Suites et séries de fonctions

1 - Suites de fonctions

(E et F sont deux $\mathbb{K}$-evn de dimension finie dont la norme est $||.||$, $I \subset E$, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.)

Convergence simple : Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans F converge simplement vers une fonction f de I dans F **ssi** $\forall x \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Cela équivaut à

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [\, n \geq N_0 \Rightarrow ||f_n(x) - f(x)|| \leq \varepsilon\,].$$

Convergence uniforme : Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans F converge uniformément vers une fonction f de I dans F **ssi** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Sup}_{x\in I}||f(x) - f_n(x)|| = 0$. Cela équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ [\, n \geq N_0 \Rightarrow ||f_n(x) - f(x)|| \leq \varepsilon\,].$$

Conséquences :

(1) **Si** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur I, et **si** $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur I, **alors** f est bornée sur I.

(2) Comme E est complet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur $I \Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \forall x \in I, [\, p \geq N_0, q \geq N_0 \Rightarrow ||f_p(x) - f_q(x)|| \leq \varepsilon\,].$$

(3) **Si** il existe une suite réelle positive $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de limite nulle, et telle que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in I,\ ||f(x) - f_n(x)|| \leq \varepsilon_n,$$

alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur I.

Théorème : Toute suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément convergente sur I est simplement convergente sur I.

Convergence uniforme locale : Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans F converge localement uniformément vers une fonction f de I dans F **ssi** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur toute partie compacte de I.

Théorème de double limite : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans F, et $a \in \bar{I}$. **Si**, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a, et **si**, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, **alors** la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in F$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Théorème de continuité : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans F.

(1) **Si**, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en un point a de I, et **si** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, **alors** f est continue au point a.

(2) **Si**, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I, et **si** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, **alors** f est continue sur I.

(3) **Si**, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I, et **si** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers f sur I, **alors** f est continue sur I.

Théorème d'intégration sur un segment : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans F. **Si**, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$, et **si** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, **alors** :

(1) f est continue sur $[a,b]$,

(2) la suite $\left(\int_a^b f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F, et

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n\,.$$

Théorème de dérivation : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $I \subset \mathbb{R}$ dans F. **Si**, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, **si** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f, **si** $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers g, **alors**

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f,

(2) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f' = g$.

Théorème de dérivation (généralisation) : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $I \subset \mathbb{R}$ dans F, et $k \in \mathbb{N}^\star$.

$$\textbf{Si} \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I, \\ \forall i \in \{0,\dots,k-1\},\ (f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } \varphi_i, \\ (f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \text{ vers } \varphi_k, \end{cases}$$

alors

(1) $\forall i \in \{0,\dots,k-1\}$, $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers φ_i,

(2) φ_0 est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,

(3) $\forall i \in \{1,\dots,k\}$, $\varphi_0^{(i)} = \varphi_i$.

Théorème de convergence dominée : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $I \subset \mathbb{R}$ dans F.

$$\textbf{Si} \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue par morceaux sur } I, \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } f, \text{ une fonction continue par morceaux sur } I, \\ \text{il existe } \varphi : I \to \mathbb{R}, \text{ continue par morceaux, positive et intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq \varphi, \end{cases}$$

alors

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I,

(2) f est intégrable sur I,

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Théorème de convergence sur un intervalle borné : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $I \subset \mathbb{R}$ dans F.

$$\textbf{Si} \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue et intégrable sur } I, \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers } f, \\ \text{l'intervalle } I \text{ est } \textbf{borné}, \end{cases}$$

alors

(1) f est continue et intégrable sur I,

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I f_n = \int_I f$.

Théorème de convergence monotone : Soit une suite **croissante** (resp. **décroissante**) de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $I\subset\mathbb{R}$ dans $J\subset\mathbb{R}$, **intégrables** sur I. **Si** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux sur I, **alors**
la fonction f est intégrable sur I **ssi** la suite $(\int_I f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (resp. minorée). Dans ce cas,

$$\int_I f = \mathrm{Sup}_{n\in\mathbb{N}}\int_I f_n = \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n.$$

2 - Séries de fonctions

Définition : On appelle **série de fonctions**, tout couple $((f_n)_{n\in\mathbb{N}},(S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ formé d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans F, et de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} f_k$. Le terme général (t.g.) de la série est f_n, et la série est notée $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$.

Convergence simple : La série de fonctions de t.g. f_n est simplement convergente sur I **ssi** la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente vers une fonction S sur I. La fonction S est alors appelée **somme de la série** : $S=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Convergence absolue : La série de fonctions de t.g. f_n est absolument convergente sur I **ssi** $\forall x\in I$, la série $\sum\limits_{n\geq 0}||f_n(x)||$ converge dans $\mathbb{R}$.

Convergence uniforme : La série de fonctions de t.g. f_n est uniformément convergente sur I **ssi** la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction S sur I. Cela équivaut à

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{Sup}_{x\in I}||S(x)-S_n(x)|| = \lim_{n\to+\infty}\mathrm{Sup}_{x\in I}||R_n(x)|| = 0,$$

avec $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, le reste d'ordre n.

Conséquences :

(1) $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $I \iff \sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I **et** la suite $(R_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

(2) Comme E est complet, $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $I \iff$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_0\in\mathbb{N},\ \forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ \forall x\in I, [\, q>p\geq N_0, \Rightarrow ||\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)||\leq\varepsilon\,].$$

(3) **Si** $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I, **alors** la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Convergence locale uniforme : La série de fonctions de t.g. f_n est localement uniformément convergente sur I **ssi** la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction S sur toute partie compacte de I.

Convergence normale : La série de fonctions de t.g. f_n est normalement convergente sur I **ssi** la série $\sum_{n \geq 0} \mathrm{Sup}_{x \in I} ||f_n(x)||$ converge dans $\mathbb{R}$.

Théorème : Toute série $\sum_{n \geq 0} f_n$ normalement convergente sur I est simplement convergente, absolument convergente et uniformément convergente sur I.

Théorème de double limite : Soit une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ de I dans F, et $a \in \bar{I}$. **Si**, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a, et **si** $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément vers la fonction S sur I, **alors**, la série $\sum_{n \geq 0} \ell_n$ converge dans F, et $\lim_{x \to a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Théorème de continuité : Soit une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ de I dans F, et $a \in I$.

(1) **Si**, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en un point a de I, et **si** $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément vers la fonction S sur I, **alors** S est continue au point a.

(2) **Si**, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I, et **si** $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément vers la fonction S sur I, **alors** S est continue sur I.

(3) **Si**, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I, et **si** $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge localement uniformément vers la fonction S sur I, **alors** S est continue sur I.

Théorème d'intégration sur un segment : Soit une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans F. **Si**, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$, et **si** $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément vers la fonction S sur $[a, b]$, **alors** :

(1) la fonction S est continue sur $[a, b]$,

(2) la série $\sum_{n \geq 0} \left(\int_a^b f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F, et

$$\int_a^b S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n \, .$$

Conséquences :

Si, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$, et **si** $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement vers la fonction S sur $[a, b]$, **alors** :

(1) $\sum_{n \geq 0} ||f_n||_1$ converge dans $\mathbb{R}$,

(2) la fonction S est continue sur $[a, b]$, et $||S||_1 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} ||f_n||_1$,

avec, par définition, $\forall f \in \mathcal{C}([a, b], F), \; ||f||_1 = \int_a^b ||f||$.

Théorème de dérivation : Soit une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ de $I\subset\mathbb{R}$ dans F. **Si**, $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, **si** $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers S, **si** $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I vers g, **alors**

(1) $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers f,

(2) la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S'=g$.

Théorème de dérivation (généralisation) : Soit une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ de $I\subset\mathbb{R}$ dans F, et $k\in\mathbb{N}^\star$.

Si $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I, \\ \forall i\in\{0,\dots,k-1\},\ \sum_{n\geq 0} f_n^{(i)} \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } \Phi_i, \\ \sum_{n\geq 0} f_n^{(k)} \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \text{ vers } \Phi_k, \end{cases}$

alors

(1) $\forall i\in\{0,\dots,k-1\}$, $\sum_{n\geq 0} f_n^{(i)}$ converge uniformément sur tout segment de I vers Φ_i,

(2) Φ_0 est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,

(3) $\forall i\in\{1,\dots,k\}$, $\Phi_0^{(i)}=\Phi_i$.

Théorèmes de d'intégration terme à terme :

(1) Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $I\subset\mathbb{R}$ dans $J\subset\mathbb{R}$, **positives** et **intégrables** sur I. **Si** la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I, **alors** la fonction S est intégrable sur I **ssi** la série $\sum_{n\geq 0}\int_I f_n$ converge. Dans ce cas,

$$\int_I f=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n.$$

(2) Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $I\subset\mathbb{R}$ dans $J\subset\mathbb{C}$, **intégrables** sur I. **Si** la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I, et **si** la série $\sum_{n\geq 0}\int_I |f_n|$ converge, **alors** la fonction S est intégrable sur I, et

$$\int_I f=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n.$$