Un modèle simple de formation d'étoiles

[Exercice classique]

Un modèle simple d'étoile consiste à supposer que celle-ci est constituée d'une masse M_0 d'atomes d'hydrogène, adoptant une configuration sphérique de rayon R à un instant donné, sans rotation et à l'équilibre hydrostatique à tout instant. Pendant la formation de l'étoile, la masse volumique $\mu(r)$, la pression $p(r)$, et la température $T(r)$ internes sont supposées ne dépendre que de la distance, r, au centre de l'étoile (symétrie sphérique). C'est donc une modélisation unidimensionnelle.

A - Structure hydrostatique de l'étoile

A-1 - Exprimer la masse $M(r)$ contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon r ($\leq R$) en fonction de la masse volumique $\mu(r)$.

A-2 - Exprimer le champ gravitationnel $\vec{g}(r)$ à la distance r en fonction de la masse $M(r)$.

A-3 - Etablir l'équation différentielle, traduisant l'équilibre hydrostatique de l'étoile, reliant les fonctions p, μ, et de leurs dérivées, à une distance r.

A-4 - En supposant que l'hydrogène est un fluide incompressible, déterminer la pression au centre de l'étoile en fonction de M_0 et de R. En déduire la température au centre de l'étoile, en assimilant l'hydrogène à un gaz parfait, en fonction de la masse d'un atome d'hydrogène m_H, et de la constante de Boltzmann k.

B - Formation de l'étoile

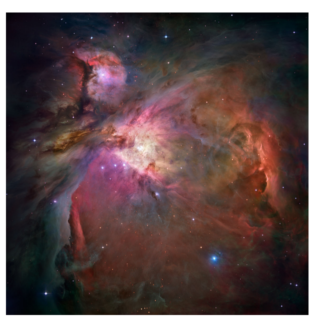

FIG. 1 – La nébuleuse d'Orion (M42) est un lieu de formation d'étoiles. Photo prise le 22 février 2009 par le Hubble Space Telescope - NASA.

La formation de l'étoile est supposée progressive, couche après couche : la masse $\mathrm{d}M(r)$ d'hydrogène constituant chaque couche sphérique comprise entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ est apportée de façon quasi-statique et isotrope depuis l'infini.

B-1 - Calculer le travail élémentaire fourni par le processus pour former une couche sphérique à la distance r. En déduire l'expression du travail W_G, appelé *énergie gravitationnelle de l'étoile*, qu'il faut fournir pour former l'étoile.

B-2 - En supposant que l'hydrogène est un fluide incompressible, déterminer W_G. En déduire l'énergie rayonnée pendant la durée du processus de formation.

B-3 - En supposant que l'hydrogène n'est plus un fluide incompressible, exprimer W_G sous forme d'une intégrale dépendant de la pression à l'intérieur de l'étoile. En déduire W_G, dans l'hypothèse où l'hydrogène est assimilé à un gaz parfait de température constante et uniforme dans l'étoile. Comparer ce résultat avec celui de la question précédente.

C - Théorème du Viriel

On considère un système (Σ) borné et composé de N particules, numérotées par $i \in [\![1, N]\!]$, de masses m_i placées en $\vec{r}_i$ et de vitesse $\vec{v}_i$ par rapport à un référentiel galiléen. Ces particules sont soumises à un potentiel d'interaction noté $V_p(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$. On notera $< f >$ la moyenne temporelle d'une grandeur f.

C-1 - Montrer que l'énergie cinétique de (Σ) peut se mettre sous la forme :

$$E_c = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \, m_i \, \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} \, ,$$

avec Φ, une fonction que l'on déterminera. En déduire que Φ reste bornée, et calculer la moyenne temporelle de $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$.

C-2 - Déterminer la moyenne temporelle de l'énergie cinétique de (Σ), en fonction de la grandeur $\delta w_i =< \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i >$, avec $\vec{F}_i$ la force exercée sur la i-ème particule par l'ensemble des autres particules.

C-3 - On considère que V_p est une fonction homogène de degré q de ses $3N$ variables. Déterminer q dans le cas de l'interaction gravitationnelle, puis dans le cas d'une interaction élastique entre deux particules. Etablir le *théorème du Viriel*, c'est-à-dire une relation entre $< E_c >$, $< V_p >$ et q.

C-4 - En appliquant le théorème du Viriel ;
(a) Retrouver l'expression de l'énergie gravitationnelle de l'étoile.
(b) Déterminer à quelle condition la distance entre deux particules en interaction gravitationnelle reste bornée.

D - Instabilité thermodynamique

D-1 - En supposant que localement l'hydrogène est un gaz parfait, déterminer la variation de température δT lorsque le rayon de l'étoile en effondrement diminue de δR. Exprimer alors la capacité thermique à volume constant de l'étoile.

D-2 - On considère un système isolé formé de deux étoiles, dont le rayon est constant, d'énergies internes U_i, d'entropies S_i et de température T_i, avec $i = 1$ ou 2, respectivement pour chacune des deux étoiles. Montrer qu'à l'équilibre thermodynamique, $T_1 = T_2$. En déduire que cet équilibre est thermodynamiquement instable.

Correction

A-1 - La masse volumique s'écrit

$$\mu(r) = \frac{\mathrm{d}M(r)}{\mathrm{d}V}\,,$$

avec $\mathrm{d}V = 4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r$, le volume infinitésimal d'une coquille d'épaisseur $\mathrm{d}r$. On en déduit

$$M(r) = 4\,\pi\int_0^r \mu(r')\,r'^2\,\mathrm{d}r'\,.$$

A-2 - La répartition de la masse étant à symétrie sphérique, l'intensité du champ gravitationnel ne peut dépendre que de la coordonnée radiale r. De plus, le vecteur champ gravitationnel $\vec{g}(r)$ appartient à l'intersection des plans de symétrie du système de masses que représente l'étoile, c'est-à-dire à l'axe radial du point considéré : on a donc $\vec{g}(r) = g(r)\,\vec{e}_r$. Le théorème de Gauss s'applique alors facilement :

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{g}(r)\cdot\mathrm{d}\vec{\Sigma} = -4\pi\mathcal{G}\,M(r)\,,$$

avec (Σ) une sphère de rayon r. Comme $\mathrm{d}\vec{\Sigma} = r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r$, on obtient

$$\vec{g}(r) = -\frac{\mathcal{G}\,M(r)}{r^2}\,\vec{e}_r\,.$$

A-3 - D'après l'équation d'Euler, on peut écrire

$$\mu(r)\,\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}p(r) + \mu(r)\,\vec{g}(r)\,.$$

Le fluide étant supposé en équilibre hydrostatique, le terme de gauche de cette équation est nul. On a donc

$$\frac{\mathrm{d}p(r)}{\mathrm{d}r} = -\mu(r)\,\frac{\mathcal{G}\,M(r)}{r^2}\,.$$

A-4 - Le fluide étant incompressible, sa masse volumique reste constante et vaut $3M(r)/(4\pi\,r^3)$. En intégrant la relation obtenue à la question précédente,

$$\int_0^R \frac{\mathrm{d}p(r)}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = -\mu\,\mathcal{G}\int_0^R \frac{4\pi}{3}\,\mu\,r\,\mathrm{d}r\,,$$

c'est-à-dire, comme la pression est nulle à la surface de l'étoile ($p(R) = 0$),

$$p(0) = \frac{3\,\mathcal{G}\,M_0^2}{8\,\pi\,R^4}\,.$$

En assimilant l'hydrogène à un gaz parfait au centre de l'étoile, on a

$$p(0)\,V = N\,k\,T_c\,,$$

ou encore,

$$p(0) = (\mu/m_H)\,k\,T_c\,,$$

avec N, le nombre d'atomes d'hydrogène, et T_c, la température au centre de l'étoile. En remplaçant par les expressions obtenues précédemment, on obtient

$$T_c = \frac{\mathcal{G}\, M_0\, m_H}{2\, k\, R}\,.$$

B-1 - A la distance r', la couche de masse $\mathrm{d}M(r)$ subit la force gravitationnelle $\mathrm{d}\vec{F}$, telle que

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}M(r)\, \vec{g}(r')\,.$$

Le travail élémentaire fourni par le processus d'attraction gravitationnelle, lorsque cette couche se déplace de $\mathrm{d}\vec{r}'$, s'écrit

$$\delta^2 W = \mathrm{d}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}' = \frac{\mathcal{G}\, M(r)\mathrm{d}M(r)}{r'^2}\, \mathrm{d}r'\,.$$

Le travail élémentaire pour faire venir la couche de matière depuis l'infini jusqu'à la distance r est donc

$$\delta W(r) = \mathcal{G}\, M(r)\, \mathrm{d}M(r)\, \int_r^{+\infty} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2} = \frac{\mathcal{G}\, M(r)\mathrm{d}M(r)}{r}\,.$$

Pour former l'étoile de façon quasi-statique, un processus doit, à chaque instant, retenir la couche de masse $\mathrm{d}M(r)$ afin que son énergie cinétique reste quasi-nulle : le travail élémentaire fourni par ce processus doit donc être exactement l'opposé du travail fourni par le processus d'attraction gravitationnelle. Ainsi, le travail total pour former l'étoile, ou énergie gravitationnelle, est simplement

$$W_G = \int_0^R -\delta W(r) = \int_0^R \frac{\mathcal{G}\, M(r)\mathrm{d}M(r)}{r}\,.$$

B-2 - Si l'hydrogène est supposé être un fluide incompressible alors $M(r) = 4\pi\, \mu\, r^3/3 = M_0\,(r/R)^3$, ce qui implique, $\mathrm{d}M(r) = \frac{3 M_0\, r^2\, \mathrm{d}r}{R^3}$. On peut intégrer l'expression de W_G :

$$W_G = -\frac{3\,\mathcal{G}\, M_0^2}{R^6}\, \int_0^R r^4\, \mathrm{d}r = -\frac{3\,\mathcal{G}\, M_0^2}{5\, R}\,.$$

L'énergie rayonnée par l'étoile, notée W_r, est telle que $W_r + W_G = 0$, c'est-à-dire,

$$W_r = \frac{3\,\mathcal{G}\, M_0^2}{5\, R}\,.$$

B-3 - La masse volumique n'étant plus constante, on a, d'après la question A-3,

$$W_G = -\int_0^R \frac{\mathcal{G}\, M(r)\, \mathrm{d}M(r)}{r} = \int_0^R \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\, 4\,\pi\, r^3\, \mathrm{d}r\,.$$

Une intégration par parties donne

$$W_G = -3\int_0^R p(r)\, 4\,\pi\, r^2\, \mathrm{d}r\,.$$

Dans l'hypothèse d'un gaz parfait de température constante et uniforme, si l'on remplace $p(r)$ par $N\, k\, T/V$, comme dans la question A-4, on trouve

$$W_G = -\frac{3\, M_0\, k\, T}{m_H}\,.$$

Dans la question précédente, en remplaçant $\mathcal{G}\,M_0$ par $2\,k\,R\,T/m_H$, l'expression de l'énergie gravitationnelle s'écrivait

$$W_G = -\frac{6\,M_0\,k\,T}{5\,m_H}\,.$$

Les deux résultats obtenus pour W_G sont donc du même ordre, puisque dans un rapport égal à $5/2$.

C-1 - L'énergie cinétique totale du système (Σ) s'écrit

$$E_c = \frac{1}{2}\,\sum_{i=1}^{N} m_i\,v_i^2 = \frac{1}{2}\,\sum_{i=1}^{N} m_i\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}_i\,.$$

On peut donc définir Φ telle que

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,\sum_{i=1}^{N} m_i\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}_i + \frac{1}{2}\,\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i\cdot\vec{v}_i\right)\,,$$

et poser, par exemple,

$$\Phi = \frac{1}{2}\,\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i\cdot\vec{v}_i\,.$$

Le système (Σ) est spatialement borné donc les vecteurs $\vec{r}_i$ sont bornés. Les vitesses $\vec{v}_i$ et les masses m_i étant également bornées, on déduit que Φ reste bornée pour un nombre fini de particules. La moyenne temporelle de $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}\,t$ s'écrit

$$< \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} >= \lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\,\left[\Phi(t)-\Phi(0)\right]\,.$$

Comme Φ est bornée, la différence $\Phi(t)-\Phi(0)$ reste également bornée, donc

$$< \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} >= 0\,.$$

C-2 - Le résultat précédent implique que la moyenne temporelle de l'énergie cinétique est

$$< E_c >= -\frac{1}{2}\,< \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} >\,.$$

Par ailleurs, la force $\vec{F}_i$ exercée sur la i-ème particule est simplement $m_i\,\mathrm{d}\vec{v}_i/\mathrm{d}t$. la relation précédente devient ainsi

$$< E_c >= -\frac{1}{2}\,< \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\cdot\vec{F}_i >= -\frac{1}{2}\,\sum_{i=1}^{N} < \vec{r}_i\cdot\vec{F}_i >= -\frac{1}{2}\,\sum_{i=1}^{N}\delta w_i\,.$$

C-3 - Par définition, on recherche q tel que, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$V_p(\lambda\,x_1,\ldots,\lambda\,x_{3N}) = \lambda^q\,V_p(x_1,\ldots,x_{3N})\,.$$

L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle, entre deux masses m_1 et m_2, est définie par

$$V_p(\vec{r}_{12}) = -\frac{\mathcal{G}\, m_1\, m_2}{r_{12}}\,,$$

avec $\vec{r}_{12}$, le vecteur reliant les deux masses. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a donc

$$V_p(\lambda\, \vec{r}_{12}) = -\frac{\mathcal{G}\, m_1\, m_2}{\lambda\, r_{12}} = \lambda^{-1}\, V_p(\vec{r}_{12})\,,$$

c'est-à-dire $q_{\text{grav}} = -1$.
L'énergie potentielle élastique entre deux particules est de la forme

$$V_p(\vec{r}) = \frac{1}{2}\, k\, r^2\,,$$

avec, par exemple, dans le cas d'un ressort, $\vec{r}$ le vecteur allongement et k la raideur du ressort. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on trouve ici

$$V_p(\lambda\, \vec{r}) = \frac{1}{2}\, k\, (\lambda\, r)^2 = \lambda^2\, V_p(\vec{r})\,,$$

c'est-à-dire $q_{\text{élast}} = 2$.
Une fonction homogène de degré q comme V_p, vérifie le théorème d'Euler :

$$q\, V_p(x_1, \ldots, x_{3N}) = \sum_{i=1}^{3N} x_i\, \frac{\partial V_p}{\partial x_i}\,.$$

Par ailleurs, le potentiel d'interaction V_p est relié à une force conservative $\vec{F}$ par la relation

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V_p\,,$$

ce qui implique, en notant $F_{x_i} = -\partial V_p / \partial x_i$,

$$q\, V_p(x_1, \ldots, x_{3N}) = -\sum_{i=1}^{3N} x_i\, F_{x_i}\,.$$

En coordonnées cartésiennes, et en notant $\vec{r_i} = (x_i, y_i, z_i)$, on peut ré-écrire

$$q\, V_p(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = -\sum_{i=1}^{N} (x_i\, F_{x_i} + y_i\, F_{y_i} + z_i\, F_{z_i}) = -\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i\,.$$

D'après la question précédente, en prenant la moyenne temporelle,

$$q\ < V_p >= 2\ < E_c >\ .$$

C'est le théorème du Viriel.

C-4 - (a) On suppose que l'étoile a une masse M_0, composée d'un gaz parfait monoatomique d'atomes d'hydrogène à la température T. L'énergie cinétique moyenne pour un atome d'hydrogène est égale à $(3/2)\, k\, T$, donc

$$< E_c >= \frac{3}{2}\, \frac{M_0}{m_H}\, k\, T\,,$$

ce qui implique, d'après le théorème du Viriel (avec $q = -1$),

$$< V_p >= -\frac{3\,M_0\,k\,T}{m_H} = W_G\,.$$

(b) La distance entre deux particules qui sont en interaction gravitationnelle reste bornée si l'énergie mécanique du système qu'elles forment reste négative (état lié). Pour l'énergie cinétique, on peut écrire

$$E_c = E_c^\star + \frac{1}{2}\,m\,v_G^2\,,$$

avec $E_c^\star$, l'énergie cinétique mesurée dans le référentiel barycentrique. L'énergie potentielle est, quant à elle, indépendante du référentiel. L'énergie mécanique du système s'écrit alors

$$E = E_c + V_p = E_c^\star + \frac{1}{2}\,m\,v_G^2 + V_p = E^\star + \frac{1}{2}\,m\,v_G^2\,,$$

avec $E^\star$ l'énergie mécanique mesurée dans le référentiel barycentrique. On déduit donc $E^\star \leq E$, c'est-à-dire, en prenant la moyenne temporelle, $< E^\star > \leq < E >$. Or, d 'après le théorème du Viriel, $< E >=< E_p > + < E_c >= - < E_c >$. Comme $< E_c >\geq 0$, on a ainsi,

$$< E^\star > \leq < E > \leq 0\,,$$

ce qui caractérise l'état lié.

D-1 - La masse de l'étoile restant constante lors de la variation de son rayon, on a $\mu\,R^3$ =Cte. D'après l'équilibre hydrostatique,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}R} = -\mu\,\frac{\mathcal{G}\,M_0}{R^2} \propto \frac{1}{R^5}\,,$$

c'est-à-dire,

$$\mathrm{d}p \propto \mathrm{d}\left(\frac{1}{R^4}\right)\,,$$

ou encore, $p\,R^4$ =Cte'. Enfin, le gaz étant supposé parfait, $p \propto \mu\,T$, ce qui implique $T\,R$ =Cte". La différentielle, assimilée à une petite variation de R et T, s'écrit donc

$$\delta T = -T\,\frac{\delta R}{R}\,.$$

Cette expression montre que la température de l'étoile augmente ($\delta T > 0$) lorsque son rayon diminue ($\delta R < 0$).
L'énergie interne de l'étoile est définie comme étant égale à l'énergie mécanique. La capacité thermique à volume constant C_V est, par définition, la dérivée de cette énergie interne par rapport à T. D'après le théorème du Viriel, on obtient

$$U =< E_c > + < V_p >= - < E_c >\,,$$

ce qui aboutit à

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = -\frac{3\,M_0\,k}{2\,m_H}\,.$$

D-2 - Le système étant isolé et chacune de ses parties (les deux étoiles) gardant le même volume, le premier principe de la thermodynamique conduit à $\mathrm{d}U = \mathrm{d}U_1 + \mathrm{d}U_2 = 0$. Le second principe montre, quant à lui, que la variation d'entropie du système isolé ne peut être que positive, donc $\mathrm{d}S = \mathrm{d}S_1 + \mathrm{d}S_2 \geq 0$. Enfin, l'identité thermodynamique (avec $\mathrm{d}V_1 = \mathrm{d}V_2 = 0$) s'écrit simplement $\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S$ pour chaque étoile. Ainsi, on obtient

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}U_1}{T_1} + \frac{\mathrm{d}U_2}{T_2} = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\mathrm{d}U_1 \geq 0\,.$$

Lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique, son entropie est maximale, c'est-à-dire, $\mathrm{d}S = 0$, alors qu'aucune condition n'est donnée à chacune des deux étoiles (on peut avoir $\mathrm{d}S_1 \neq 0$ avec $\mathrm{d}S_1 + \mathrm{d}S_2 = 0$). Comme $\mathrm{d}U_1$ est, a priori, non nulle, il est donc nécessaire d'avoir $T_1 = T_2$.
Considérons une perturbation de température $\delta T > 0$: comme $\delta U = C_V\,\delta T$, on a $\delta U < 0$. Or, d'après le théorème du Viriel, $\mathrm{d}U = \mathrm{d} < V_p > /2 \propto \mathrm{d}R/R^2$, donc $\mathrm{d}R < 0$. D'après la question précédente, cela implique que $\delta T > 0$. L'équilibre est donc thermodynamiquement instable.