Intégrales dépendant d'un paramètre

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, A une partie de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition :
(1) Une application $F : A \times I \to \mathbb{K}$, vérifie l'**hypothèse de domination** (notée HD) sur $A \times I$ **ssi** il existe une application $\varphi : I \to \mathbb{R}$, continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |F(x,t)| \leq \varphi(t).$$

(2) Une application $F : A \times I \to \mathbb{K}$, vérifie l'**hypothèse de domination locale** (notée HDL) sur $A \times I$ **ssi**, pour tout compact $K \subset A$, il existe une application $\varphi : I \to \mathbb{R}$, continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in K \times I,\ |F(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Définition :
(1) Une application $F : A \times I \to \mathbb{K}$, est **continue par rapport à la première variable ssi**, pour tout $t \in I$, l'application de A dans $\mathbb{K}$, $F_t : x \mapsto F(x,t)$ est continue sur A.
(2) Une application $F : A \times I \to \mathbb{K}$, est **continue par morceaux par rapport à la seconde variable ssi**, pour tout $x \in A$, l'application de I dans $\mathbb{K}$, $F_x : t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux sur I.

Théorème de continuité : Soit une application $F : A \times I \to \mathbb{K}$.

$$\textbf{Si} \begin{cases} F \text{ est continue par rapport à la première variable,} \\ F \text{ est continue par morceaux par rapport à la seconde variable,} \\ F \text{ vérifie HD } \textbf{ou} \text{ HDL sur } A \times I, \end{cases}$$

alors

(1) $\forall x \in A$, $F_x : t \mapsto F(x,t)$ est intégrable sur I,

(2) L'application f de A dans $\mathbb{K}$, telle que $f : x \mapsto \displaystyle\int_I F(x,t)\,\mathrm{d}t$, est continue sur A.

Théorème de dérivation : Soit une application $F : A \times I \to \mathbb{K}$.

$$\textbf{Si} \begin{cases} \forall x \in A,\ F_x : t \mapsto F(x,t) \text{ est intégrable sur } I. \\ \partial F/\partial x \text{ existe, et est continue par rapport à la première variable,} \\ \partial F/\partial x \text{ est continue par morceaux par rapport à la seconde variable,} \\ \partial F/\partial x \text{ vérifie HD } \textbf{ou} \text{ HDL sur } A \times I, \end{cases}$$

alors

(1) $\forall x \in A$, $\dfrac{\partial F_x}{\partial x} : t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I,

(2) L'application f de A dans $\mathbb{K}$, telle que $f : x \mapsto \displaystyle\int_I F(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et,

$$\forall x \in A,\ f'(x) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème de dérivation généralisé : Soient une application $F : A \times I \to \mathbb{K}$, et $n \in \mathbb{N}^\star$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A,\, F_x : t \mapsto F(x,t) \text{ est intégrable sur } I. \\ \partial F/\partial x,\, \ldots,\, \partial^n F/\partial x^n \text{ existent, et sont continues par rapport à la première variable,} \\ \partial F/\partial x,\, \ldots,\, \partial^n F/\partial x^n \text{ sont continues par morceaux par rapport à la seconde variable,} \\ \partial^n F/\partial x^n \text{ vérifie HD } \textbf{ou} \text{ HDL sur } A \times I, \end{array} \right.$

alors

(1) $\forall x \in A, \forall k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial F_{k,x}}{\partial x} : t \mapsto \dfrac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur I,

(2) L'application f de A dans $\mathbb{K}$, telle que $f : x \mapsto \displaystyle\int_I F(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^n$ sur A et,

$$\forall x \in A,\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ f^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple classique : On définit la fonction Γ d'Euler par :

$$\begin{array}{rcl} \Gamma :]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \exp(-t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[\,,\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}\, \exp(-t)\,\mathrm{d}t.$$

Autres propriétés :
(1) $\forall x \in]0,+\infty[\,, \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.
(2) $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.
(3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.