[Problème] Géodésiques dans l'espace-temps de Schwarzschild

Denis Gialis*

On considère un espace-temps de Schwarzschild muni de la métrique,

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - r^2 \,\mathrm{d}\theta^2 - r^2 \,\sin^2\theta \,\mathrm{d}\varphi^2 \,,$$

avec $r_s = 2\,\mathcal{G}\,M/c^2$.

A - Géodésiques des particules massives

A-1 - Déterminer les équations des géodésiques, en utilisant le principe variationnel, pour une particule massive.

A-2 - Montrer que l'équation de la trajectoire d'une particule, de masse m non nulle, dans le plan équatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$, peut se mettre sous la forme,

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{c^2\, r_s}{2h^2} + \frac{3}{2}\, r_s\, u^2 \,,$$

avec $u \equiv 1/r$, et $h \equiv r^2\,\dot{\varphi}$.

A-3 - Exprimer la quadrivitesse d'une particule massive en chute libre selon un mouvement radial, et arrivant de l'infini sans vitesse initiale, c'est-à-dire mesurant un temps propre τ, tel que $\tau \to -\infty$ lorsque $r \to +\infty$. En déduire l'expression de r en fonction de τ, puis de t, la coordonnée temporelle d'un observateur stationnaire situé à grande distance de l'objet central, en fonction de r. Quelle durée de voyage va mesurer la particule pour passer de $r(\tau = 0)$ à $r = 0$? Que se passe-t-il pour l'observateur ?

A-4 - Déterminer l'énergie totale et le moment cinétique spécifique d'une particule massive en chute libre selon un mouvement circulaire uniforme en $r = r_0$. Quelle condition doit vérifier r_0 pour qu'une telle trajectoire existe ?

A-5 - Montrer que pour une particule massive en chute libre autour d'une masse centrale, on peut écrire

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = K \,,$$

avec $V_{\text{eff}}(r)$, le potentiel effectif par unité de masse, et K une constante que l'on précisera. Déterminer quelle valeur de r correspond à la dernière orbite circulaire stable.

*Docteur en Astrophysique - Université J. Fourier, Grenoble.

B - Géodésiques des particules de masse nulle

B-1 - Déterminer les équations des géodésiques, en utilisant le principe variationnel, pour une particule de masse nulle comme le photon.

B-2 - Montrer que l'équation de la trajectoire d'une particule de masse nulle, dans le plan équatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$, peut se mettre sous la forme,

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{3}{2}\, r_s\, u^2 \,,$$

avec $u \equiv 1/r$. En déduire qu'il existe une unique trajectoire circulaire pour une telle particule.

B-3 - Déterminer l'équation du mouvement d'un photon se déplaçant uniquement suivant la coordonnée r.

B-4 - Montrer que, pour une particule de masse nulle, on peut écrire

$$\frac{\dot{r}^2}{h^2} + V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{b^2} \,, \tag{1}$$

en explicitant $V_{\text{eff}}(r)$ et la constante b.
Discuter de l'évolution de r pour une particule arrivant de l'infini, suivant la valeur de b, et exprimer son angle de déviation sous la forme d'une intégrale.

B-5 - Exprimer la déviation d'un rayon lumineux arrivant de l'infini lorsque $b \gg (3\sqrt{3}/2)\, r_s$.

C - Effet Shapiro

On considère un photon qui est émis par un observateur A depuis une distance r_1, qui passe au plus près du corps central à une distance $r_0 \ll r_1$, et qui est renvoyé vers A au point B situé à une distance $r_2 \gg r_0$.

C-1 - En utilisant l'équation (1), montrer que

$$\frac{1}{(1 - r_s/r)^3} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{c^2\, b^2}{r^2} - \frac{c^2}{1 - r_s/r} = 0 \,.$$

En déduire l'expression de r_0, en fonction de b et $r_s \ll r_0$, au premier ordre en r_s.

C-2 - Exprimer la différence de coordonnées temporelles, $\Delta t(r, r_0)$, entre un point de la ligne d'univers du photon situé à une distance $r \gg r_s$, et le point d'approche minimale en $r_0 \gg r_s$. Effectuer un développement au premier ordre en r_s/r pour obtenir

$$c\,\Delta t(r, r_0) \simeq (r^2 - r_0^2)^{1/2} + r_s\, \ln\left[\frac{r + (r^2 - r_0^2)^{1/2}}{r_0}\right] + \frac{r_s}{2}\left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{1/2} .$$

C-3 - En déduire le retard temporel, mesuré par l'observateur A, par rapport au cas où l'espace-temps serait considéré comme étant plat. C'est l'*effet Shapiro* ou retard de l'écho radar.

Solutions

A-1 - Suivant la métrique de Schwarzschild, nous pouvons considérer le lagrangien suivant, noté L^2, tel que

$$L^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 - \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2\right),$$

dans lequel les dérivées temporelles sont prises par rapport au temps propre τ, paramètre de la ligne d'univers de la particule massive : autrement dit, on notera $\dot{x}^\mu = \mathrm{d}x^\mu / \mathrm{d}\tau$.
Le principe variationnel s'écrivant $\delta \int \mathcal{L}^2 \, \mathrm{d}\tau = 0$, les équations d'Euler-Lagrange donnent,

$$\partial_{x^\mu} \mathcal{L}^2 - \mathrm{d}_\tau \partial_{\dot{x}^\mu} \mathcal{L}^2 = 0\,,$$

avec $x^\mu \in \{t, r, \theta, \varphi\}$, ce qui est équivalent au système,

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} &= C_1\,, \\
\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{r_s\, c^2}{2\, r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-2} \frac{r_s}{2\, r^2} \dot{r}^2 - r \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2\right) &= 0\,, \\
\ddot{\theta} + \frac{2\, \dot{r}\, \dot{\theta}}{r} - \sin\theta \, \cos\theta \, \dot{\varphi}^2 &= 0\,, \\
r^2 \, \sin^2\theta \, \dot{\varphi} &= C_2\,,
\end{aligned}$$

avec C_1 et C_2, deux constantes que nous allons identifier.

A-2 - La troisième équation admet pour solution particulière $\theta = \pi/2$: la métrique de Schwarzschild étant, par construction, à symétrie sphérique, cela montre que les trajectoires des particules sont *planes* ou, plus précisément, sont contenus dans une hypersurface coordonnée d'équation $\theta = \theta_0$. On peut étudier les géodésiques, par exemple, dans le plan ou hypersurface d'équation $\theta = \pi/2$, et généraliser les résultats obtenus à n'importe quelle hypersurface coordonnée. Les équations précédentes se simplifient alors pour obtenir le système :

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} &= C_1\,, \\
\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{r_s\, c^2}{2\, r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-2} \frac{r_s}{2\, r^2} \dot{r}^2 - r\, \dot{\varphi}^2 &= 0\,, \\
r^2\, \dot{\varphi} &= h\,,
\end{aligned}$$

avec $h = r^2\, \dot{\varphi} = C_2$. Une autre équation peut remplacer la deuxième équation de ce système, qui est donnée par la métrique

$$\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\tau^2} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2\, \dot{\varphi}^2 = c^2\,.$$

En utilisant les deux autres équations, on peut éliminer les coordonnées t et φ, pour obtenir

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \frac{c^2\, r_s}{r} = c^2 \left(C_1^2 - 1\right). \tag{2}$$

Par ailleurs, d'après ce système, et par conservation du vecteur quadri-impulsion, $p^\mu = m\, \dot{x}^\mu$, d'une particule, de masse m, le long d'une géodésique, on peut écrire

$$\begin{aligned}
p_0 &= m\, g_{00}\, \dot{t} = C_1\, m\, c^2\,, \\
p_3 &= m\, g_{33}\, \dot{\varphi} = -m\, h\,.
\end{aligned}$$

Un observateur au repos en l'infini, de quadri-vecteur vitesse $u^\mu = (1,0,0,0)$ mesurera pour cette particule une énergie E égale à $p_\mu\, u^\mu$, c'est-à-dire $C_1\, m\, c^2$. La constante C_1 n'est donc rien d'autre que le rapport entre l'énergie totale de la particule sur son orbite, et son énergie au repos : $C_1 = E/m\, c^2$. Quant à la constante h, elle peut être définie comme le moment cinétique spécifique de la particule.
Enfin, on peut ré-exprimer $\dot{r}$ comme étant

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{h}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\,,$$

ce qui permet de ré-écrire l'équation (2) sous la forme

$$\left(\frac{h}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} = c^2\,(C_1^2 - 1) + \frac{c^2\, r_s}{r} + \frac{h^2\, r_s}{r^3}\,.$$

En posant $u \equiv 1/r$, on obtient facilement

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2}{h^2}\,(C_1^2 - 1) + \frac{c^2\, r_s\, u}{h^2} + r_s\, u^3\,.$$

En dérivant par rapport à φ, on arrive à l'expression demandée

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{c^2\, r_s}{2h^2} + \frac{3}{2}\, r_s\, u^2\,. \tag{3}$$

A-3 - Soit $[\dot{x}^\mu]$, le quadri-vecteur vitesse de la particule. La particule est sans vitesse initiale à l'infini, donc son énergie est $E = m\, c^2$, c'est-à-dire $C_1 = 1$: cela implique

$$\dot{x}^0 = \dot{t} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\,.$$

Le mouvement considéré est purement radial donc $\dot{x}^3 = \dot{\varphi} = 0$, $\dot{x}^2 = \dot{\theta} = 0$, et $h = 0$. L'équation (2) devient donc

$$\dot{x}^1 = \dot{r} = -c\,\sqrt{\frac{r_s}{r}}\,.$$

Cette équation s'intègre facilement pour obtenir

$$r(\tau) = \left(-\frac{3c}{2}\,\sqrt{r_s}\,\tau + r(0)^{3/2}\right)^{2/3}\,. \tag{4}$$

Enfin, comme on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -c\,\sqrt{\frac{r_s}{r}}\,\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\,,$$

on trouve, en intégrant,

$$t(r) = \frac{2}{3c}\,\left(\sqrt{\frac{r_0^3}{r_s}} - \sqrt{\frac{r^3}{r_s}}\right) + \frac{2r_s}{c}\,\left(\sqrt{\frac{r_0}{r_s}} - \sqrt{\frac{r}{r_s}}\right) + \frac{r_s}{c}\,\ln\left[\frac{(\sqrt{r/r_s}+1)\,(\sqrt{r_0/r_s}-1)}{(\sqrt{r/r_s}-1)\,(\sqrt{r_0/r_s}+1)}\right]\,, \tag{5}$$

avec $r = r_0$ lorsque $t = 0$. On remarque que cette expression n'est valable que pour $r > r_s$.
D'après la relation (4), pour passer de $r = r(0)$ à $r = 0$, la particule va mesurer une durée propre finie qui est égale à $(2/3c)\,\sqrt{r(0)^3/r_s}$. Pour l'observateur, et d'après la relation (5), $t \to +\infty$,

lorsque $r \to r_s$: la particule va donc mettre une durée infinie pour arriver à $r = r_s$.

A-4 - Pour une orbite circulaire de rayon r_0, $u = 1/r_0$, donc l'équation (3) devient

$$1/r_0 = \frac{c^2\, r_s}{2h^2} + \frac{3}{2}\, r_s\, (1/r_0)^2\,.$$

On en déduit le moment cinétique spécifique,

$$h = c\,\sqrt{\frac{r_s\, r_0^2}{2\,(r_0 - (3/2)\, r_s)}}\,,$$

et l'équation (2) donne alors l'énergie,

$$E = C_1\, m\, c^2 = \frac{(1 - r_s/r_0)\, m\, c^2}{\sqrt{1 - (3/2) r_s/r_0}}\,.$$

Enfin, comme $r_0^2\, \dot{\varphi} = h$, on a

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{r_s\, c^2}{2\, r_0^2\, (r_0 - (3/2) r_s)}\,,$$

ce qui montre que, pour que l'orbite circulaire existe, r_0 doit être tel que

$$r_0 > \frac{3}{2}\, r_s\,.$$

A-5 - L'équation (2) peut se ré-écrire sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = K\,,$$

avec le potentiel effectif,

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{c^2}{2} - \frac{r_s\, c^2}{2r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{r_s\, h^2}{2r^3} = \frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(1 + \frac{h^2}{c^2\, r^2}\right)\,,$$

et l'on peut définir une énergie *mécanique* par unité de masse, qui est bien une constante du mouvement, par

$$K = \frac{c^2}{2}\left(\frac{E}{m\, c^2}\right)^2\,.$$

Contrairement au potentiel effectif de la dynamique newtonienne, le potentiel effectif relativiste peut présenter un maximum pour une coordonnée r finie, et tend vers $-\infty$ lorsque $r \to 0$.
Pour une orbite circulaire, r étant constant, on a la condition $\mathrm{d}V_{\text{eff}}/\mathrm{d}r = 0$, c'est-à-dire,

$$r_s\, c^2\, r^2 - 2\, h^2\, r + 3\, r_s\, h^2 = 0\,.$$

Les deux extrema du potentiel effectif sont donc situés en

$$r_{\text{ext}} = \frac{h}{r_s\, c^2}\left(h \pm \sqrt{h^2 - 3\, r_s^2\, c^2}\right)\,.$$

Ils n'existent que si $h \geq \sqrt{3}\, r_s\, c$, et sont confondus si $h = \sqrt{3}\, r_s\, c$.
De plus, la condition de stabilité pour l'orbite circulaire est donnée par $\mathrm{d}^2 V_{\text{eff}}/\mathrm{d}r^2 = 0$, c'est-à-dire,

$$r_s\, c^2\, r^2 - 3\, h^2\, r + 6\, r_s\, h^2 = 0\,.$$

La dernière orbite circulaire stable correspond donc la seule coordonnée r, vérifiant ces deux conditions, qui est $r = 3\,r_s$.

B-1 - Le calcul des géodésiques est identique à celui de la question A-1, mais les dérivées ne sont plus prises par rapport au temps propre de la particule, car celui-ci n'existe pas pour une particule de masse nulle : on choisit donc, à la place de τ, un paramètre affine quelconque noté λ pour la ligne d'univers de la particule. On a donc

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\dot{t} &= C_1\,,\\
\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\ddot{r}+\frac{r_s\,c^2}{2\,r^2}\,\dot{t}^2-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-2}\frac{r_s}{2\,r^2}\,\dot{r}^2-r\,(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) &= 0\,,\\
\ddot{\theta}+\frac{2\,\dot{r}\,\dot{\theta}}{r}-\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 &= 0\,,\\
r^2\,\sin^2\theta\,\dot{\varphi} &= C_2\,,
\end{aligned}$$

avec C_1 et C_2, deux constantes qu'il reste à identifier.

B-2 - Le raisonnement est le même que pour la question A-2 ; dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$, on a le système suivant

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\dot{t} &= C_1\,,\\
\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\ddot{r}+\frac{r_s\,c^2}{2\,r^2}\,\dot{t}^2-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-2}\frac{r_s}{2\,r^2}\,\dot{r}^2-r\,\dot{\varphi}^2 &= 0\,,\\
r^2\,\dot{\varphi} &= h\,,
\end{aligned}$$

avec $h = r^2\,\dot{\varphi} = C_2$. Là encore, la deuxième équation peut être remplacée par $\mathrm{d}s^2/\mathrm{d}\lambda^2 = 0$, c'est-à-dire,

$$\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\dot{t}^2-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2-r^2\,\dot{\varphi}^2 = 0\,. \tag{6}$$

Avec les deux autres équations, on obtient facilement

$$\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right) = c^2\,C_1^2\,, \tag{7}$$

ce qui, lorsqu'on change la variable r par $1/u$, et qu'on dérive par rapport à φ, conduit à

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}+u = \frac{3}{2}\,r_s\,u^2\,. \tag{8}$$

Pour une orbite circulaire $1/u = r_0$ est donc une constante unique qui est égale à $(3/2)\,r_s$.

B-3 - Lors d'un mouvement radial, $\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$, et la relation (6) devient donc

$$\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\dot{t}^2-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 = 0\,,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\,.$$

Le signe du membre de droite correspond aux deux sens de parcours possibles pour le photon. En intégrant, on obtient

$$c\,t = \pm\left(r+r_s\,\ln\left|\frac{r}{r_s}-1\right|\right)+\mathrm{constante}\,.$$

B-4 - L'équation (7) se ré-écrit

$$\frac{\dot{r}^2}{h^2} + V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{b^2}\,, \tag{9}$$

avec le potentiel effectif,

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{r^2}\,\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\,,$$

et, la constante $b = h/(c\,C_1)$. Le potentiel V_{eff} ne possède qu'un extremum, qui est un maximum, lorsque $r = (3/2)\,r_s$: il vaut alors $4/(27r_s^2)$. L'unique orbite circulaire définie à la question B-2 est donc instable.

Par ailleurs, comme $h = r^2\,\dot{\varphi}$, on déduit

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r^2}\,\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\,\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]^{-1/2}\,,$$

ce qui implique, lorsque $r \gg b > r_s$, $\mathrm{d}\varphi = \pm(b/r^2)\,\mathrm{d}r$, c'est-à-dire $r = b/\varphi$, avec $\varphi \to 0$ pour $r \to +\infty$. Ce résultat n'est valable que pour $\varphi \ll 1$.

Cependant, lorsque $r \gg r_s$, on peut considérer que $(3/2)\,r_s\,u^2$ est négligeable devant les autres termes de l'équation (8), ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = 0\,,$$

ce qui conduit à $r = A/\sin\varphi$, avec la condition $\varphi \to 0$ pour $r \to +\infty$, et A une constante. La comparaison avec le résultat précédent montre que $A = b$. La constante b peut donc être définie comme le paramètre d'impact de l'orbite de la particule lorsqu'elle arrive ou repart à l'infini.

Ainsi, d'après la relation (9) :
(a) Si $1/b^2 > V_{\text{eff}}(r)$ pour tout r, c'est-à-dire si $b < (3\sqrt{3}/2)\,r_s$, la particule sans masse est capturée par l'objet central.
(b) Si $1/b^2 = V_{\text{eff}}(3\,r_s/2) = 4/(27r_s^2)$, la particule suit une orbite circulaire instable.
(c) Si la particule arrive de l'infini, et qu'il existe r_{min} tel que $1/b^2 = V_{\text{eff}}(r_{\text{min}})$, alors la particule ne peut pas s'approcher en-deçà de $r = r_{\text{min}}$, la distance minimale d'approche de la particule, et elle repart à l'infini. Dans ce cas, la déviation de la particule s'écrit

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\text{min}}}^{+\infty} \frac{1}{r^2}\,\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\,\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]^{-1/2}\,\mathrm{d}r\,.$$

B-5 - Lorsque $b \gg (3\sqrt{3}/2)\,r_s$, le rayon est faiblement dévié en atteignant la distance minimale d'approche. Nous avons vu que, dans l'équation (8), le terme de droite pouvait être négligé pour obtenir la solution $u = \sin\varphi/b$. Effectuons un développement perturbatif de cette équation, à l'ordre 1 en δu, en posant $u = \sin\varphi/b + \delta u$, avec $|\delta u| \ll u$: on obtient facilement l'équation,

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta u}{\mathrm{d}\phi^2} + \delta u \simeq \frac{3\,r_s\,\sin^2\varphi}{2\,b^2}\,.$$

Cette équation admet pour solution particulière,

$$\delta u = \frac{3\,r_s}{4\,b^2}\,\left(1 + \frac{1}{3}\,\cos 2\varphi\right)\,,$$

ce qui implique,

$$u = \frac{\sin\varphi}{b} + \frac{3\,r_s}{4\,b^2}\left(1 + \frac{1}{3}\,\cos 2\varphi\right).$$

Lorsque $r \to +\infty$, $\varphi \to 0$, et on a $\sin\varphi \simeq \varphi$ et $\cos 2\varphi \simeq 1$: on déduit donc, de l'équation précédente, $\varphi \simeq -r_s/b$. La déviation totale vaut donc $\delta\varphi = 2|\varphi| = 2r_s/b$.

C-1 - On exprime d'abord $\dot{r}^2 = (\mathrm{d}r/\mathrm{d}\lambda)^2$ en fonction de $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)^2$: d'après la première équation des géodésiques de la question B-1, on a

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{C_1^2}{(1-r_s/r)^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

En remplaçant $\dot{r}^2$ par cette expression dans l'équation (9), avec $b^2 = h^2/(c^2\,C_1^2)$, on obtient directement

$$\frac{1}{(1-r_s/r)^3}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{c^2\,b^2}{r^2} - \frac{c^2}{1-r_s/r} = 0\,. \tag{10}$$

En r_0, au point minimal d'approche, $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = 0$, donc r_0 obéit à l'équation

$$\frac{c^2\,b^2}{r_0^2} - \frac{c^2}{1-r_s/r_0} = 0\,,$$

c'est-à-dire,

$$r_0^3 - b^2\,r_0 + b^2\,r_s = 0\,.$$

Les racines de cette équation se trouvent analytiquement grâce, par exemple, à la méthode de Tartaglia, mais le calcul exact n'a aucun intérêt ici. On se propose plutôt de trouver une approximation de r_0 avec un développement perturbatif à l'ordre 1 en r_s. A l'ordre 0, comme $r_0 \gg r_s$, on trouve que $r_0 \simeq b$. Posons alors $r_0 = b + \delta r_0$, avec $|\delta r_0| \ll r_0$, pour trouver

$$b^3 + 3b^2\,\delta r_0 - b^3 - b^2\,\delta r_0 + b^2\,r_s \simeq 0\,,$$

autrement dit, $\delta r_0 \simeq -r_s/2$.

C-2 - En remplaçant $c^2\,b^2$ par $(c^2\,r_0^2)/(1-r_s/r_0)$ dans l'équation (10), on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = c\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left[1 - \frac{r_0^2\,(1-r_s/r)}{r^2\,(1-r_s/r_0)}\right]^{1/2},$$

ce qui implique,

$$c\,\Delta t(r,r_0) = \int_{r_0}^{r} \frac{1}{1-r_s/r}\left[1 - \frac{r_0^2\,(1-r_s/r)}{r^2\,(1-r_s/r_0)}\right]^{-1/2}\mathrm{d}r\,.$$

En développant l'intégrande au premier ordre en r_s/r, on trouve

$$\frac{1}{1-r_s/r}\left[1 - \frac{r_0^2\,(1-r_s/r)}{r^2\,(1-r_s/r_0)}\right]^{-1/2} = \frac{r}{(r^2-r_0^2)^{1/2}}\left[1 + \frac{r_s}{r} + \frac{r_s\,r_0}{2\,r\,(r+r_0)} + o\left(\left(\frac{r_s}{r}\right)^2\right)\right].$$

L'intégrale précédente peut donc être calculée, et on obtient

$$c\,\Delta t(r,r_0) \simeq (r^2-r_0^2)^{1/2} + r_s\,\ln\left[\frac{r + (r^2-r_0^2)^{1/2}}{r_0}\right] + \frac{r_s}{2}\left(\frac{r-r_0}{r+r_0}\right)^{1/2}.$$

C-3 - Dans le cas d'un espace-temps plat, la distance entre A et B s'écrit simplement $d_{AB} = (r_1^2 - r_0^2)^{1/2} + (r_2^2 - r_0^2)^{1/2}$. Dans notre cas, cette même distance est, d'après la question précédente, $c\,\Delta t(r_1, r_0) + c\,\Delta t(r_2, r_0)$. La différence de distance, sur l'aller-retour, se traduit par un retard sur les coordonnées temporelles pour A, qui est

$$\Delta t_A = 2\,\left[\Delta t(r_1, r_0) + \Delta t(r_2, r_0) - d_{AB}/c\right]\,.$$

En supposant que $r_1 \gg r_0$ et $r_2 \gg r_0$, on a

$$c\,\Delta t(r_i, r_0) - (r_i^2 - r_0^2)^{1/2} \quad \simeq \quad r_s\,\left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)\right]\,,$$

pour $i \in \{1, 2\}$. Le retard temporel peut alors s'écrire

$$\Delta t_A = \frac{2\,r_s}{c}\,\left[1 + \ln\left(\frac{r_1\,r_2}{r_0^2}\right)\right]\,.$$

L'observateur en A mesurera donc un retard sur son horloge égal à

$$\Delta\tau_A = (1 - r_s/r_1)^{1/2}\,\Delta t_A\,.$$

Comme $r_1 \gg r_s$, on peut simplement dire que $\Delta\tau_A \simeq \Delta t_A$.