BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **5**

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

Ce sujet nécessite l'utilisation d'une feuille de papier millimétré.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

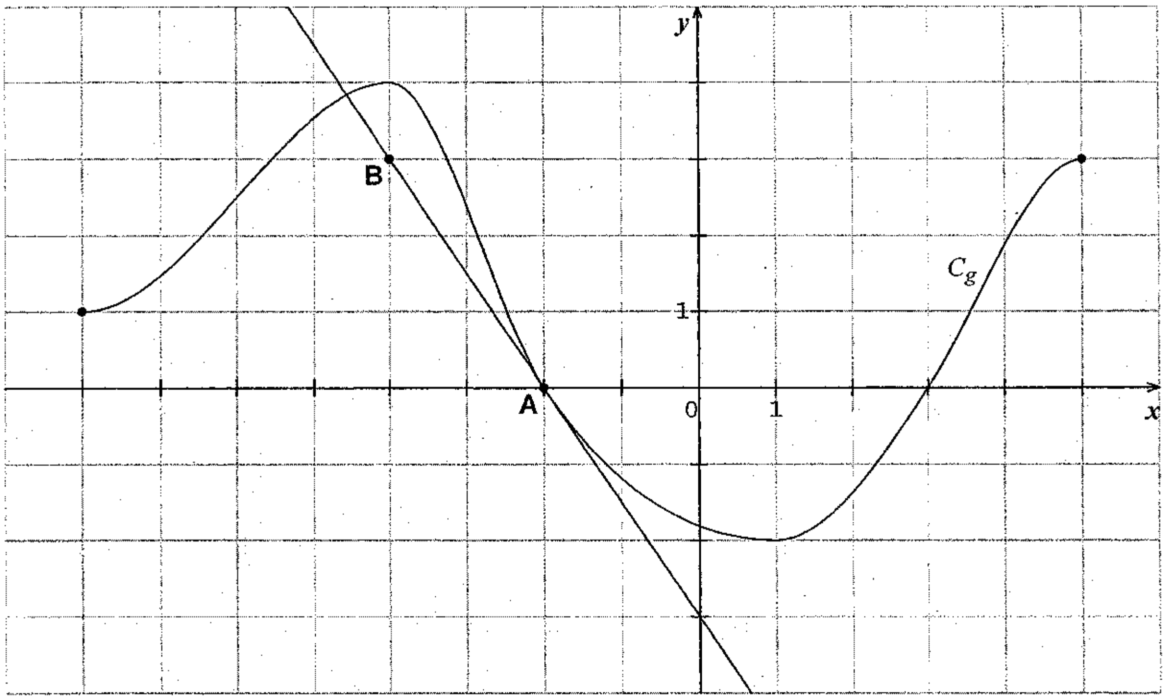
Exercice 1 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Il est constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

1. La courbe C_g tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[-8\,;5]$. La droite (AB) tracée sur le graphique est la tangente à la courbe C_g au point A d'abscisse -2.

On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[-8\,;5]$.



a. $g'(-2) = -1{,}5$

b. $g'(-2) = 0$

c. $g'(-2) = -\dfrac{2}{3}$.

2. On note G une primitive sur l'intervalle $[-8\,;5]$ de la fonction g introduite à la question 1 ;

a. la fonction G admet un minimum en -2

b. la fonction G est décroissante sur l'intervalle $[-4\,;1]$

c. la fonction G est croissante sur l'intervalle $[-8\,;-2]$.

3. Soit $I = \int_2^7 (2x+1-\frac{1}{x})\ dx$;

a. $I = 50 + \ln\left(\frac{2}{7}\right)$

b. $I = 48{,}7$

c. $I = 10 - \frac{1}{7} + \frac{1}{2}$.

4. Soit f la fonction définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{6x-5}{3x^2-5x+7}$$

On note F la primitive de f sur **R** telle que $F(1) = 1$.

a. Pour tout x de **R**, $F(x) = \ln(3x^2 - 5x + 7)$

b. Pour tout x de **R**, $F(x) = \ln(3x^2 - 5x + 7) + 1 - \ln(5)$

c. Pour tout x de **R**, $F(x) = \frac{1}{(3x^2-5x+7)} + 1$.

Exercice 2 *(5 points)*

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Anna a créé un site web. Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre hebdomadaire de visiteurs de ce site au cours des huit premières semaines suivant sa création.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

1. **a.** Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal, en prenant pour unités 1 cm pour une semaine sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 visiteurs sur l'axe des ordonnées.

b. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points, et le placer dans le repère précédent (on arrondira l'ordonnée du point G à l'unité près).

2. **a.** *Pour cette question, les calculs pourront être effectués à l'aide de la calculatrice ; aucun détail n'est exigé à leur propos.*

Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite (D) d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients a et b seront arrondis à l'entier le plus proche.

b. Tracer la droite (D) dans le repère précédent.

c. En utilisant l'ajustement affine précédent, estimer le nombre de visiteurs lors de la dixième semaine suivant la création du site.

3. En remarquant que l'augmentation du nombre de visiteurs est plus faible sur les dernières semaines, on peut penser à faire un ajustement de type « logarithmique ».
Pour cela, on pose : $z = \ln(x)$.

a. On donne le tableau suivant :

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(x_i)$	0	0,693		1,386	1,609		1,946	2,079
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

Préciser les valeurs manquantes z_3 et z_6, en arrondissant les résultats obtenus à 10^{-3} près.

b. On admet que l'équation de la droite (d) d'ajustement affine de y en z, obtenue par la méthode des moindres carrés, est : $y = 133z + 184$.
En utilisant ce résultat, procéder à une nouvelle estimation du nombre de visiteurs lors de la dixième semaine (le résultat sera arrondi à l'unité).

c. À l'aide de ce nouvel ajustement, déterminer le rang de la semaine au cours de laquelle le nombre prévisible de visiteurs dépassera 600.

Exercice 3 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Un fournisseur d'accès internet effectue une enquête de satisfaction sur un panel de 2000 clients, dont l'abonnement a plus de 12 mois d'ancienneté.

Parmi eux :

- 900 n'ont jamais subi de coupure prolongée de connexion.
- 500 clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion dans les 12 derniers mois.
- les autres clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an.

L'enquête révèle que :

- 95% des clients n'ayant jamais subi de coupure prolongée se déclarent satisfaits du service fourni.
- 50% des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion dans les douze derniers mois se déclarent satisfaits du service fourni.
- 70% des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an se déclarent satisfaits du service fourni.

On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont été interrogés.

On considère les événements suivants :

J : « le client n'a jamais subi de coupure prolongée de connexion »

R : « la dernière coupure prolongée de connexion du client est survenue au cours des douze derniers mois » (elle est « récente »)

A : « la dernière coupure prolongée de connexion du client date d'il y a plus d'un an » (elle est « ancienne »)

S : « le client se déclare satisfait »

$\overline{S}$ désigne l'événement contraire de S.

1. **a.** Calculer les probabilités des événements J, R et A.
   b. Construire un arbre pondéré décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

2. Calculer la valeur exacte de la probabilité que le client soit satisfait et n'ait jamais subi de coupure prolongée de connexion.

3. Démontrer que la probabilité que le client choisi se déclare satisfait est égale à 0,7625.

4. Le client choisi se déclare satisfait du service fourni. Quelle est la probabilité qu'il ait subi une coupure prolongée de connexion au cours des douze derniers mois (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième) ?

5. On choisit au hasard trois clients parmi ceux du panel interrogé durant l'enquête. On admet que ce panel est suffisamment important pour assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.
   Déterminer la probabilité qu'exactement un des clients choisis se déclare non satisfait du service fourni (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième).

Exercice 4 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(-4x^2+5)e^{-x}+3$$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

a. Démontrer que pour tout réel x de $[0;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=(4x^2-8x-5)e^{-x}.$$

b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x)=-\dfrac{4x^2}{e^x}+\dfrac{5}{e^x}+3$.

b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$ (on pourra utiliser le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$).

c. Interpréter graphiquement cette limite.

3. À l'aide des questions 1. et 2., dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. Justifier que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0;+\infty[$.

Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise produit de la peinture qu'elle vend ensuite. Toute la production est vendue.
Le coût moyen unitaire de cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A :
pour x hectolitres de peinture fabriqués (avec $x \in [0,5;8]$), le nombre $f(x)$ désigne le coût moyen unitaire de production par hectolitre de peinture, exprimé en centaines d'euros (on rappelle qu'un hectolitre est égal à 100 litres).
Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle. On pourra utiliser les résultats de la partie A. Chaque réponse sera justifiée.

1. Déterminer le coût moyen unitaire de production en euros, arrondi à l'euro près, pour une production de 500 litres de peinture.

2. **a.** Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire pour minimiser le coût moyen unitaire de production ? Quel est alors ce coût, arrondi à l'euro près ?

b. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100 euros. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'entreprise peut réaliser des bénéfices.

Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

3. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 300 euros.
On appelle seuil de rentabilité la quantité à partir de laquelle la production est rentable, c'est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice.
Quel est le seuil de rentabilité pour cette entreprise ?