quad (105)$$

De même, on aura

$$\Delta\vec{G}_{max}(\theta = \pi) = \frac{\mathcal{G} M_B}{D^2} \left[\frac{2r}{D} + 3 \left(\frac{r}{D} \right)^2 - 4 \left(\frac{r}{D} \right)^3 + o \left(\left(\frac{r}{D} \right)^3 \right) \right] \vec{e}_r(\theta = \pi). \quad (106)$$

Bien qu'égalées jusqu'au second ordre, ces deux valeurs diffèrent au-delà: ainsi, lorsque les deux astres sont suffisamment proches, l'accélération est plus importante sur le côté situé entre les deux astres (voir la Fig. 7).

Remarques:

(a) Il est difficile d'évaluer précisément la déformation des différents astres que provoquent les forces de marée. Cette dernière, en effet, dépend fortement de la structure interne (densité, viscosité...) de l'astre considéré. De plus, des phénomènes de résonance peuvent apparaître localement: les hauteurs des différentes marées observées sur Terre, et qui peuvent atteindre plusieurs mètres, ne sont pas directement liées à la force de marée qui ne produirait que des élévations du niveau de l'eau de l'ordre de quelques dizaines de centimètres. Les hauteurs des marées terrestres sont le résultat d'effets de résonance dépendant de la structure géographique locale (forme de la côte, forme de l'étendue d'eau...) favorisant ou non l'élévation du niveau de l'eau dans l'endroit considéré.

(b) La distance minimale à laquelle peuvent s'approcher deux astres sans que l'un des deux ne soit disloqué par les forces de marée est appelée *limite de Roche*. Sans autre force de cohésion interne que la gravitation, cette limite de Roche est atteinte lorsque le champ gravitationnel à la surface d'un des deux astres est égal à la force de marée produite par l'autre astre. Dans ces hypothèses, la limite de Roche D_R pour l'astre A , par exemple, s'écrit simplement

$$D_R = \left(2 \frac{M_B}{M_A} \right)^{1/3} r_A, \quad (107)$$

si l'on néglige la déformation, due aux forces de marée, de l'astre A . La détermination de la limite de Roche, en tenant compte de cette déformation, ne peut se faire que

numériquement. On obtient alors, dans le cas d'un astre fluide,

$$D_R \simeq 2.42 \left(\frac{\rho_B}{\rho_A} \right)^{1/3} r_B, \quad (108)$$

avec ρ_A et ρ_B les masses volumiques moyennes des astres A et B .

A	B	D_{AB} (km)	r_A (km)	r_B (km)	$\ \vec{a}_{max}\ (A \rightarrow B)$	$\ \vec{a}_{max}\ (B \rightarrow A)$
Terre	Lune	384 000	6378	1738	2.4×10^{-5}	1.1×10^{-6}
Soleil	Terre	1.50×10^8	695 000	6378	5.1×10^{-7}	1.7×10^{-10}
Jupiter	Soleil	7.50×10^8	71 400	695 000	4.2×10^{-10}	4.5×10^{-8}
Io	Jupiter	422 000	1820	71 400	1.1×10^{-5}	6.1×10^{-3}
Titan	Saturne	1.22×10^6	2575	60 000	5.7×10^{-7}	1.1×10^{-4}
Mercure	Soleil	5.79×10^7	2436	695 000	1.6×10^{-10}	3.3×10^{-3}

Table 1: Comparaison des accélérations maximales ($\|\vec{a}_{max}\|$ en $m \cdot s^{-2}$) dues aux forces de marée dans différents systèmes gravitationnels du Système Solaire. Plusieurs points sont intéressants: tout d'abord, on constate que la force maximale de marée que la Lune exerce sur la Terre est deux fois plus importante que celle exercée par le Soleil. On peut d'ailleurs remarquer l'influence négligeable du Soleil dans les effets de marée, sauf en ce qui concerne Mercure sur lequel le Soleil exerce l'une des plus importantes forces de marée du Système Solaire. Enfin, la force de marée exercée par Jupiter sur Io est relativement très forte (environ 6000 fois celle exercée par la Lune sur la Terre): les déformations de Io, produites par cette force de marée, seraient ainsi à l'origine du volcanisme observé sur ce satellite.

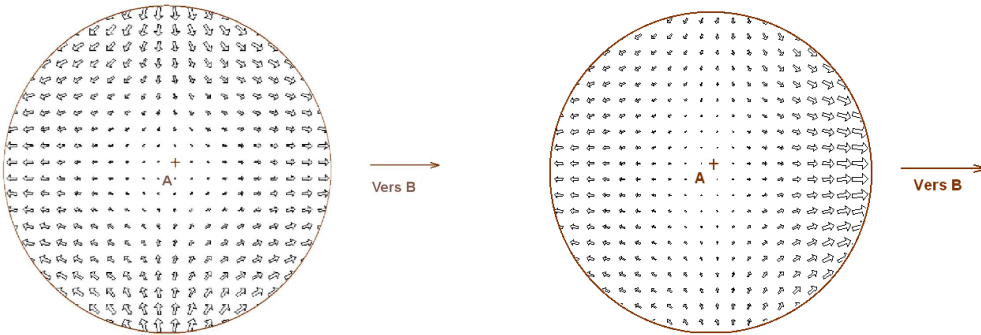


Figure 7: Champ de forces de marée dues à l'astre B , dans le référentiel associé au point A : chaque flèche a une longueur proportionnelle à l'intensité de la force de marée ($\|\Delta\vec{G}\|$) au point considéré. A gauche: l'astre B est situé à une distance $D \gg r_A$, le rayon de l'astre A . Le champ de forces apparaît symétrique par rapport au plan passant par A et perpendiculaire à l'axe (AB) . A droite: l'astre B est plus proche de l'astre A . Le champ de forces est nettement dissymétrique: l'accélération est plus importante pour un élément de matière situé entre les points A et B .