

Petit précis de traitement du signal à l'usage des duplicistes opérant par interférométrie des tavelures

Jocelyn Sérot
Société Astronomique de France
`jocelyn.serot@free.fr`

8 juillet 2012

Préambule

L'interférométrie des tavelures (*speckle interferometry*) [4, 3, 2, 1, 8] est une technique mise au point dans les années 70 qui permet, dans certaines conditions, de retrouver le pouvoir de résolution d'un télescope limité sinon par la turbulence atmosphérique. Cette technique a depuis été largement utilisée par les astronomes professionnels pour la mesure d'étoiles doubles « serrées » (jusqu'à quelques dizaines de *mas*). Depuis une petite dizaine d'année, elle est aussi utilisée par quelques amateurs (F. Losse sur T20 puis T40, R. Gili sur la L76 de Nice, B. Tregon au T60 du Pic et plusieurs membres de la SAF – dont l'auteur – à la L50 de Nice). Sur ces « gros » instruments, la technique fait des miracles : elle permet de s'affranchir des effets de la turbulence et s'approcher du pouvoir séparateur même par nuit « agitée » [6]. Par comparaison, le rendement des techniques de *lucky imaging*, qui opèrent par tri et sélection d'images, est bien moindre (certaines nuits pouvant même se révéler totalement inexploitable).

Le logiciel REDUC [5] développé par F. Losse, implante, à partir de la version 4, un protocole de mesure par interférométrie des tavelures fondé sur le calcul de la fonction d'auto-corrélation des images issues d'une séquence d'acquisition. Le logiciel REDUC permet d'exploiter cette technique en ignorant tout, ou presque, de la théorie sous-jacente. On peut toutefois être tenté, par curiosité ou afin de mieux comprendre l'impact de certains paramètres, de retracer les fondamentaux de cette théorie.

C'est l'objectif de cet article qui s'attache à faire une synthèse la plus concise possible des concepts et techniques associés. L'exercice est loin d'être trivial tant est riche, sur les plans conceptuel mais aussi mathématique, le domaine abordé. Le challenge consiste ici avant tout à organiser un corpus de résultats selon une trame qui permette de présenter la manière la plus directe possible les fondements théoriques de la méthode, en évitant, autant que faire se peut, toute

digression non indispensable. On ne trouvera donc dans le présent document rien qui n'ait été déjà été présenté, et de manière souvent plus rigoureuse, dans les multiples ouvrages de référence traitant du traitement du signal en général ([7], pour ne citer que celui-ci). Il faut plutôt y voir une tentative de relecture dirigée du domaine.

1 Principe de méthode et position du problème

En théorie, l'astrométrie d'un couple stellaire est simple : elle se réduit à la mesure de la séparation angulaire ρ et de l'angle de position θ entre les centroides des disques d'Airy (PSF) des deux composantes (fig. 1).

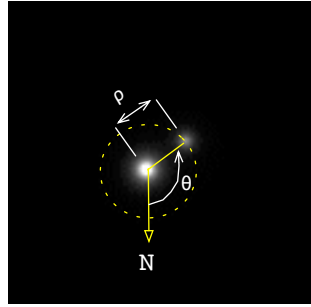


FIG. 1 – Principe de mesure d'une étoile double

En pratique, les choses sont plus délicates, à cause de la turbulence atmosphérique. Sur une pose « longue » (c.à.d. de durée significativement plus longue que le temps de cohérence de la turbulence), la turbulence va « étaler » et « mélanger » les PSFs au point de rendre la mesure difficile voire impossible. Sur une pose « courte » (c.à.d. de durée inférieure au temps de cohérence), l'image du couple de présente typiquement comme un « amas de tavelures », dont la structure résulte de l'interférence¹ entre des « grains élémentaires » correspondant aux PSFs, déformées et décalées de chacune des composantes (fig. 2).

L'idée clé de la méthode est que l'information de séparation et de position est toujours présente dans cette image sous forme d'une *corrélation* entre les positions des tavelures et que l'on doit pouvoir la retrouver en calculant la fonction d'auto-corrélation de l'image :

$$A(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, y) I(x + u, y + v) dx dy \quad (1)$$

ou plutôt, nos images étant par définition discrètes et bornées

¹D'où le nom donné à la méthode : *speckle interferometry* ou interférométrie des tavelures.

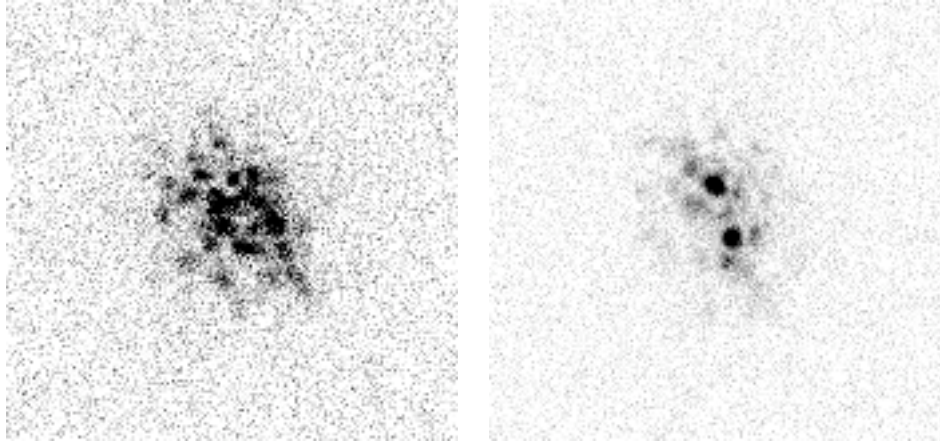


FIG. 2 – Image d’une étoile double ($(\gamma \text{ VIR}, \text{STF1670AB}, \rho = 1,78''$ en 2012) à travers un télescope de 30cm d’ouverture ($F=13,5 \text{ m}, E=0,085''/\text{pixel}$). A gauche une image brute issue d’une séquence de 600 images. A droite, la meilleure image de la séquence (moins de 1% des images présentent cet aspect).

$$A(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} I(m, n) \tilde{I}(m+k, n+l) \quad (2)$$

où \tilde{I} désigne l’image obtenue en complétant (« padding ») l’image source I avec des zéros en dehors du domaine initial.

On peut bien sûr calculer directement l’auto-corrélation en utilisant l’éq. (2). C’est notamment la base des algorithmes dits VA (*vector correlation* et DVA (*directed vector autocorrelation*, [1]).

Mais on peut aussi tirer parti d’un théorème bien connu en traitement du signal, dit de Wiener-Khintchine, qui établit que la transformée de Fourier A de la fonction d’auto-corrélation d’un signal n’est autre que la densité spectrale d’énergie S de ce signal :

$$TF[A] = S \quad (3)$$

ou, dans l’autre sens :

$$A = TF^{-1}[S] \quad (4)$$

Le principal intérêt de cette approche est que la densité spectrale d’énergie² S s’obtient facilement comme le carré du module de la transformée de Fourier du signal et que les transformées de Fourier se calculent désormais numériquement

²On trouve souvent le terme spectre de puissance (*power spectrum*) dans la littérature, mais on verra plus loin qu’il s’agit à proprement parler d’un abus de langage.

de manière très efficace avec les algorithmes de FFT (*Fast Fourier Transform*). Le calcul de la fonction d'auto-corrélation se ramène donc, dans les grandes lignes donc, à trois opérations : un calcul de FFT, une élévation au carré, un calcul de FFT inverse.

On le voit, la notion clé, qui sous-tend toute la méthode est celle de transformée de Fourier. Commençons donc par nous rafraîchir un peu la mémoire à ce sujet.

2 La transformée de Fourier

Pour simplifier, on se place d'abord dans le contexte des **signaux continus mono-dimensionnels, à valeur réelle**³.

Par définition, la transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ est le signal $X(\nu)$ défini⁴ par

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (5)$$

X est en général une fonction à valeur complexe, parfois appelée *spectre*. On a d'ailleurs :

$$Re[X(\nu)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi\nu t) dt \quad (6)$$

$$Im[X(\nu)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi\nu t) dt \quad (7)$$

et

$$|X(\nu)| = \sqrt{Re[X(\nu)]^2 + Im[X(\nu)]^2} \quad (8)$$

$$\angle X(\nu) = \text{Arctan}(-Im[X(\nu)]/Re[X(\nu)]) \quad (9)$$

Ceci dit, si x est réel, alors $Re[X]$ est une fonction paire et $Im[X]$ est une fonction impaire (ce qui signifie au passage qu'on peut se contenter de les tracer pour $\nu \geq 0$). Si, par ailleurs x est paire, alors $Re[X]$ est aussi paire et $Im[X]$ est nulle (autrement dit, la TF d'un signal réel pair est réel et pair⁵).

Inversibilité. Une propriété fondamentale de la TF est le fait qu'elle soit inversible : on peut retrouver le signal d'origine $x(t)$ à partir de son spectre $X(\nu)$:

³On sera amené bien sur à manipuler des signaux à valeur complexe, mais les signaux d'entrée et de sortie, représentant des grandeurs physiques, seront toujours réels.

⁴Le nom des variables t et ν est évidemment arbitraire. Dans le cas 1D, t désigne souvent le temps et ν correspond alors à une fréquence au sens habituel du terme (inverse d'un temps). Dans le cas 2D, l'interprétation sera différente.

⁵Symétriquement, si x est réel et impair, alors X est imaginaire pure et sa partie imaginaire est impaire.

$$x = TF^{-1}[X]$$

où

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{j2\pi\nu t} d\nu \quad (10)$$

Interprétation. Les formules (5) et (10) permettent d'interpréter la TF comme une opération de décomposition sur une base (infinie) de fonctions. Les fonctions de la base sont des sinusoides pures $\phi_\nu(t) = e^{j2\pi\nu t}$ et la projection du signal x sur l'élément ϕ_ν est le produit scalaire $\langle x, \phi_\nu \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt$. Autrement dit, on voit le signal x comme une somme de composantes de fréquence pure ϕ_ν dont le module et la phase sont pondérés par $X(\nu)$.

Dit encore autrement, $X(\nu)$ et $x(t)$ sont deux représentations *duales* d'un même signal, la première fréquentielle, la seconde temporelle⁶.

Spectre continu vs. spectre discret. Dans le cas de signaux *transitoires* (c.à.d. nuls en dehors d'un intervalle borné $[-B, +B]$), le spectre $X(\nu)$ est continu. Dans le cas de signaux *périodiques* (de période T), on montre que le spectre devient *discret*, c.à.d. formé d'une suite de *raies*⁷ :

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\nu - n\nu_0) \quad (11)$$

où

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi n\nu_0 t} dt$$

$$\nu_0 = 1/T$$

On ne s'intéressera ici qu'aux signaux transitoires (nos images étant par définitions bornées).

2.1 Cas des signaux discrets

En pratique, on ne dispose⁸ pas d'un signal continu $\{x(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, mais d'un signal discret $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

⁶Notons au passage, que pour connaître exactement $X(\nu_0)$ pour ν_0 donnée, il faut connaître $x(t)$ pour tout $t \in]-\infty, +\infty[$; réciproquement, la connaissance exacte de la valeur de x à un instant t_0 suppose la connaissance du spectre $X(\nu) \forall \nu \in]-\infty, +\infty[$. On retrouve là le classique principe d'incertitude temps-fréquence.

⁷On peut dès lors voir le spectre d'un signal transitoire comme le passage à la limite d'un signal périodique quand la période T tend vers l'infini; les raies se rapprochent alors jusqu'à former un spectre continu.

⁸Il ne nous importe pas de savoir ici si le signal $x(n)$ est donné tel quel ou obtenu par échantillonnage d'un signal continu. Ce qui permet d'éviter, au moins à ce niveau, les questions liées à l'échantillonnage justement.

Le passage au discret se fait « naturellement » en remplaçant l'intégrale par une somme dans l'éq. (5), soit⁹ :

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi\nu n} \quad (12)$$

Comme dans le cas continu, $X(\nu)$ est dans le cas général une fonction complexe. Sa partie réelle est paire et sa partie imaginaire impaire si $x(n)$ est réel.

La principale différence est que $X(\nu)$ est maintenant périodique, de période 1.

La TF d'un signal discret est bien entendu inversible et la transformation inverse est donnée par :

$$x(n) = \int_{t_0}^{t_0+1} X(\nu)e^{j2\pi\nu n} d\nu \quad (13)$$

où t_0 peut-être choisi librement puisque $X(\nu)$ est périodique de période 1 (en pratique on prend souvent $t_0 = 0$ ou $t_0 = -1/2$).

La fig. 3 illustre la transformée d'un signal discret $a(n) = a^n \text{rect}_N(n)$, où a est un réel < 1 et rect_N une fonction porte centrée de largeur N .

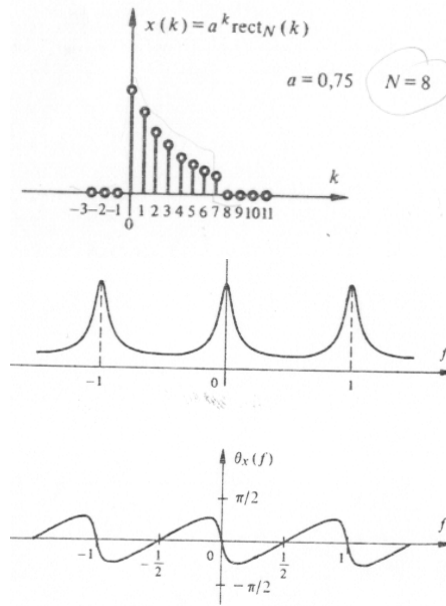


FIG. 3 – Exemple de TF d'un signal discret

⁹Pour les automaticiens : la TF d'un signal discret n'est donc autre que la transformée en Z du signal $x(n)$ obtenue en prenant $z = e^{j2\pi\nu}$, c.à.d. en faisant décrire à z le cercle unité.

2.2 Transformée de Fourier discrète

D'un point de vue calculatoire pratique, les définitions (12) et (13) présentent deux inconvénients :

- la variable ν reste continue,
- le nombre de valeurs $x(n)$ est *a priori* infini.

Afin de pallier ces problèmes - et se ramener ainsi à un schéma de calcul implantable numériquement -, il faut remplacer la variable continue ν par une variable discrète et limiter la durée du signal $x(n)$.

Discrétisation de la fréquence. On divise la période du signal $X(\nu)$ en N points $\nu_k = k/N$ ($k = 0 \dots N - 1$), introduisant de ce fait un pas d'échantillonnage fréquentiel $\Delta\nu = 1/N$.

On réécrit alors la formule de la TF inverse sous la forme d'une somme :

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} \quad (14)$$

On a noté $\hat{x}(n)$ et non $x(n)$ car, clairement, la formule (14) ne fournit qu'une *approximation* de $x(n)$, limitée *in fine* par le pas d'échantillonnage $\Delta\nu$. De fait, un calcul rapide montre que, alors que x était un signal quelconque, \hat{x} est, lui, périodique, de période N . Plus précisément, on montre que \hat{x} est obtenu par *répétition périodique*, de période N , de x :

$$\hat{x}(n) = \sum_{p=0}^{\infty} x(n + pN) \quad (15)$$

La relation (15) montre que si la durée du signal aperiodique x est limitée à N , alors chaque période de \hat{x} est une réplique exacte de x . Sinon, un recouvrement a lieu et il devient impossible de retrouver exactement x à partir de \hat{x} (autrement dit de resynthétiser $x(n)$ à partir de son spectre discret $X(k)$).

Par la suite, on se placera dans le cadre de la première hypothèse.

La **transformée de Fourier discrète** (TFD) est dès lors définie, pour un signal $x(n)$ aperiodique à durée limitée $[0, N[$ par les deux équations suivantes, qui décrivent respectivement la décomposition d'un signal x en son spectre X et la synthèse de ce signal à partir de son spectre :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad (16)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} \quad (17)$$

ou encore, en introduisant la quantité $W_N = e^{j2\pi/N}$ (racine N^e de l'unité¹⁰) :

¹⁰On trouve parfois dans la littérature $W_N = e^{-j2\pi/N}$. Les signes sont alors permutés dans les définitions précédentes.

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W_N^{-nk} \quad (18)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{nk} \quad (19)$$

On notera que, sous les hypothèses données plus haut, les deux signaux $x(n)$ et $X(n)$ sont périodiques, de période N ; mais en pratique, on les ne calcule que sur une seule période ($0 \dots N - 1$, typiquement).

Les quantités $|X(n)|$ et $\angle X(n)$ sont appelées spectre discret d'amplitude et de phase respectivement.

2.3 Transformée de Fourier rapide (FFT)

C'est juste une méthode de calcul optimisée de la TFD qui tire parti de certaines redondances dans les équations (18) (redondances liées aux propriétés des facteurs W_N^{nk}). Sans rentrer dans les détails, disons que l'on peut ramener le calcul d'une FFT sur N points à celui de deux FFTs sur $N/2$ points. On est alors ramené à un schéma de calcul en arbre binaire dont le coût final est proportionnel à $N \log(N)$ (au lieu de N^2 si on applique « bêtement » les formules).

C'est la disponibilité d'implantations efficaces de la FFT qui rend le procédé de calcul de l'auto-corrélation via la TF attractif.

Exemple. Le listing 2.3 donne un exemple de calcul de la FFT avec le logiciel OCTAVE¹¹. Les résultats affichés (via la commande `plot`) sont reproduits fig. 4.

```
N = 32
a = 0.75

# Le signal x : x(n) = a^n . rect_N
# Attention : sous Octave (et Matlab), les indices commencent
# à 1 (et non 0)

x = a .^ [1:N]

plot(x, 'o'); title("x(n)"); axis([1,N]); xlabel("n");

# Calcul de la FFT avec N=32 points

X = fft(x)

# La fonction fftshift permet de replacer la composante
# continue (frequence nulle) au centre du graphe
```

¹¹Un clone libre de MATLAB.


```

Xc = fftshift(X)

plot(real(Xc), 'o'); title("Real(X(n))"); axis([1,N]);
plot(imag(Xc), 'o'); title("Imag(X(n))"); axis([1,N]);
plot(abs(Xc), 'o'); title("|X(n)|"); axis([1,N]);
plot(angle(Xc), 'o'); title("Arg(X(n))"); axis([1,N]);

# Retour au domaine temporel via la FFT inverse
# On verifie que l'on retrouve x (et accessoirement que la
  partie imaginaire est nulle)

xr = ifft(X)
plot(real(xr), 'ob; Real(xr(n));', x, 'xr;x(n);'); axis([1,N]);
plot(imag(xr), 'o'); title("Imag(xr(n))"); axis([1,N]);

```

Exemple d'utilisation de la FFT avec le logiciel OCTAVE

2.4 Transformée de Fourier bi-dimensionnelle

La transformée de Fourier se généralise aisément aux signaux bi-dimensionnels¹². Dans notre cas, la dimension temporelle t est remplacé par deux dimensions spatiales x et y et la fréquence ν est remplacée par un couple de fréquences spatiales u et v .

Cas continu. Les éq. (5) et (10) deviennent¹³ pour un signal bidimensionnel noté $f(x, y)$:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (20)$$

et

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (21)$$

L'interprétation de la TF est similaire à celle établie pour la cas mono-dimensionnel : le signal f est décomposé en une somme de « fréquences pures » $\phi_{(u,v)}(x, y) = e^{j2\pi\vec{u}\cdot\vec{v}}$ pondérées par le spectre $F(u, v)$. Les fréquences sont ici spatiales. On peut les visualiser comme des sinusoides (« tôles ondulées ») de fréquence $\sqrt{u^2 + v^2}$ et d'« orientation » $\vec{u} = (u, v)$. Comme en 1D, le spectre d'un signal f est, dans le cas général un signal complexe¹⁴.

Cas discret. On procède comme en 1D, en commençant par discrétiser le signal : $f(x, y)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ devient $f(k, l)$ avec $k, l \in \mathbb{N}$, et la transformée directe s'écrit :

¹²En fait aux signaux n -dimensionnels.

¹³La similitude entre les cas 1D et 2D est renforcée si on note $\vec{x} = (x, y)$ et $\vec{u} = (u, v)$; l'intégrande de (20) (resp. (21)) s'écrit alors $f(x, y) e^{-j2\pi\vec{x}\cdot\vec{u}}$ (resp. $F(u, v) e^{j2\pi\vec{x}\cdot\vec{u}}$).

¹⁴En particulier, le spectre d'une sinusoïde pure est un couple d'impulsions de Dirac situées en (u, v) et $(-u, -v)$ resp.

$$F(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(k, l) e^{-j2\pi(ku+lv)} \quad (22)$$

Comme en 1D, F est une fonction périodique, de période 1 en k et en l . On peut donc se contenter de la décrire sur $[0, 1]^2$ (ou $[-1/2, +1/2]^2$).

La transformée inverse continue se s'écrit sous forme intégrale :

$$f(k, l) = \int_{-1/2}^{+1/2} \int_{-1/2}^{+1/2} F(u, v) e^{j2\pi(ku+lv)} \quad (23)$$

Comme en 1D, et pour des raisons similaires, on discrétise ensuite l'espace fréquentiel en $M \times N$ points en ramenant les variables continues u et v à des variables discrètes : $u_m = m/M$ ($m = 0 \dots M-1$) et $v_n = n/N$ ($n = 0 \dots N-1$). Ce qui permet de transformer (21) en

$$\hat{f}(k, l) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(m, n) e^{j2\pi(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} \quad (24)$$

\hat{f} est périodique en k et l (période M et N resp.). Elle se confond avec f si f était nulle en dehors du domaine $[0, M-1] \times [0, N-1]$. Sinon, comme dans le cas 1D, il y a recouvrement. Si oui, on peut écrire :

$$F(m, n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}(k, l) e^{-j2\pi(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} \quad (25)$$

Les relations (25) et (24) définissent la **transformée de Fourier bidimensionnelle discrète** (TFD2).

Sépérabilité et calcul. On montre assez facilement¹⁵ que la TFD2 (et son inverse) sont *séparables*, autrement dit qu'elles peuvent chacune se réécrire comme la composée (au sens mathématique du terme) de deux transformées 1D. On peut dès lors utiliser la FFT pour calculer chacune des ces TFD.

Exemple. Le listing 2.4 donne un exemple de calcul de la TFD2 avec la fonction `fft2` du logiciel OCTAVE. Les résultats affichés (via la commande `mesh`) sont reproduits fig. 5.

```
N = 32

# Une image simple : un écart écentré en 128x128

x = zeros(N,N)
x(N/4:3*N/4,N/4:3*N/4)=1
```

¹⁵Soit directement à partir des équations, soit en passant par une formulation matricielle.

```

mesh(x)
print(" tfd2_ex_x.eps");

# La TFD2
# Comme en 1D, la fonction fftshift permet de recentrer les
# graphes

X = fft2(x)
mesh(real(fftshift(X))) # Parties réelle et imaginaire
mesh(imag(fftshift(X)))
mesh(fftshift(abs(X))) # Module et argument
mesh(fftshift(angle(X)))

# TFD2 inverse

xr = ifft2(X)
mesh(real(xr)) # On retrouve bien le signal original...
mesh(imag(xr)) # ... avec une partie imaginaire nulle

```

Exemple d'utilisation de la FFT2D avec le logiciel OCTAVE

3 Retour au problème

Notre problème consiste, rappelons-le, calculer la fonction d'auto-corrélation d'une image $I(m, n)$

$$A_I(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} I(m, n) \tilde{I}(m+k, n+l)$$

en exploitant le théorème de Wiener-Khintchine, qui dit que la transformée de Fourier de cette fonction d'auto-corrélation est égale à la densité spectrale d'énergie S_I du signal¹⁶

$$TF[A] = S$$

Le schéma de calcul de A_I est alors simple :

1. calcul de la transformée de Fourier $F(u, v)$ de l'image I
2. extraction du module de F et élévation au carré
3. la transformée de Fourier inverse du carré du module donne A_I

¹⁶Notons bien que s'agissant d'un signal à support borné – c.à.d. supposés nul en dehors du domaine $[0, \dots, M-1] \times [0, \dots, N-1]$ – il s'agit d'une densité spectrale d'énergie et non de puissance (comme on le trouve parfois dans la littérature. La notion de densité spectrale de *puissance* (*power spectrum* en anglais), est à réserver, *stricto sensu* aux signaux périodiques (à énergie infinie).

Remarquons au passage que $|F|^2$ étant, par définition, une fonction réelle et paire, la transformée de Fourier inverse de cette quantité est égale à la transformée de Fourier directe¹⁷. La fonction d'auto-corrélation A_I est aussi une fonction réelle et paire. On passe donc de l'une à l'autre par TF dans le domaine réel (les parties imaginaires – ou les phases – restent nulles).

$$A_I \xrightarrow{TF} S_I$$

En fait, appliquée telle quelle, la méthode donne en général de piètres résultats, essentiellement parce que le rapport signal sur bruit (RSB) des images de tavelures est en général faible (on doit en effet poser le moins longtemps possible si l'on veut espérer « figer » la structure spatiale du motif qui varie très rapidement avec la turbulence - typiquement de l'ordre de quelques dizaines de ms au maximum).

Pour augmenter ce RSB, on est conduit à additionner les spectres d'énergie calculés sur plusieurs images d'une séquence. Ceci conduit au synoptique général de la méthode décrit sur la figure 6.

La figure 7 donne les résultats obtenus avec ce schéma de calcul sur la séquence d'images de l'étoile γ Vir évoquée sur la fig.2. De gauche à droite on trouve l'image originale, la densité spectrale d'énergie (« *power spectrum* »), la fonction d'auto-corrélation telle que calculée par l'algorithme et enfin cette auto-corrélation filtrée afin de faire apparaître plus clairement les pics qui serviront à la mesure¹⁸. La première ligne donne les résultats obtenus avec une seule image, la deuxième avec $N = 10$ images, la troisième avec $N = 100$ images.

On notera le renforcement progressif du contraste des franges dans l'image de la DSE avec l'augmentation de N , qui va de pair avec celui des pics sur l'auto-corrélogramme. Au passage, on peut montrer que l'orientation des franges est perpendiculaire à l'angle de position des deux composantes et que leur écartement est inversement proportionnel à la séparation. Le léger allongement perceptible sur les pics est du à la dispersion atmosphérique¹⁹.

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement Florent Losse, créateur du logiciel *reduc*, pour ses conseils avisés et les nombreuses discussions que nous avons eu à ce sujet. Merci aussi à F. Jabet, de la société AiryLab, à R. Gili pour les nuits passées au pied de la Grande Lunette de Nice à m'expliquer son protocole de mesure et à Omar Ait-Ader pour m'avoir ouvert les portes du traitement d'images sous MATLAB/OCTAVE.

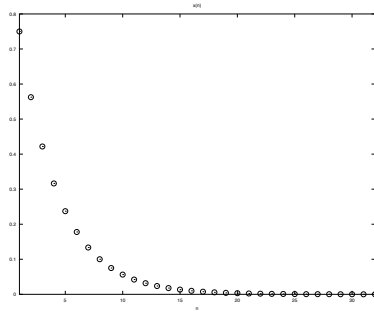
¹⁷Ce résultat se démontre aisément. En revenant aux définitions, on amène $TF^{-1}[G(\nu)] = TF[G(-\nu)] = TF[G(\nu)]$ si G est paire.

¹⁸Le filtre consiste ici simplement en une soustraction d'une moyenne locale.

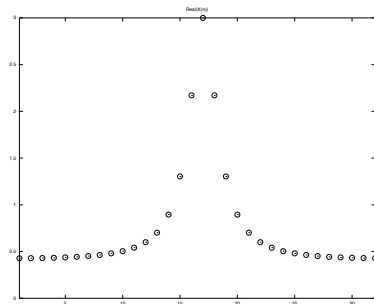
¹⁹La hauteur de l'étoile n'excédait pas 30° . L'usage d'un filtre à bande – ou mieux d'un correcteur de dispersion (ADC) permet de s'affranchir de ce problème.

Références

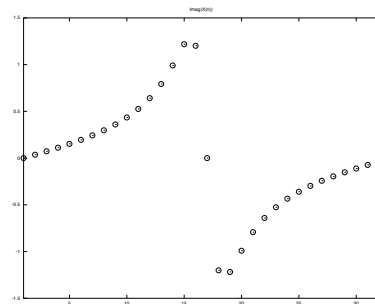
- [1] W. G. Bagnuolo, Jr., B. D. Mason, D. J. Barry, W. I. Hartkopf, and H. A. McAlister. Absolute quadrant determinations from speckle observations of binary stars. *The Astronomical Journal*, 103 :1399–1407, April 1992.
- [2] J. C. Dainty. Speckle interferometry in astronomy. In H. L. Johnson and C. Allen, editors, *Recent Advances in Observational Astronomy*, pages 95–109, 1981.
- [3] D. Y. Gezari, A. Labeyrie, and R. V. Stachnik. Speckle Interferometry : Diffraction-Limited Measurements of Nine Stars with the 200-INCH Telescope. *The Astrophysical Journal*, 173 :L1, April 1972.
- [4] A. Labeyrie. Attainment of Diffraction Limited Resolution in Large Telescopes by Fourier Analysing Speckle Patterns in Star Images. *Astronomy and Astrophysics*, 6 :85, May 1970.
- [5] F. Losse. Reduc, v 4.63.
- [6] F. Losse. L'interférométrie des tavelures avec un télescope d'amateur : pourquoi pas ? In *2nd Int. Meeting of Double Star observers*, Sabadell, Espagne, oct 2010.
- [7] J. Max and J. L. Lacoume. *Méthodes et Techniques de Traitement du Signal*. Dunod, 1996.
- [8] N. H. Turner. *Observing and Measuring Visual Double Stars*, chapter Speckle Interferometry for the Amateur, pages 209–229. Springer-Verlag, 2004.



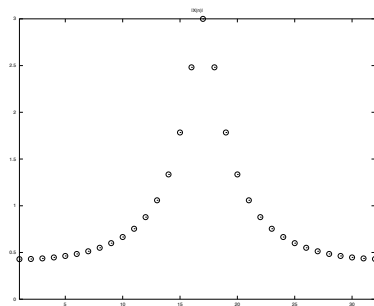
signal $x(n)$



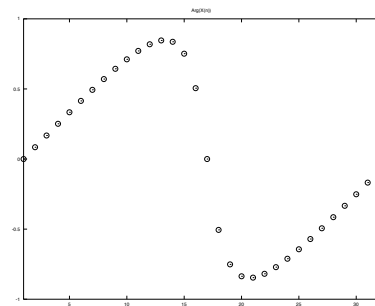
$Re[X(k)]$



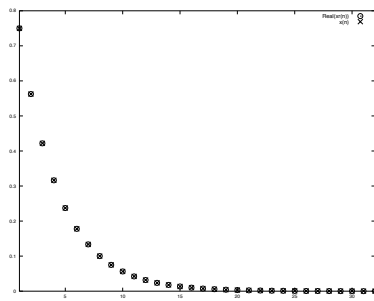
$Im[X(k)]$



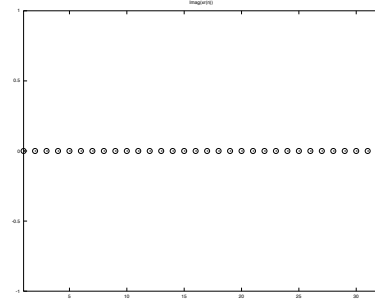
$|X(k)|$



$\angle X(k)$

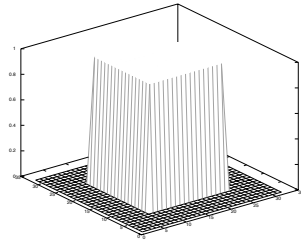


$Re[\hat{x}(n)]$

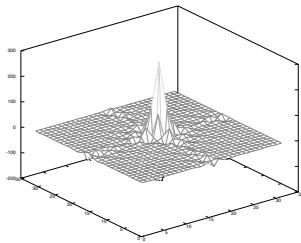


$Im[\hat{x}(n)]$

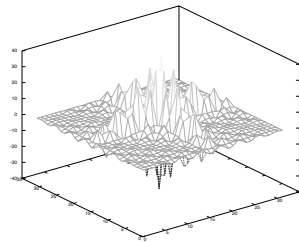
FIG. 4 – Résultat d'exécution du script de la fig. 2.3



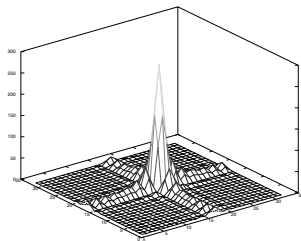
signal $x(m, n)$



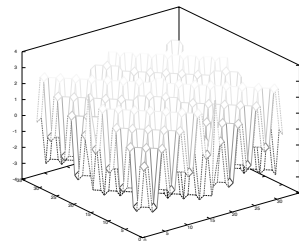
$Re[X(k, l)]$



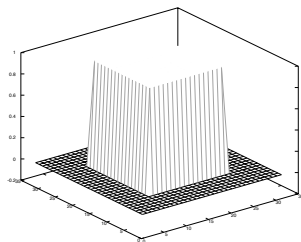
$Im[X(k, l)]$



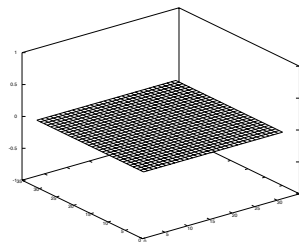
$|X(k, l)|$



$\angle X(k, l)$



$Re[\hat{x}(m, n)]$



$Im[\hat{x}(m, n)]$

FIG. 5 – Résultat d'exécution du script de la fig. 2.4

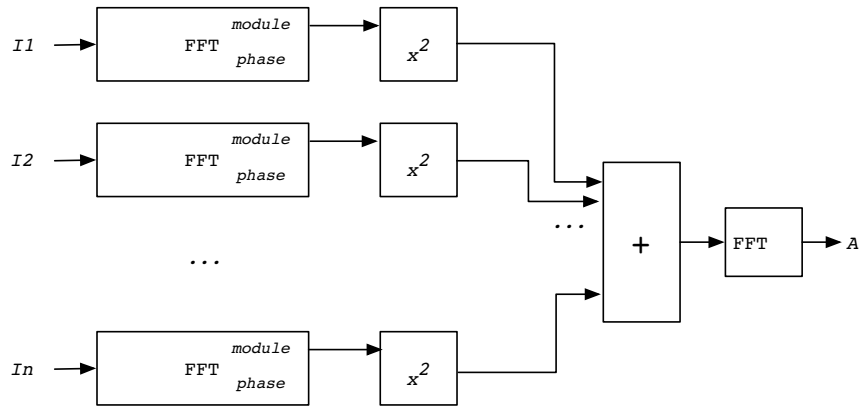


FIG. 6 – Synoptique de la méthode

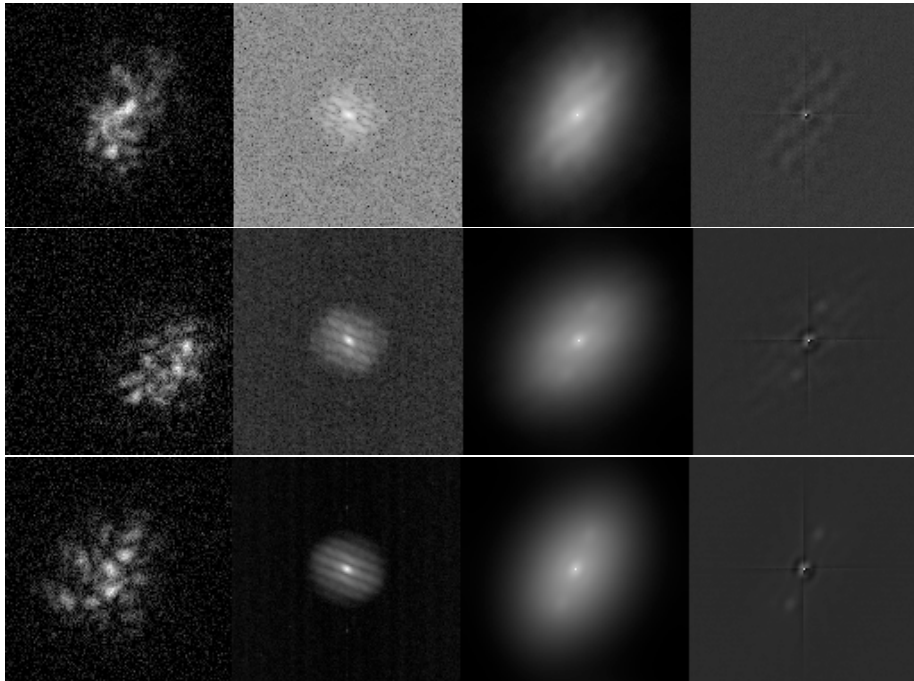


FIG. 7 – Résultats de la méthode sur la séquence évoquée fig. 2