Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : I \times \Omega' \to \mathbb{R}^n$ une application continue sur $I \times \Omega'$ et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Pour tout problème de Cauchy (E) : $X' = f(t, X)$ avec $(t_0, x_0) \in I \times \Omega'$, il existe une unique solution maximale définie sur I tout entier.

Preuve

Soit $X \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ et $t \in I$. Posons $F(X)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s))\,\mathrm{d}s$.

Étape 1 - Montrons : X solution de $(E) \Leftrightarrow F(X) = X$ sur I.

(a) Si X est solution de (E), alors X est continue et dérivable sur I avec $X' = f(t, X)$ et $X(t_0) = x_0$. Comme f et X sont continues, X' est également continue. Sur tout segment $[t_0, t] \subset I$ (ou $[t, t_0]$), on peut donc écrire

$$\int_{t_0}^t X'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^t f(s, X(s))\,\mathrm{d}s,$$

c'est-à-dire

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s))\,\mathrm{d}s.$$

Autrement dit, $F(X) = X$ sur I.

(b) Si $F(X) = X$ sur I, c'est-à-dire si, pour tout $t \in I$, $X(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^t f(s, X(s))\,\mathrm{d}s$, alors X est dérivable sur I (f étant continue). Comme $X(t_0) = x_0$, X est bien solution de (E).

Étape 2 - On suppose que I est compact et de longueur ℓ, et on pose $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Soit $k > 0$ la constante de Lipschitz associée à f sur I.

On munit E de la norme $||\cdot||_k$ définie pour tout $X \in E$ par

$$||X||_k = \max_{t \in I} \left(e^{-k\,|t - t_0|}\, ||X(t)|| \right).$$

Pour tout $X \in E$, on a l'inégalité

$$e^{-k\,\ell}\, ||X||_\infty \leqslant ||X||_k \leqslant ||X||_\infty.$$

On a donc équivalence des normes et comme $(E, ||\cdot||_\infty)$ est complet, $(E, ||\cdot||_k)$ est également complet.

Par ailleurs, comme f est continue, $F(X)$ est continue pour tout $X \in E$. Autrement dit, $F(E) \subset E$.

Enfin, pour tout $X_1, X_2 \in E$ et pour tout $t \in I$ tel que $t \geqslant t_0$, on a

$$F(X_2)(t) - F(X_1)(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s, X_2(s)) - f(s, X_1(s))]\,\mathrm{d}s$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} e^{-k\,(t-t_0)}\,||F(X_2)(t) - F(X_1)(t)|| &\leqslant e^{-k\,(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} ||f(s, X_2(s)) - f(s, X_1(s))||\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant e^{-k\,(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k\,||X_2(s) - X_1(s)||\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant e^{-k\,(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k\,e^{k\,(s-t_0)}\,||X_2 - X_1||_k\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \left(1 - e^{-k\,(t-t_0)}\right)\,||X_2 - X_1||_k. \end{aligned}$$

De même, pour tout $t \in I$ tel que $t \leqslant t_0$, on obtient

$$e^{-k\,(t_0-t)}\,||F(X_2)(t) - F(X_1)(t)|| \leqslant \left(1 - e^{-k\,(t_0-t)}\right)\,||X_2 - X_1||_k.$$

Conclusion : pour tout $t \in I$, on peut écrire

$$e^{-k\,|t-t_0|}\,||F(X_2)(t) - F(X_1)(t)|| \leqslant \left(1 - e^{-k\,|t-t_0|}\right)\,||X_2 - X_1||_k.$$

En prenant le max sur I, on a donc

$$||F(X_2) - F(X_1)||_k \leqslant \left(1 - e^{-k\,\ell}\right)\,||X_2 - X_1||_k,$$

avec $1 - e^{-k\,\ell} < 1$. F est donc contractante sur $(E, ||\cdot||_k)$ complet. D'après le théorème du point fixe, il existe une unique application X de E telle que $F(X) = X$, c'est à-dire ici telle que X est solution de (E).

Étape 3 - On suppose que I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Alors, I peut s'écrire comme la réunion d'une suite croissante de compacts contenant tous t_0. Autrement dit, $I = \cup_{j\in\mathbb{N}} I_j$, et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $I_j \subset I_{j+1}$ avec $t_0 \in I_j$ compact. D'après l'étape 2, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe une unique solution X_j sur I_j au problème de Cauchy. Donc, si X est solution du problème de Cauchy sur I, X et X_j coïncident sur I_j. De même, pour tout $t \in I$, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $t \in I_j$. En définissant $X(t) = X_j(t)$, on obtient alors, par unicité de X_j sur I_j, une solution X unique au problème de Cauchy sur I tout entier.