Leçon 171 - Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans toute la suite, on désignera par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $n \in \mathbb{N}^\star$.

1 Formes quadratiques réelles

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 - Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle **forme quadratique** associée à φ, l'application q de E dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in E$, par : $q(x) = \varphi(x, x)$.

Théorème 2 - Pour toute forme quadratique q sur E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ sur $E \times E$ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x, x)$. La forme bilinéaire φ est alors appelée **forme polaire** de q et, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\,[q(x+y) - q(x) - q(y)] = \frac{1}{4}\,[q(x+y) - q(x-y)]\,.$$

Théorème 3 - Une application $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E si, et seulement si, elle vérifie les conditions suivantes :
(i) Pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$, $q(\lambda\, x) = \lambda^2\, q(x)$.
(ii) L'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto q(x+y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire.

Corollaire 4 - L'ensemble des formes quadratiques sur E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel isomorphe à celui des formes bilinéaires symétriques sur E.

Exemple 5 - Soit $\varphi : (x, y) \mapsto \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\, x_i\, y_j$ une forme bilinéaire symétrique. La forme quadratique associée à φ est $q : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\, x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j < \leqslant n} (a_{i,j} + a_{j,i})\, x_i\, x_j$.
Soit $q : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\, x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j < \leqslant n} a_{i,j}\, x_i\, x_j$ une forme quadratique. La forme polaire de q est $\varphi : (x, y) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\, x_i\, y_i + \sum_{1 \leqslant i < j < \leqslant n} \frac{1}{2}\, a_{i,j}\, (x_i\, y_j + x_j\, y_i)$.

Définition 6 - Le **noyau** d'une forme quadratique q sur E de forme polaire φ est le sous-espace vectoriel de E : $\ker q = \{x \in E\,;\, \forall y \in E,\ \varphi(x, y) = 0\}$.

Définition 7 - La matrice représentative d'une forme quadratique q dans une base de E est identique à celle de sa forme polaire φ dans cette même base. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, c'est la matrice symétrique $M = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Le rang d'une forme quadratique est égal à celui de sa forme polaire.

Définition 8 - Une forme quadratique q sur E est :
(i) **définie** lorsque, pour tout $x \in E$, $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$,
(ii) **positive** (resp. **négative**) lorsque, pour tout $x \in E$, $q(x) \geqslant 0$ (resp. $q(x) \leqslant 0$),
(iii) **non dégénérée** lorsque sa forme polaire est non dégénérée, c'est-à-dire lorsque $\ker q = \{0_E\}$ ou, ce qui équivalent, lorsque $\mathrm{rg}(q) = n$.

Exemple 9 - La forme quadratique $q : x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ n'est pas définie. Le vecteur non nul $x = (1, 1, \sqrt{2})$ est tel que $q(x) = 0$. En revanche, elle est non dégénérée.

1.2 Orthogonalité

Définition 11 - Soient q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire. Une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E est dite **q-orthogonale** ou **orthogonale** si, pour tout $(i, j) \in E^2$, $i \neq j \Rightarrow \varphi(e_i, e_j) = 0$. Elle est **orthonormée** lorsque, pour tout $(i, j) \in E^2$, $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Théorème 12 - Soit q une forme quadratique sur E. Il existe au moins une base q-orthogonale de E.

Corollaire 13 - Pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^{\mathrm{t}}PAP$ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 14 - Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E de forme polaire φ. Pour tout endomorphisme f de $\mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $f^\star$ de $\mathcal{L}(E)$, appelé **adjoint de f relativement à** φ, tel que, pour tout $x, y \in E$,

$$\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f^\star(y)).$$

Propriété 15 - Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, q une forme quadratique non dégénérée sur E, $\mathcal{B}$ une base de E, $Q = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(q)$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^\star) = Q^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\!A\,Q.$$

1.3 Méthode de Gauss et théorème de Sylvester

Application 16 [Méthode de Gauss] - Soit q une forme quadratique sur E. Le théorème 12 assure de pouvoir trouver une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E dans laquelle la matrice représentative de q est diagonale. Autrement dit, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \in E$, on aura : $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i^2$ avec, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = q(e_i)$ et $x_i = e_i^\star(x)$ où $\{e_1^\star, \dots, e_n^\star\}$ est la base duale de $\mathcal{B}$. La **méthode de Gauss** permet d'écrire une forme quadratique donnée comme la somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
Supposons que q, dans une base quelconque $\mathcal{B}'$ de E soit telle que, pour tout $x =$

$(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}'} \in E$, $q(x) = \sum_i^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j}\, x_i\, x_j$, avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ pour tous $i, j \in \mathbb{R}$.
On procède par récurrence avec, à chaque étape, deux cas possibles :

• *Premier cas* - S'il existe un indice i tel que $a_{i,i} \neq 0$, par exemple, $a_{1,1}$, alors, en posant $a = a_{1,1}$, $q(x)$ peut s'écrire

$$q(x) = a\, x_1^2 + x_1\, A(x_2, \dots, x_n) + B(x_2, \dots, x_n),$$

ce qui peut se ré-écrire

$$q(x) = a \left(x_1 + \frac{1}{2a}\, A(x_2, \dots, x_n) \right)^2 + B(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{4a}\, A(x_2, \dots, x_n)^2.$$

On passe à une nouvelle étape avec la forme quadratique $B - A^2/4a$ ne dépendant plus que de $x_2, \dots, x_n$.

• *Second cas* - Si, pour tout indice i, $a_{i,i} = 0$ et si q est non nulle, alors il existe au moins un coefficient $a_{i,j} \neq 0$ avec $i < j$, par exemple $a_{1,2}$. En posant $a = a_{1,2}$, $q(x)$ peut s'écrire

$$q(x) = a x_1\, x_2 + x_1\, A(x_3, \dots, x_n) + x_2\, B(x_3, \dots, x_n) + C(x_3, \dots, x_n),$$

ce qui peut se ré-écrire

$$\begin{aligned} q(x) &= a \left(x_1 + \frac{B}{a} \right) \left(x_2 + \frac{A}{a} \right) + \left(C - \frac{AB}{a} \right) \\ &= \frac{a}{4} \left[\left(x_1 + x_2 + \frac{A+B}{a} \right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{B-A}{a} \right)^2 \right] + \left(C - \frac{AB}{a} \right). \end{aligned}$$

On passe à une nouvelle étape avec la forme quadratique $C - AB/a$ ne dépendant plus que de $x_3, \dots, x_n$.

Exemple 17 - (a) Soit $q : (x, y, z) \mapsto x^2 + 3y^2 + 7z^2 + 2x\, y + 8y\, z$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$. La méthode de Gauss donne $q(x, y, z) = (x + y)^2 + 2\,(y + 2z)^2 - z^2$.
(b) Soit $q : (x, y, z) \mapsto 5x\, y + 6x\, z + 3y\, z$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$. La méthode de Gauss donne $q(x, y, z) = \frac{1}{20}(5x + 5y + 9z)^2 - \frac{1}{20}(5x - 5y - 3z)^2 - \frac{18}{5} z^2$.

Proposition 18 - Les formes linéaires obtenues dans la méthode de Gauss sont linéairement indépendantes.

Définition 19 - Soit q une forme quadratique sur E, et $q_{|F}$ sa restriction à un sous-espace vectoriel F de E. Soit $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{M}$) la famille des sous-espaces vectoriels F de E tels que $q_{|F}$ est définie positive (resp. définie négative). On pose alors $p = \sup_{F \in \mathcal{P}}(\dim F)$ et $m = \sup_{F \in \mathcal{M}}(\dim F)$. Le couple $(p, m) \in [\![0; n]\!]$ est appelé **signature** de q, et il est noté $\operatorname{sign}(q)$.

Théorème 20 [Théorème de Sylvester] - Soit q une forme quadratique sur E. Alors, dans toute base q-orthogonale, la matrice diagonale représentative de q est formée de p réels (avec $p \in [\![0; n]\!]$) strictement positifs, de m réels (avec $m \in [\![0; n]\!]$) strictement négatifs, et de $n-p-m$ zéros. La signature de q est alors égale à (p, m), et le rang de q est $p+m$.

Corollaire 21 - Soit q une forme quadratique sur E de signature (p, m). Il existe une base $\mathcal{B}_0$ de E telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(q) = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0 \dots, 0),$$

avec p fois 1, m fois -1, et $n-p-m$ fois 0.
Si q est définie positive, $p=n$ et la base $\mathcal{B}_0$ est orthonormée.

1.4 Orthogonalisation simultanée

Théorème 22 - Soient q et q' deux formes quadratiques sur E telles que q est définie positive. Il existe une base $\mathcal{B}_0$ de E qui est orthonormée pour q et orthogonale pour q'.

Corollaire 23 - Soient M et N deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que M est définie positive. Il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^{\mathrm{t}}P\, M\, P = I_n$ et ${}^{\mathrm{t}}P\, N\, P = D$, avec D une matrice diagonale.

Corollaire 23bis - Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que M est définie positive. Pour tout $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^{\mathrm{t}}U\, M = M\, U$, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^{\mathrm{t}}P\, M\, P = I_n$ et $P^{-1}\, U\, P = D$, avec D une matrice diagonale.

Remarque 24 - Lorsque $M = I_n$, le corollaire précédent montre que pour toute matrice U de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}\, U\, P = D$, avec D une matrice diagonale.

Corollaire 25 - Soient $(E, <\cdot,\cdot>)$ un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une base de E, et q une forme quadratique sur E. Soit $S = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(q)$, alors on peut construire une base q-orthogonale formée de vecteurs propres de S. De plus, la signature de q est (n_+, n_-) avec n_+ le nombre de valeurs propres strictement positives de S, et n_- le nombre de valeurs propres strictement négatives de S.

Exemple 26 - Soit $E = \mathbb{R}^3$ et q la forme quadratique sur E définie dans une base $\mathcal{B}$ par

$$q(x) = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1\, x_2 + 6x_2\, x_3 + 6x_1\, x_3.$$

Une base orthogonale pour q et pour $<\cdot,\cdot>$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Lemme 27 - Soient A et B deux matrices symétriques définies positives, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors, $\det(\alpha\, A + \beta\, B) \geqslant (\det A)^\alpha\, (\det B)^\beta$. Il y a égalité si et seulement si $A = B$.

Application 28 [Ellipsoïde de John Loewner] - Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^\star$, d'intérieur non vide. Alors, il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

1.5 Forme quadratique et calcul différentiel

Application 29 - Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^\star$, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que $f(a+h) = f(a) + Q(h)/2 + o(||h||^2)$, avec Q la forme quadratique (hessienne de f en a) définie, pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, par

$$Q(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_i\, h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Alors,
(i) si f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a, Q est une forme quadratique positive (resp. négative) ;
(ii) si Q est une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a.

Application 30 [Lemme de Morse] - Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ sur U. On suppose que la forme quadratique hessienne de f en $(0,0)$ est non dégénérée et de signature $(1,1)$. Alors, il existe $u, v : V \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur V un voisinage de $(0,0)$ telles que, pour tout $(x,y) \in V$,

$$f(x,y) - f(0,0) - x\,\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - y\,\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = u^2(x,y) - v^2(x,y).$$

De plus, l'application $\varphi : (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine.

2 Coniques

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique $< \cdot, \cdot >$.

2.1 Définitions

Définition 31 - Soient q une forme quadratique non nulle sur $\mathbb{R}^2$ et φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. On appelle **conique affine** un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\mathcal{C} = \{v \in \mathbb{R}^2\,;\, q(v) + \varphi(v) = k\},$$

avec $k \in \mathbb{R}$.
De façon équivalente, une **conique affine** est un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, \alpha\, x^2 + 2\beta\, x\, y + \gamma\, y^2 + 2\lambda\, x + 2\mu\, y = k\}, \tag{1}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, k \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$.

Définition 32 - On considère la conique précédente. Il existe une base $\{v_1, v_2\}$ orthogonale pour $< \cdot, \cdot >$ et pour q : il suffit de prendre une base orthonormée pour $< \cdot, \cdot >$ de vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

qui est la matrice représentative de q dans la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Les directions définies par v_1 et v_2 sont appelées **directions principales** de la conique. Dans la base $\{v_1, v_2\}$, pour $v = x'v_1 + y'v_2$, l'équation de la conique sera de la forme

$$a\,x'^2 + b\,y'^2 - 2r\,x' - 2s\,y' = k, \tag{2}$$

avec a et b les valeurs propres de A telles que $a = q(v_1)$ et $b = q(v_2)$, $-2r = \varphi(v_1)$, et $-2s = \varphi(v_2)$.

Propriété 33 - La signature de la forme quadratique q définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par $q(x, y) = \alpha\,x^2 + 2\,\beta\,x\,y + \gamma\,y^2$ est déterminée par le signe du discriminant Δ de l'équation $\alpha\,x^2 + 2\,\beta\,x + \gamma = 0$. Si $\Delta = 0$, $\mathrm{sign}(q) = (1, 0)$ (ou $(0, 1)$). Si $\Delta > 0$, $\mathrm{sign}(q) = (1, 1)$. Et si $\Delta < 0$, $\mathrm{sign}(q) = (2, 0)$ (ou $(0, 2)$). Les valeurs propres de A sont égales à $\frac{1}{2}(\alpha + \gamma \pm \sqrt{(\alpha+\gamma)^2 + \Delta})$.

2.2 Classification des coniques selon la signature de la forme quadratique associée

Propriété 34 - On considère la conique $\mathcal{C}$ définie par l'équation (2).

• **Si** q **est non dégénérée -** Cela équivaut à $a\,b \neq 0$. L'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$a\,x^2 + b\,y^2 = h,$$

avec $x = x' - r/a$, $y = y' - s/b$, et $h = k + r^2/a + s^2/b$.
On peut supposer que $\mathrm{sign}(q) = (2, 0)$ ou $(1, 1)$.
(1) Lorsque $\mathrm{sign}(q) = (2, 0)$, c'est-à-dire lorsque $a > 0$ et $b > 0$, on dit que $\mathcal{C}$ est du genre **ellipse** :
(a) Si $h < 0$, $\mathcal{C} = \emptyset$.
(b) Si $h = 0$, $\mathcal{C}$ se réduit à un point.
(c) Si $h > 0$, $\mathcal{C}$ est une **ellipse** de centre $(r/a, s/b)$ et son équation peut s'écrire

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

avec $A = \sqrt{h/a}$ et $B = \sqrt{h/b}$.
(2) Lorsque $\mathrm{sign}(q) = (1, 1)$, c'est-à-dire lorsque $a\,b < 0$, on dit que $\mathcal{C}$ est du genre **hyperbole** :
(a) Si $h = 0$, $\mathcal{C}$ se réduit aux deux droites d'équations $y = \pm\sqrt{|a/b|}\,x$.
(b) Si $h \neq 0$, $\mathcal{C}$ est une **hyperbole**. Si, par exemple, $a > 0$ et $b < 0$, alors son équation peut s'écrire

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

avec $A = \sqrt{h/a}$ et $B = \sqrt{-h/b}$.

• **Si** q **est dégénérée -** Cela équivaut à $a\,b = 0$. On dit que $\mathcal{C}$ est du genre **parabole**. On peut supposer que $\mathrm{sign}(q) = (1, 0)$. Par exemple, si $a \neq 0$ et $b = 0$, tout vecteur colinéaire à v_2 est isotrope, et l'équation (2) peut s'écrire

$$a\left(x' - \frac{r}{a}\right)^2 - 2s\,y' = h,$$

avec $h = k + r^2/a$.
(1) Lorsque $s \neq 0$, c'est-à-dire $v_2 \notin \ker\varphi$, le changement de coordonnées $x = x' - r/a$ et $y = h + 2s\,y'$ donne l'équation d'une **parabole** :

$$y = a\,x^2.$$

(2) Lorsque $s = 0$, c'est-à-dire $v_2 \in \ker\varphi$, le changement de coordonnées $x = x' - r/a$ donne l'équation $x^2 = h/a$.
(a) Si $h < 0$, $\mathcal{C} = \emptyset$.
(b) Si $h = 0$, $\mathcal{C}$ se réduit à la droite d'équation $x = 0$.
(c) Si $h > 0$, $\mathcal{C}$ se réduit aux deux droites d'équation $x = \pm h$.

Définition 35 - On appelle **équation homogène associée** à la conique $\mathcal{C}$ définie par l'équation (1), l'équation :

$$\alpha\,x^2 + 2\beta\,x\,y + \gamma\,y^2 + 2\lambda\,x\,z + 2\mu\,y\,z - k\,z^2 = 0.$$

Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$Q(x,y,z) = \alpha\,x^2 + 2\beta\,x\,y + \gamma\,y^2 + 2\lambda\,x\,z + 2\mu\,y\,z - k\,z^2.$$

On dit que la conique $\mathcal{C}$ est une **conique non dégénérée** ou **propre** lorsque Q est non dégénérée. Dans le cas contraire, la conique est dite **dégénérée** ou **impropre**.

Exemple 46 - (a) La conique d'équation $x^2 - 2x\,y + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ est une parabole.
(b) La conique d'équation $x^2 + x\,y + y^2 + x - y = 0$ est une ellipse.
(c) La conique d'équation $x^2 - 3x\,y + 2y^2 + 2x - 3y = 0$ est réduite à deux droites.

Références

Grifone, J., *Algèbre linéaire*, éd. Cépaduès.
Ramis, J. P. & al., *Mathématiques, Tout-en-un pour la Licence 2*, éd. Dunod.
Gourdon, X., *Les maths en tête, Algèbre*, éd. Ellipses.
Gourdon, X., *Les maths en tête, Analyse*, éd. Ellipses.
Monier, J. M., *Algèbre, MP*, éd. Dunod.
Monier, J. M., *Géométrie, MPSI, MP*, éd. Dunod.