Théorème d'Ascoli

Soient (X, d) un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de X dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x, y \in X,\ d(x,y) \leqslant \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \varepsilon,$$

(on parle alors d'*uniforme équicontinuité*, ou d'*uniforme uniforme continuité*) et vérifiant : $\forall x \in X,\ (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$.
Alors, il existe une extraction φ et une application $f : X \to \mathbb{R}$ continue telle que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X.

Preuve

Étape 1 - On montre qu'il existe une suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de points de X telle que $\{x_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X.

X est compact donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des boules ouvertes de rayon ε. Autrement dit, pour tout $k \geqslant 0$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ et $x_1^k, \ldots, x_{N_k}^k$ dans X tels que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{N_k} B(x_i^k, 2^{-k})$.
L'ensemble $A = \{x_i^k,\ k \in \mathbb{N}^\star,\ 1 \leqslant i \leqslant N_k\}$ est (au plus) dénombrable et il est dense dans X.
On peut poser $\{x_j,\ j \in \mathbb{N}\} = A$.

Étape 2 - Construction de l'extraction φ.

La suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Il existe donc une extraction φ_0 et $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(f_{\varphi_0(n)}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y_0.
De même, $(f_{\varphi_0(n)}(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, il existe donc une extraction φ_1 et $y_1 \in \mathbb{R}$ tel que $(f_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)}(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y_1.
En itérant, pour tout $x_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, il existe une extraction φ_k et $y_k \in \mathbb{R}$ tel que $(f_{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_k(n)}(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y_k.
On définit l'extraction, dite *diagonale*, φ par : $\varphi : n \mapsto \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$.
On a, pour tout $k < n$, $\varphi(n) = \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_k(\varphi_{k+1} \circ \ldots \circ \varphi_n(n))$, donc $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
Conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f_{\varphi(n)}(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y_k dans $\mathbb{R}$, donc $(f_{\varphi(n)}(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Étape 3 - On montre que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Par uniforme uniforme continuité :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x, y \in X,\ d(x,y) \leqslant \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \varepsilon/3,$$

De plus, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-k_0} \leqslant \delta$, et il existe $N_{k_0} \in \mathbb{N}$ tel que $X = \bigcup_{i=1}^{N_{k_0}} B(x_i^{k_0}, 2^{-k_0})$.
D'après l'étape 2, on sait que pour tout $x_i^{k_0}$, avec $i \in [\![1, N_{k_0}]\!]$, $(f_{\varphi(n)}(x_i^{k_0}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Donc il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geqslant n_i$, on a

$$|f_{\varphi(p)}(x_i^{k_0}) - f_{\varphi(q)}(x_i^{k_0})| \leqslant \varepsilon/3.$$

Comme $\{x_i^{k_0}\}_{i\in[\![1,N_{k_0}]\!]}$ est fini, on peut poser $N = \max\{n_i, i \in [\![1, N_{k_0}]\!]\}$.
Enfin, pour tout $x \in X$, il existe $i \in [\![1, N_{k_0}]\!]$ tel que $d(x, x_i^{k_0}) \leqslant \delta$.
Donc, pour $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geqslant q \geqslant N$, on a

$$|f_{\varphi(p)}(x) - f_{\varphi(q)}(x)| \leqslant |f_{\varphi(p)}(x) - f_{\varphi(p)}(x_i^{k_0})| + |f_{\varphi(p)}(x_i^{k_0}) - f_{\varphi(q)}(x_i^{k_0})| + |f_{\varphi(q)}(x_i^{k_0}) - f_{\varphi(q)}(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, $\|f_{\varphi(p)} - f_{\varphi(q)}\|_\infty \leqslant \varepsilon$, et $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Conclusion - Comme $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ est complet pour $\|\cdot\|_\infty$, $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f : X \to \mathbb{R}$ sur X.