Exercice 1 : QCM non pénalisant. 1°) On sait que $e^{-\,bidule} = \frac{1}{e^{bidule}}$ donc **réponse b.**

Remarque : Ou alors on choisit une valeur pour *a* (par exemple *a*= 10) et on regarde quelle réponse donne $e^{-0,1}$

2°) De même, on a : $e^{\frac{a}{2}} = (e^{a})^{½} = \sqrt{e^{a}}$ donc **réponse a.**

3°) Pour $x < 0$ on a $-x > 0$ donc $-\frac{1}{x} > 0$ donc on peut en prendre le logarithme.

Et on a $\ln(-\frac{1}{x}) = \ln(\frac{1}{-x}) = \ln 1 - \ln(-x) = -\ln(-x)$ car $\ln 1 = 0$ donc **réponse b.**

4°) $f(x) = x\ln x$ est de la forme uv avec $u = x$ donc $u' = 1$ et $v = \ln x$ donc $v' = 1/x$ d'où
$f'(x) = 1.\ln x + x\,(1/x) = \ln x + 1$ donc ***réponse d.***

Exercice 2 : Résultats à arrondir à 10^{-3}

1. X suit une loi normale N(40,5 ; 12²) soit $\mu = 40,5$ et $\sigma = 12$

a) $p(30 \leq X \leq 35)$ = normalFrep(30 , 35 , 40,5 , 12)= 0,13256 = 0,133 à 10^{-3} près

b) Ici, on cherche $p(X > 55) = 1 - p(X \leq 55)$ = 1 – normalfrep(-10^99 , 55, 40,5, 12) = 0,113

2°) n= 1000 et la proportion (à vérifier) est p= 0,75

a) L'intervalle de fluctuation asymptotique est $I_{FA} = \left[\, p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,\right]$ = [0,723 ; 0,777]

avec $n > 30$; $np = 750 > 5$ et $n(1-p) = 250 > 5$

b) La fréquence observée est donc f = 600/1000 = 0,6

La règle est la suivante : si $f \in I_{FA}$, on accepte l'hypothèse, au risque 5%, sinon on la rejette, toujours au risque 5%

c) Ici 0,6 n'est pas dans l'intervalle donc, au risque 5%, on peut contredire le slogan publicitaire de la banque.

Exercice 3 (Obligatoire): Partie A : 1. On a u_o=42 et chaque année, le nombre de livres diminue de 5% (CM=0,95), mais augmente de 6000 = 6 milliers donc en final $u_{n+1} = 0,95u_n + 6$

2. Cet algorithme permet de déterminer la valeur de N (donc de l'année 2013+N) à partir de laquelle le nombre de livres deviendra supérieur à 100 milliers, car la boucle *« Tant que »* continue tant que *U (c'est-à-dire u_n) est < 100*

Elle s'arrête donc dès que *U* dépasse 100.

Etape	U	N	U < 100 ?	U'	N'
1	42	0	oui	45,9	1
2	45,9	1	oui	49,605	2
3	49,605	2	oui	53,12475	3
4	53,12475	3	oui	56,4685125	4
5	56,4685125	4	oui	59,6450869	5
6	59,6450869	5	oui	62,6628325	6
7	62,6628325	6	oui	65,5296909	7
8	65,5296909	7	oui	68,2532064	8
9	68,2532064	8	oui	70,840546	9
10	70,840546	9	oui	73,2985187	10
11	73,2985187	10	oui	75,6335928	11
12	75,6335928	11	oui	77,8519132	12
13	77,8519132	12	oui	79,9593175	13
14	79,9593175	13	oui	81,9613516	14
15	81,9613516	14	oui	83,863284	15
16	83,863284	15	oui	85,6701198	16
17	85,6701198	16	oui	87,3866139	17
18	87,3866139	17	oui	89,0172832	18
19	89,0172832	18	oui	90,566419	19
20	90,566419	19	oui	92,0380981	20
21	92,0380981	20	oui	93,4361931	21
22	93,4361931	21	oui	94,7643835	22
23	94,7643835	22	oui	96,0261643	23
24	96,0261643	23	oui	97,2248561	24
25	97,2248561	24	oui	98,3636133	25
26	98,3636133	25	oui	99,4454326	26
27	99,4454326	26	oui	100,473161	27
28	100,473161	27	non		

3. Avec un tableau, c'est long, très long, mais on trouve n= N= 27

Avec la calculatrice genre TI, le programme à faire

est le suivant :

```
PROGRAM : ADN
: 42-> U
: 0->N
: While U < 100
: U*0.95+6->U
:N+1->N
:End
:disp N
```

Remarque: < est dans ***tests*** (2^{nd} math)

Partie B : 1. La modification à apporter est :
U prend la valeur U*0,95+4

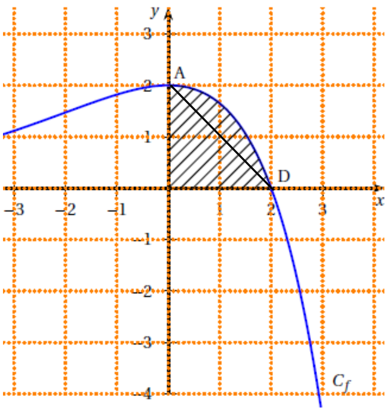
2. On admet que $v_{n+1} = 0,95v_n + 4$ et on a $w_n = v_n - 80$

On a alors $w_{n+1} = v_{n+1} - 80 = 0,95v_n + 4 - 80 = 0,95v_n - 76 = 0,95\,[\,v_n - 76/0,95\,] = 0,95w_n$ donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de terme initial $w_o = v_o - 80 = -38$

3. on admet que $w_n = -38 \times 0{,}95^n$

a) On a $-1 < 0{,}95 < 1$ donc $\lim 0{,}95^n = 0$ b. On a donc $\lim v_n = 80 + 0 = 80$ c. A terme, il y aura 80 000 livres

Exercice 4 :



Partie A : 1. On a $f(2) = 0$ et $f'(0) = 0$ car sa tangente est horizontale

2. On a $f(x) = (b - x)\, e^{ax}$ donc de la forme uv avec $u = b - x$ et $v = e^{ax}$
D'où $u' = -1$ et $v' = ae^{ax}$ d'où $F'(x) = [\, -1 + ab - ax\,]\, e^{ax}$

3. On a donc $f(2) = (b-2)e^{2a} = 0$ donc $b - 2 = 0$
Puis $f'(0) = [\, -1 + ab - 0]\, e^{0} = 0$ donc $ab - 1 = 0$

Conclusion : on a bien $\begin{cases} b - 2 = 0 \\ ab - 1 = 0 \end{cases}$

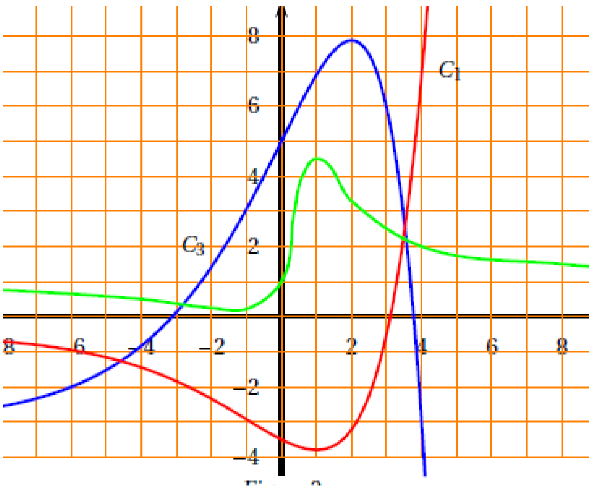
4. On en déduit que $b = 2$ puis que $2a - 1 = 0$ donc $a = ½$

Partie B : 1. Soit B le point de coordonnées B(2 ;2). L'aire du carré ODBA est $2 \times 2 = 4$ ua, et celle du triangle OAD est la moitié, soit 2 ua. L'intégrale cherchée est située entre les 2, donc entre 2 et 4.

2.a. On a $F'(x) = -2\, e^{0,5x} + (-2x+8)e^{0,5x} \times 0{,}5 = -2\, e^{0,5x} + (-x+4)e^{0,5x} = (-x + 2)\, e^{0,5x} = f(x)$ donc F est bien une primitive de f

b. On a alors $\int_0^2 f(x)dx$ = F(2) – F(0) = (-4 + 8) e^1 - (8) = 4 e – 8 = 2,87312…

3. On a G' = f et on peut connaître le signe de f grâce à la courbe ci-dessus : $f(x) > 0$ jusqu'à 2 puis < 0 après 2



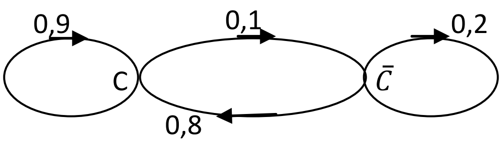
Le tableau de variations de G est donc :

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
G'(x) = $f(x)$	+	-
G	↗	↘

C'est donc la courbe C_3

Exercice 3 : Spécialité

1. a.b Graphe probabiliste et matrice



$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

c) On a $X_1 = (\,0 \;\; 1)$ puis $X_2 = X_1M$ et $X_3 = X_1M^2 = (0{,}88 \;\; 0{,}12)$ donc la probabilité est de 0,88 au 3^e jour

2°) On a $X_{n+1} = (a_{n+1} \;\; 1-a_{n+1}) = X_n \,.\, M = (\,a_n \quad 1-a_n) \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix} = (\,0{,}9(a_n) + 0{,}8(1-a_n) \quad 0{,}1a_n + 0{,}2(1-a_n)\,)$ car $b_n = 1 - a_n$.

Donc $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}8 - 0{,}8a_n = 0{,}1a_n + 0{,}8$

3. a) On a $u_{n+1} = a_{n+1} - 8/9 = 0{,}1a_n + 0{,}8 - 8/9 = 0{,}1a_n - 4/45 = 0{,}1\,[\,a_n - 40/45] = 0{,}1\,[a_n - 8/9] = 0{,}1u_n$

Donc (u_n) est géométrique de raison 0,1 et de terme initial $u_o = a_o - 8/9 = -8/9$ d'où $u_n = -(8/9) \times 0{,}1^n$ et

$a_n = 8/9 - (8/9) \times 0{,}1^n$

b) On a $-1 < 0{,}1 < 1$ donc $\lim u_n = 0$ puis $\lim a_n = 8/9$ c) A terme, il y a 8 chances sur 9 pour que Léa soit connectée.