Théorème de projection sur un convexe fermé

Soient $(H, < \cdot >)$ un espace de Hilbert, $\|\cdot\|$ la norme associée à $< \cdot >$, et $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $p_K(x)$ dans K, appelé projection de x sur K, tel que $\|x - p_K(x)\| = d(x, K)$, où d est la distance de x à K.
Il est équivalent de dire que, pour tout $y \in K$, $< x - p_K(x), y - p_K(x) > \leqslant 0$.

Preuve

Préliminaire - Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de K. Comme $K \subset H$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy de H qui est complet. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans H. Enfin, puisque K est fermé, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans K. L'espace $(K, \|\cdot\|)$ est donc complet.

Existence - Soient $x \in H$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K telle que $d_n = \|x - u_n\| \to d(x, K)$, avec $d(x, K) = \inf_{y\in K} \|x - y\|$. Pour tous n, $m \in \mathbb{N}$, l'identité du parallélogramme donne

$$\left\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u_n - u_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(d_n^2 + d_m^2\right),$$

avec, comme K est convexe, $(u_n + u_m)/2 \in K$. On en déduit

$$\left\|\frac{u_n - u_m}{2}\right\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(d_n^2 + d_m^2\right) - d(x, K)^2,$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \left\|\frac{u_n - u_m}{2}\right\|^2 = 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de K donc converge vers ℓ_1 dans K.

Unicité - Supposons qu'il existe $\ell_2 \in K$, $\ell_1 \neq \ell_2$, tel que $\|x - \ell_2\| = d(x, K)$, alors

$$\begin{aligned}
\left\|x - \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}\right\|^2 &= \left\|\frac{x - \ell_1}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x - \ell_2}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2} < x - \ell_1, x - \ell_2 > \\
&= 2\left(\left\|\frac{x - \ell_1}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x - \ell_2}{2}\right\|^2\right) - \frac{1}{4}\|\ell_1 - \ell_2\|^2 \\
&= d(x, K)^2 - \frac{1}{4}\|\ell_1 - \ell_2\|^2 \\
&< d(x, K)^2,
\end{aligned}$$

Or, comme K est convexe, $(\ell_1 + \ell_2)/2 \in K$, il y a donc contradiction avec la définition de $d(x, K)$. Conclusion, ℓ_1 est unique et l'on peut noter $p_K(x) = \ell_1$ l'unique projeté orthogonal de x sur K.

Équivalence - (1) Supposons l'existence et l'unicité du projeté $p_K(x)$ de x sur K. Pour tout $y \in K$, soit $z \in K$ tel que $z = (1-t)\, p_K(x) + t\, y$ avec $t \in]0,1]$. On obtient

$$||x - p_K(x)||^2 \leqslant ||x - z||^2 = ||x - p_K(x) - t\,(y - p_K(x))||^2,$$

avec $||x - p_K(x) - t\,(y - p_K(x))||^2 = ||x - p_K(x)||^2 - 2\,t < x - p_K(x), y - p_K(x) > +t^2\, ||y - p_K(x)||^2$.
Ainsi, on a : $2 < x - p_K(x), y - p_K(x) > \leqslant t\, ||y - p_K(x)||^2$, inégalité qui doit être vraie pour tout $t \in]0,1]$, ce qui implique $< x - p_K(x), y - p_K(x) > \leqslant 0$.
(2) Supposons qu'il existe $x_0 \in K$ tel que, pour tout $y \in K$, $< x - x_0, y - x_0 > \leqslant 0$.
Alors, on a

$$\begin{array}{rcl} ||x - x_0||^2 - ||x - y||^2 & = & ||x - x_0||^2 - ||x - x_0 + x_0 - y||^2 \\ & = & -2 < x - x_0, x_0 - y > - ||x_0 - y||^2 \leqslant 0. \end{array}$$

Donc, pour tout $y \in K$, $||x - x_0|| \leqslant ||x - y||$, c'est-à-dire $||x - x_0|| = d(x, D)$.
Supposons qu'il existe $x_1 \in K$, $x_1 \neq x_0$, tel que, pour tout $y \in K$, $< x - x_1, y - x_1 > \leqslant 0$.
Alors, on a les inégalités suivantes

$$\begin{array}{rcl} < x - x_0, x_1 - x_0 > & \leqslant & 0, \\ < x - x_1, x_0 - x_1 > & \leqslant & 0, \end{array}$$

ce qui, en sommant, donne $< x_1 - x_0, x_1 - x_0 > \leqslant 0$, c'est-à-dire, $||x_1 - x_0||^2 \leqslant 0$, ce qui implique $x_1 = x_0$. Il y a donc unicité, et l'on peut poser $p_K(x) = x_0$.