Introducción a la noción de diferencial y derivadas

Christian Nitschelm, Héctor Varela

Marzo de 2022

I. Un poco de historia

De manera totalmente independiente, fueron Isaac Newton (1643, 1727) y Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646, 1716) quienes descubrieron el cálculo diferencial y desarrollaron sus herramientas básicas, mostrando la existencia de una conexión mayor entre dicho cálculo diferencial y el cálculo integral. La noción central del cálculo diferencial es la derivada, la cual fue originada por un problema de geometría, lo de determinar la tangente a una curva en un punto. Sin embargo, este concepto no apareció antes del siglo XVII, cuando el matemático francés Pierre de Fermat (1607, 1665) trató de determinar los extremos (mínimos y máximos) de ciertas funciones.

La idea de Fermat era muy simple. En cada uno de sus puntos, la curva tiene una dirección definida indicada por su tangente, con una cierta inclinación con respecto a una referencia horizontal (el eje $O\,x$). Fermat observó que, en cada uno de los extremos, dicha tangente era horizontal, y entonces con una inclinación nula. Por lo tanto, el problema de localizar estos valores extremos se reduce a la localización de las tangentes horizontales. Esto conduce al problema más general de la determinación de la dirección de la tangente en un punto cualquiera de la curva. El intento de resolver este problema fue lo que condujo a Fermat a descubrir algunas ideas rudimentarias relacionadas con la noción de derivada.

En primer análisis, parece que no hay ninguna relación entre establecer el área de una región limitada por una curva y el eje $O\,x$ y determinar la tangente en un punto de la curva. Fue el maestro de Newton, Isaac Barrow (1630, 1677), quien descubrió que ambos conceptos, en apariencia sin conexión, estaban íntimamente ligados. Sin embargo, Newton y Leibniz fueron los primeros en comprender la verdadera importancia de este relación, iniciando una nueva etapa sin precedente en el desarrollo de la Matemática.

Newton utilizó esta nueva herramienta en el ámbito del estudio de los movimientos, dentro de la teoría newtoniana de la gravitación, mientras tanto Leibniz vió su gran interés en Matemática. Lo que es seguro es que ambos descubrieron el cálculo diferencial de manera independiente, mientras tanto sostuvieron una polémica de larga duración sobre la anterioridad de dicho descubrimiento. Cada uno propuso una escritura diferente. Durante la segunda parte del siglo XVIII, el matemático francés Joseph Louis de Lagrange (1736, 1813) propuso una tercera escritura universalmente utilizada en Matemática (Tabla 1).

A nuestra época, el cálculo diferencial es de uso universal, dentro de varias disciplinas, tanto en ciencias duras como en ciencias blandas, y especialmente en astrofísica. Es absolutamente fundamental que las y los estudiantes de magíster en astronomía dominen su utilización. Por eso, estamos proponiendo este documento de nivelación, lo cual expone una síntesis sobre las nociones de cálculo diferencial y de derivada.

Tabla 1: Notaciones históricas de las derivadas

¿Quién?	Notación
Newton	$\dot{y}$ $\ddot{y}$
Leibniz	$\frac{dy}{dx}$ $\frac{d^2y}{dx^2}$
Lagrange	$f'(x)$ $f''(x)$

II. Derivadas de funciones reales de una variable real

II.1. Noción de límite

II.1.1. Límite finito de una función $f(x)$ cuando x tiende hacia x_0

Definición: Sea f una función definida sobre un intervalo abierto C que contiene a x_0 (excepto posiblemente no definida en x_0), se dice que $f(x)$ admite un límite l cuando x tiende hacia x_0, si para todo número positivo arbitrario ε, existe un número positivo δ de manera tal que la condición:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad <=> \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

sea verificada en todo punto x del intervalo C que satisface:

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad <=> \quad \begin{cases} x_0 - \delta < x < \ x_0 + \delta \\ x \neq x_0 \end{cases}$$

Comentario: Esta definición es independiente de lo que pasa en el punto x_0, sea que $f(x_0)$ esté definido o que $f(x_0)$ no esté definido.

Escritura del límite de una función f en el punto x_0:

a. Cuando no es necesario de precisar el intervalo C:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

b. Cuando es necesario de precisar el intervalo C:

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in C} f(x) = l$$

II.1.2. Límite a la derecha, límite a la izquierda

Definición: Sea f una función definida sobre un intervalo abierto $C =]x_0, x_{max}[$, se dice que $f(x)$ admite un límite a la derecha (o por valores superiores) l, si para todo número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que si $x_0 < x < x_0 + \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Escritura del límite a la derecha de una función f en el punto x_0^+:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

Definición: Sea f una función definida sobre un intervalo abierto $C =]x_{min}, x_0[$, se dice que $f(x)$ admite un límite a la izquierda (o por valores inferiores) l, si para todo número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que si $x_0 - \delta < x < x_0$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Escritura del límite a la izquierda de una función f en el punto x_0^-:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

Se debe leer: x_0^+: x_0 por valor superior; x_0^-: x_0 por valor inferior.

II.2. Noción de derivada

II.2.1. Derivada en un punto

Definición: La derivada de una función $y = f(x)$ definida sobre un intervalo C respecto de la variable x, es igual al límite de la razón entre el incremento Δy de la función y el incremento correspondiente Δx, cuando Δx tiende hacia 0, denotado por $f'(x)$, es decir

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Es conveniente observar que la derivada es una nueva función de x representada con diferentes notaciones, tales como $f'(x)$, y', $\dot{y}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, y algunas pocas veces Dy o $Df(x)$.

Comentario: Esta derivada tiene existencia si y solamente si el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiene un límite de valor finito cuando Δx tiende a 0, perteneciendo x al intervalo C, aún si dicho cociente no está definido cuando Δx es igual a cero.

Podemos también escribir de manera diferente el cálculo de la derivada en un punto x_0:

a. Anotando el incremento h en vez de Δx:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

b. Anotando el incremento $x - x_0$ en vez de Δx:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Interpretación geométrica de la derivada en un punto x_0: Podemos construir la curva representativa de la función $y = f(x)$ en una marca ortonormalizada $O\vec{i}\,\vec{j}$ (con dos ejes, un eje de las abscisas $O\,x$ y un eje de las ordenadas $O\,y$). Sean M_0 y M los puntos de la curva con abscisas x_0 y x, y con ordenadas y_0 y y. Cuando $M \to M_0$, la línea MM_0 se acerca más y más de la tangente de la curva en el punto M_0. Entonces, con el pasaje al límite, MM_0 se confunde con dicha tangente, la cual aparece entonces como límite de MM_0 cuando $M \to M_0$. Finalmente, el valor de la derivada en el punto x_0 no es nada más que el coeficiente de dicha tangente: $f'(x_0) = \tan(\alpha_0)$, siendo α_0 el ángulo entre la tangente y el eje de las abscisas, medido en el sentido directo, y siendo $\tan(\alpha_0)$ su pendiente.

No existencia de la derivada: La no existencia de una derivada indica que, en el punto correspondiente de la curva representativa de la función, no existe una tangente determinada o esta tangente tiene una pendiente vertical (paralela al eje $0\,y$). En este último caso, el límite es infinito (de manera no rigurosa, se habla de una derivada infinita).

Derivadas por valores superiores o valores inferiores: Cuando, en un punto x_0 de una función $y = f(x)$, el límite no tiene existencia, mientras tanto hay límites a la derecha y a la izquierda, se habla respectivamente de derivada por valores superiores (derivada a la derecha) y derivada por valores inferiores (derivada a la izquierda).

La significación geométrica de estas derivadas es:

$$\begin{cases} f'(x_0^+) = tan(\alpha^+) \\ f'(x_0^-) = tan(\alpha^-) \end{cases}$$

En el punto x_0, la curva tiene lo que se llama un quiebre.

Diferenciales: Las diferenciales se definen de manera diferente por las variables independientes o por las funciones. La diferencial de una variable independiente x es un incremento de ella a lo cual se puede dar un valor cualquiera: $dx = \Delta x$. La diferencial de una función $y = f(x)$ por un valor dado de x o una diferencial dada de dx es el producto de $f'(x)$ por dx: $dy = f'(x)dx$. Entonces, no se debe confundir diferenciales y derivadas.

II.2.2. Derivada de órdenes superiores

La derivada segunda de una función de una variable $f(x)$ es la derivada de la derivada. Se representa con los símbolos siguientes: $f''(x)$, y'', $\ddot{y}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, D^2y o $D^2f(x)$.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

Interés de la derivada segunda: La derivada segunda tiene un interés especial en el ámbito del estudio de la curva representativa de una función $y = f(x)$. Como es igual a la derivada de la primera derivada: $f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x)$, nos indica el sentido de variación de dicha primera derivada $f'(x_0)$, entonces de la pendiente de la tangente en el punto x_0, y finalmente de la orientación de la concavidad de la curva representativa de f.

Anotando b el valor de la tangente cuando $x = 0$ (punto de intersección de la tangente con el eje de las ordenadas), podemos destacar tres casos:

a. $f''(x_0) > 0$ (positivo): La concavidad en x_0 es orientada hacia arriba y la tangente se ubica abajo de la curva representativa de f. Entonces $f(x) > xf'(x_0) + b$.

b. $f''(x_0) = 0$: Caso peculiar que indica que la tangente cruza la curva representativa de f en el punto x_0. El punto x_0 es llamado punto de inflexión de la curva, lo que corresponde a un cambio de orientación de la concavidad de la curva en x_0.

c. $f''(x_0) < 0$ (negativo): La concavidad en x_0 es orientada hacia abajo y la tangente se ubica arriba de la curva representativa de f. Entonces $f(x) < xf'(x_0) + b$.

Las derivadas de un orden cualquiera se definen de manera similar. Se representan con los símbolos siguientes: $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, $f^{(n)}(x)$, y''', y^{IV}, $y^{(n)}$, $\frac{d^ny}{dx^n}$, $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$, D^ny o $D^nf(x)$.

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f'(x) = \frac{d^3}{dx^3}f(x)$$

$$f^{IV}(x) = \frac{d}{dx}f'''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f''(x) = \frac{d^3}{dx^3}f'(x) = \frac{d^4}{dx^4}f(x)$$

$$f^{V}(x) = \frac{d}{dx}f^{IV}(x) = \frac{d^2}{dx^2}f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}f''(x) = \frac{d^4}{dx^4}f'(x) = \frac{d^5}{dx^5}f(x)$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}f^{(n-2)}(x) = ... = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}f''(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f'(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

II.2.3. Reglas fundamentales de diferenciación

Derivada y diferencial de un constante c:

$$c' = 0$$

$$dc = 0$$

Derivada y diferencial de una suma algebraica:

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'$$

$$d(u + v - w) = du + dv - dw$$

Derivada y diferencial de un producto de un constante c **con una función**:

$$(cu)' = cu'$$

$$d(cu) = cdu$$

Derivada y diferencial de un producto de dos funciones:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$(uvw)' = vwu' + uwv' + uvw'$$

$$d(uvw) = vwdu + uwdv + uvdw$$

Derivada y diferencial del inverso de una función:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{dv}{v^2}$$

Derivada y diferencial de un cociente de dos funciones:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Derivada de una función compuesta (función de función):
Con $y = f(u)$ y $u = \varphi(x)$, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x)$$

Con $y = f(u)$, $u = \varphi(t)$ y $t = \psi(x)$, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(t)\psi'(x)$$

II.2.4. Tabla de derivadas de funciones elementales

Las tablas 2 y 3 dan las derivadas de las funciones matemáticas elementales.
No obstante, es importante aquí de entender como se hace el cálculo de una derivada.
Podemos dar aquí algunos ejemplos de cálculo de derivadas:

a. **Derivada de la función** x^n:

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x - x)}{\Delta x} \sum_{i=0}^{n-1} (x+\Delta x)^i x^{n-1-i}$$

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \sum_{i=0}^{n-1} (x+\Delta x)^i x^{n-1-i} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x+\Delta x)^i x^{n-1-i}$$

$$(x^n)' = \sum_{i=0}^{n-1} x^i x^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1} = n x^{n-1}$$

b. **Derivada de la función** $\sin x$:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, $\cos \Delta x \to 1$ y $\sin \Delta x \approx \Delta x$. Podemos escribir:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin x(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \right] = \cos x$$

c. **Derivada de la función** $\ln x$:

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(\frac{x+\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, $\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} \approx \frac{\Delta x}{x \Delta x} = \frac{1}{x}$. Entonces, la derivada de $\ln x$ es:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

d. **Derivada de la función** $\sqrt{x}$:

$$(\sqrt{x})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{x})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{x})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e. **Derivada de la función** e^x:

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + \Delta x - 1}{\Delta x} = e^x$$

Tabla 2: Tabla de derivadas de funciones elementales (parte 1)

Función	Derivada
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$-\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$-\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$
$\log x$	$\frac{1}{x}\log e$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$
$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x$
$\csc x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arccot\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$arcsec\, x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$arccsc\, x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Tabla 3: Tabla de derivadas de funciones elementales (parte 2)

Función	Derivada
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$
$argsinh\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$argcosh\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$argtanh\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$argcoth\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$

II.2.5. Algunas aplicaciones de las derivadas

a. **En Matemática, estudio de una función, tabla de variación**:

Para estudiar una función $y = f(x))$ en matemática, se debe calcular su derivada (para establecer el sentido de variación de la función) y su derivada segunda (para determinar las variaciones eventuales de concavidad y la existencia eventual de puntos de inflexión.

Ejemplo: Estudio de la función $y = x^3 - 4x$. Esta función es definida sobre el intervalo $]-\infty, +\infty[$. Su derivada se calcula muy fácilmente: $y' = 3x^2 - 4$ y su derivada segunda vale $y'' = 6x$. Entonces, la primera derivada se anula en $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$, mientras tanto la derivada segunda se anula en $x = 0$. Valores de la función y en los puntos $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$:

$$\begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{4}{3}} => y_1 = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} \\ x_2 = \sqrt{\frac{4}{3}} => y_2 = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} \end{cases}$$

La función $y = x^3 - 4x$ es entonces creciente entre $-\infty$ y $-\sqrt{\frac{4}{3}}$, decreciente entre $-\sqrt{\frac{4}{3}}$ y $\sqrt{\frac{4}{3}}$, y creciente entre $\sqrt{\frac{4}{3}}$ y $+\infty$. En $x = 0$, la curva cruza su tangente (punto de inflexión) y tenemos un cambio de concavidad. Entre $-\infty$ y 0, la concavidad es orientada hacia abajo, mientras tanto entre 0 y $+\infty$, la concavidad es orientada hacia arriba. La tabla de variación permite determinar el sentido de variación de la función $y = x^3 - 4x$, resumiendo todo las explicaciones anteriores y utilizando la primera derivada y la derivada segunda.

Por supuesto, la etapa siguiente consiste en construir la curva $y = x^3 - 4x$ en una marca ortonormalizada. Se debe anotar que el punto x_1 es un máximo (tangente horizontal: $f'(x_1) = 0$; concavidad de la curva orientada hacia abajo: $f''(x_1) < 0$), y que el punto x_2 es un mínimo (tangente horizontal : $f'(x_2) = 0$; concavidad de la curva orientada hacia

Tabla 4: Tabla de variación de la función $y = x^3 - 4x$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{\frac{4}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{4}{3}}$		2		$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
					y_1								$+\infty$
				$\nearrow$		$\searrow$						$\nearrow$	
$f(x)$			0				0				0		
		$\nearrow$						$\searrow$		$\nearrow$			
	$-\infty$								y_2				

arriba: $f''(x_2) > 0$). En el punto 0, la derivada segunda es nula, lo que significa que la tangente cruza la curva en dicho punto. El punto 0 es entonces un punto de inflexión.

b. **En Física, estudio del movimiento parabólico**:

Estamos estudiando el movimiento de un cuerpo pesado de tamaño pequeño (típicamente una bolita de acero o de plomo) dentro de un campo de gravitación uniforme de aceleración constante $\vec{g} = -g\vec{j}$, vector dirigido hacia el centro de la Tierra. Estamos utilizando una marca ortonormalizada $O\vec{i}\,\vec{j}$. Estamos ignorando las posibles fuerzas de fricción ocasionadas por las moléculas atmosféricas. El objeto móvil sale del punto O con una velocidad $\vec{v_0} = v_0(cos\varphi_0\vec{i} + sin\varphi_0\vec{j})$. Estamos estudiando la trayectoria de este objeto en función del tiempo, sabiendo que sale de O al instante $t_0 = 0$.

Sea $M(t)$ la posición del objeto al instante $t > t_0$. El vector $\overrightarrow{OM(t)}$ es entonces el vector posición del objeto al instante t. Su vector velocidad se deduce como siendo la derivada del vector posición, mientras tanto el vector aceleración corresponde a su derivada segunda:

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}$$

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d\overrightarrow{v(t)}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM(t)}}{dt^2}$$

El problema es entonces encontrar los valores de los vectores velocidad y posición en función del tiempo t, sabiendo que la aceleración es la derivada de la velocidad y tomando en cuenta las condiciones iniciales y especialmente la constancia de la aceleración:

$$\overrightarrow{a(t)} = -g\vec{j}$$

$$\overrightarrow{v(t)} = -gt\vec{j} + \vec{v_0} = -gt\vec{j} + v_0(cos\varphi_0\vec{i} + sin\varphi_0\vec{j}) = v_0cos\varphi_0\vec{i} + (-gt + v_0sin\varphi_0)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM(t)} = v_0tcos\varphi_0\vec{i} + (-\frac{1}{2}gt^2 + v_0tsin\varphi_0)\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

llamando x y y las coordenadas del vector $\overrightarrow{OM(t)}$. Entonces:

$$\begin{cases} x = v_0tcos\varphi_0 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0tsin\varphi_0 \end{cases} => \begin{cases} t = \frac{x}{v_0cos\varphi_0} \\ y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2cos^2\varphi_0} + x\tan\varphi_0 \end{cases}$$

Estamos reconociendo la ecuación de una parábola pasando por el origen O. La velocidad siendo la derivada del vector posición, podemos calcular el tiempo t_{max} al momento de pasaje a la altura máxima y los valores x_{max} y y_{max} correspondientes:

$$-gt_{max} + v_0 sin\varphi_0 = 0 => t_{max} = \frac{v_0}{g} sin\varphi_0 => \begin{cases} x_{max} = \frac{v_0^2}{g} sin\varphi_0 cos\varphi_0 \\ y_{max} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} sin^2\varphi_0 \end{cases}$$

c. **En Probabilidades, función de distribución acumulada de probabilidades y función de densidad** :

En teoría de probabilidades la función de densidad de una variable aleatoria continua se puede encontrar derivando la función de distribución acumulada de probabilidades de la misma variable.

La función $F(x)$ es una función de distribución acumulada de probabilidades si

- F es una función no decreciente, es decir

$$\text{si } x_1 \leq x_2 \text{ se tiene que } F(x_1) \leq F(x_2)$$

- F es una función continua por la derecha

$$\lim_{t \to x^+} F(t) = F(x)$$

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Por ejemplo la función

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{4}} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

es una función de distribución acumulada de probabilidades (verificarlo).

La función $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad si

- $f(x) \geq 0$ para todo x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Ahora bien, si $F(x)$ es una función diferenciable entonces su derivada es la función de densidad asociada a $F(x)$, es decir

$$F'(x) = f(x)$$

Por ejemplo, la función de densidad asociada a $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{4}}$ está dada por

$$F'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{4}}}{4} = f(x)$$

d. **En Estadística, estimación**:

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto de n observaciones independientes de una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$, la cual depende de un parámetro no conocido θ. Se puede obtener una estimación sobre θ buscando el valor del parámetro θ que hace máxima la función de verosimilitud

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

Es conveniente tener en cuenta que maximizar la verosimilitud es equivalente a maximizar el logaritmo natural de la verosimilitud, denominada log-verosimilitud.

Por ejemplo, sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un conjunto de observaciones independientes de una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad x > 0$$

entonces la función de verosimilitud está dada por

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} \right) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

y la log-verosimilitud es

$$log(L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)) = log\left(\frac{1}{\theta^n} \right) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i = -nlog(\theta) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

derivando respecto de θ e igualando a cero para determinar puntos críticos

$$\frac{dL(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

se tiene que el valor crítico es

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

verificar que corresponde a un valor máximo para la log-verosimilitud. Por tanto, el estimador máximo verosímil para θ es el promedio de las observaciones.

II.2.6. Derivada de una función inversa (recíproca)

Si f es una función continua y estrictamente monótona sobre un intervalo $[a, b]$, podemos definir una función inversa $g = f^{-1}$, continua y estrictamente monótona sobre el intervalo $[f(a), f(b)]$, de tal manera que: $y = f(x) <=> x = g(y)$; $x \in [a, b]$, $y \in [f(a), f(b)]$. Si y_0 es un punto de $[f(a), f(b)]$, podemos escribir $x_0 = g(y_0)$ y tenemos también $y_0 = f(x_0)$. Además, estamos suponiendo que f admite una derivada $f'(x_0) \neq 0$ en x_0.

Para un valor de $x \neq x_0$, podemos escribir, con $\varepsilon(x_0) = 0$:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon(x)]$$

ε es continua en el punto x_0. Como las funciones f y g son estrictamente monótonas, tenemos $x \neq x_0 <=> y \neq y_0$. Podemos ahora reemplazar $f(x)$ y $f(x_0)$ con y y y_0, respectivamente, además de x y x_0 con $g(y)$ y $g(y_0)$, respectivamente:

$$y - y_0 = (g(y) - g(y_0))(f'(x_0) + \varepsilon[g(y)]) => \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0) + \varepsilon[g(y)]}$$

Según la continuidad de g en el punto y_0 y la de ε en el punto x_0, la función $\varepsilon \circ g$ es continua en el punto y_0, lo que permite escribir:

$$\lim_{y \to y_0} \varepsilon[g(y)] = 0$$

la función recíproca f^{-1} admite en el punto y_0 la derivada $\frac{1}{f'(x_0)}$:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

II.2.7. Tabla de algunas derivadas de órdenes $n > 1$

La tabla 5 da algunas derivadas de órdenes superiores. En el caso de la derivada de orden n de x^m, si m entero y $n > m$, la derivada de orden n es igual a 0.

Tabla 5: Tabla de derivadas de orden $n > 1$

Función	Derivada de orden $n > 1$
x^m	$m(m-1)(m-2)...(m-n+1)x^{m-n}$
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\ln a}\frac{1}{x^n}$
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^x	$(\ln a)^n a^x$
a^{kx}	$(k \ln a)^n a^{kx}$
$\sin x$	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin kx$	$k^n \sin\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos kx$	$k^n \cos\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\sinh x$	$\sinh x(si\ n\ par);\ \cosh x(si\ n\ inpar)$
$\cosh x$	$\cosh x(si\ n\ par);\ \sinh x(si\ n\ inpar)$

III. Derivadas de funciones reales de varias variables reales

III.1. Noción de derivada parcial

III.1.1. Definición

Sea $f(x, y, z)$ una función de tres variables reales (se puede generalizar a n variables reales) que corresponde al punto M de coordenadas (x, y, z). Estamos considerando que el punto A, de coordenadas (x_0, y_0, z_0) pertenece al dominio de definición D de dicha función.

Definición: Si la función $f(x, y_0, z_0)$ de la sola variable x admite una derivada por el valor x_0 de la variable, podemos representar dicha derivada de la manera siguiente: $f'_x(x_0, y_0, z_0)$. Se dice que es la derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a la variable x en el punto A (o por los valores (x_0, y_0, z_0) de los variables (x, y, z). Como la función f puede también estar escrita $f(M)$ en M y $f(A)$ en A, su derivada parcial con respecto a la variable x en el punto A puede estar escrita como $f'_x(A)$. Tenemos entonces:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0}$$

Podemos también definir las derivadas parciales con respectos a las variables y y z:

$$f'_y(x_0, y_0, z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0}$$

$$f'_z(x_0, y_0, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{z - z_0}$$

Escritura de las derivadas parciales: De manera clásica, estamos escribiendo:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$$

$$f'_y(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$

$$f'_z(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

III.1.2. Derivada de una función compuesta

a. **Caso de una sola variable independiente**. En el caso de tener dos funciones:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} => \begin{cases} x_0 = \varphi(t_0) \\ y_0 = \psi(t_0) \end{cases}$$

Podemos suponer que la función $f(x, y)$ tenga derivadas parciales alrededor del punto $A(x_0, y_0)$, las cuales son continuas en el punto A. Podemos preguntarnos si la función compuesta $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ es derivable en el punto t_0, suponiendo las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ derivables en el punto t_0. Estamos anotando Δt el incremento de la variable t.

$$\begin{cases} t = t_0 + \Delta t \\ \varphi(t_0 + \Delta t) = x_0 + \Delta x \\ \psi(t_0 + \Delta t) = y_0 + \Delta y \\ F(t_0 + \Delta t) - F(t_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ F(t_0 + \Delta t) - F(t_0) = \Delta x \, f'_x(x_0, y_0) + \Delta y \, f'_y(x_0, y_0) + \Delta x \, \varepsilon_x + \Delta y \, \varepsilon_y \end{cases}$$

ε_x y ε_y admiten el límite 0 cuando $\Delta t \to 0$. Eso implica lógicamente que los productos $\Delta x\,\varepsilon_x$ y $\Delta y\,\varepsilon_y$ admiten el mismo límite 0 cuando $\Delta t \to 0$. Entonces:

$$\frac{F(t_0+\Delta t)-F(t_0)}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}f'_x(x_0,y_0)+\frac{\Delta y}{\Delta t}f'_y(x_0,y_0)+\frac{\Delta x}{\Delta t}\varepsilon_x+\frac{\Delta y}{\Delta t}\varepsilon_y$$

Sin embargo, sabemos que:

$$\begin{cases}\lim_{t\to t_0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\varphi'(t_0)\\ \lim_{t\to t_0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\psi'(t_0)\end{cases}$$

Con el pasaje al límite, la ecuación anterior se puede escribir:

$$F'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{F(t_0+\Delta t)-F(t_0)}{\Delta t}=\varphi'(t_0)f'_x(x_0,y_0)+\psi'(t_0)f'_y(x_0,y_0)$$

$$F'(t_0)=\varphi'(t_0)f'_x(A)+\psi'(t_0)f'_y(A)$$

En un punto cualquiera t, tenemos entonces la fórmula siguiente en $M(x,y)$:

$$F'(t)=\varphi'(t)f'_x(M)+\psi'(t)f'_y(M)$$

En el caso de tener tres funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$ y $\theta(t)$: $F(t)=f(\varphi(t),\psi(t),\theta(t))$:

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\theta(t)\end{cases}$$

La derivada de la función F se escribe de la manera siguiente:

$$F'(t)=f'_x(x,y,z)\varphi'(t)+f'_y(x,y,z)\psi'(t)+f'_z(x,y,z)\theta'(t)$$

Con la notación clásica, la misma fórmula se escribe:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\frac{d\varphi}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\frac{d\psi}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\frac{d\theta}{dt}$$

b. **Caso de dos o más variables independientes**. Si, dentro de $f(u,v,w)$, estamos reemplazando u, v, w) por tres funciones de x y y dotadas de derivadas parciales:

$$\begin{cases}u=\varphi(x,y)\\ v=\psi(x,y)\\ w=\theta(x,y)\end{cases}$$

Estamos obteniendo una función compuesta de los variables x y y:

$$F(x,y)=f(\varphi(x,y),\psi(x,y),\theta(x,y))$$

Tomando sucesivamente y y x como valores constantes, podemos obtener:

$$\begin{cases}F'_x(x,y)=f'_u(\varphi,\psi,\theta)\varphi'_x(x,y)+f'_v(\varphi,\psi,\theta)\psi'_x(x,y)+f'_w(\varphi,\psi,\theta)\theta'_x(x,y)\\ F'_y(x,y)=f'_u(\varphi,\psi,\theta)\varphi'_y(x,y)+f'_v(\varphi,\psi,\theta)\psi'_y(x,y)+f'_w(\varphi,\psi,\theta)\theta'_y(x,y)\end{cases}$$

Con la notación clásica, las mismas fórmulas se escriben:

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi,\psi,\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi,\psi,\theta)\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial w}(\varphi,\psi,\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi,\psi,\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi,\psi,\theta)\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial w}(\varphi,\psi,\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y}(x,y)\end{cases}$$

III.1.3. Diferencial parcial y diferencial total

La diferencial parcial $d_x u$ de una función de dos o más variables $u = f(x, y, z, ...)$ con respecto a una de estas variables (por ejemplo x) es definida por la igualdad:

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

u siendo diferenciable, la suma de sus diferenciales parciales es su diferencial total:

$$du = d_x u + d_y u + d_z u + ... = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + ...$$

III.1.4. Derivada y diferencial de órdenes superiores

Una derivada parcial de segundo orden de una función u = f(x, y, z, ...) puede estar calculada con respecto a la misma variable utilizada por la primera derivación, por ejemplo $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ o $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, o con respecto a una otra de las variables, por ejemplo $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ o $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$. En este último caso, la derivada está designada como derivada mixta. los valores de las derivadas mixtas no dependen del orden según lo cual están hechas las derivaciones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Entonces, la función $f(x, y)$ admite dos derivadas del primer orden: $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ y tres derivadas del segundo orden: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, mientras tanto la función $f(x, y, z)$ admite tres derivadas del primer orden: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$ y seis derivadas del segundo orden:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \end{cases}$$

Las derivadas parciales de órdenes más elevados se calculan de la misma manera: $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$ o $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ en el caso del orden 3 de derivación de la función $u(x, y)$, etc.

Diferencial total de segundo orden de una función de dos variables $u(x, y)$:

$$d^2 u = d(du) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

lo que se puede escribir de forma simbólica:

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 u$$

Entonces, la diferencial total de orden n de una función u(x, y) se escribe:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n u$$

Y, con un número más grande de variables (función $u(x, y, z, ...)$):

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz + ... \right)^n u$$

III.2. Aplicaciones de las derivadas parciales

III.2.1. Nabla

Se llama nabla el operator matemático vectorial $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

III.2.2. Gradiente

Se llama gradiente el operator matemático vectorial $\overrightarrow{grad}$:

$$\overrightarrow{grad}\,\varphi = \vec{\nabla}(\varphi)$$

En coordenadas cartesianas (x, y, z), se escribe de la manera siguiente:

$$\overrightarrow{grad}\,\varphi = \vec{\nabla}(\varphi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right)$$

III.2.3. Divergencia

Se llama divergencia el operator matemático escalar div:

$$div(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

En coordenadas cartesianas (x, y, z), se escribe de la manera siguiente:

$$div(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)$$

III.2.4. Laplaciano

Se llama laplaciano el operator matemático escalar Δ:

$$\Delta \varphi = \vec{\nabla}^2 \varphi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \varphi) = div(\overrightarrow{grad}\,\varphi)$$

En coordenadas cartesianas (x, y, z), se escribe de la manera siguiente:

$$\Delta \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Podemos también escribir el laplaciano en coordenadas cartesianas (x, y):

$$\Delta \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

III.2.5. Rotacional

Se llama rotacional el operador matemático vectorial $\overrightarrow{rot}$:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

En coordenadas cartesianas $(x,\, y,\, z)$, se escribe de la manera siguiente:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Propiedades del rotacional:

a. El rotacional del gradiente es siempre nulo:

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\ \varphi) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}(\varphi) = \vec{0}$$

b. La divergencia del rotacional es siempre nula:

$$div(\overrightarrow{rot}(\vec{F})) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = 0$$

c. Rotacional del rotacional (esta formula sirve en electromagnetismo):

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{F})) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \overrightarrow{\Delta F} = \overrightarrow{grad}(div(\vec{F})) - \overrightarrow{\Delta F}$$

donde $\overrightarrow{\Delta F}$ es el laplaciano vectorial:

$$\overrightarrow{\Delta F} = \begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) F_x \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) F_y \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

III.2.6. Ley fundamental de la óptica geométrica

En óptica, podemos evaluar la variación elemental del vector $(n\vec{u})$ en función de ds:

$$\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \frac{d}{ds}(n\alpha\vec{e_x} + n\beta\vec{e_y} + n\gamma\vec{e_z}) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial L}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial L}{\partial z}\vec{e_z}\right)$$

donde $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$) son los vectores unitarios según los ejes x, y, z de la base del espacio, y $(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ las componentes del vector $\vec{u}$ en la misma base. Como:

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) \cdot d\vec{r}$$

Entonces, debido a lo anterior, podemos escribir:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) \cdot \vec{u} = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) \cdot \frac{1}{n}\vec{\nabla}L$$

Este resultado puede estar escrito de manera más explicita:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\frac{\partial L}{\partial z}\right]$$

Podemos ahora permutar el orden de la diferenciación entre x y y, y entre x y z:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)\frac{\partial L}{\partial z}\right]$$

Lo que se puede transformar de la manera siguiente:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \frac{1}{2n}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2\right] = \frac{1}{2n}\frac{\partial}{\partial x}(n^2) = \frac{\partial n}{\partial x}$$

Este mismo cálculo puede estar hecho por y y z. Finalmente, estamos obteniendo:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \frac{\partial n}{\partial x} \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = \frac{\partial n}{\partial y} \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right) = \frac{\partial n}{\partial z}$$

Y, como consecuencia, la ecuación vectorial obtenida se escribe:

$$\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \overrightarrow{grad}(n) = \vec{\nabla} n \quad <=> \quad \frac{d^2\vec{r}}{dl^2} = n\,\overrightarrow{grad}(n) = n\vec{\nabla} n$$

Introduciendo en esta última ecuación $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ y el elemento infinitesimal $dl = \frac{ds}{n} = \frac{dL}{n^2}$.

III.2.7. En Estadística, estimación por mínimos cuadrados

Dados n pares de observaciones $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ de las variables X y Y se desea determinar la ecuación de la recta $y = \beta_0 + \beta_1 x$ que permita estimar valores de Y a partir de valores de X, donde los parámetros β_0 y β_1 son no conocidos.

Ahora bien, los parámetros β_0 y β_1 se estiman con los n pares de datos (x_i, y_i), minimizando

$$S_e = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

respecto de los parámetros β_0 y β_1, es decir, minimizando la suma de los errores al cuadrado.

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_e}{\partial \beta_0} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0\\ \frac{\partial S_e}{\partial \beta_1} &= -2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0\end{aligned}$$

simplificando estas dos ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned}n\beta_0 + \beta_1\sum_{i=1}^{n}x_i &= \sum_{i=1}^{n}y_i\\ \beta_0\sum_{i=1}^{n}x_i + \beta_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n}x_i y_i\end{aligned}$$

multiplicando la primera ecuación por $\sum_{i=1}^{n} x_i$ y dividiendo por n se tiene

$$\beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}$$

$$\beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Restando la primera ecuación de la segunda se tiene

$$\beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \beta_1 \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}$$

Por tanto, la solución para β_1 está dada por

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}$$

y la solución para β_0 es

$$\widehat{\beta}_0 = \overline{y} - \widehat{\beta}_1 \overline{x}$$

IV. Bibliografía

Apostol, T.M.: **1965**, *Calculus, Volumen I, Introducción con vectores y geometría analítica*, traducción castellana por Xufré, G.P., Editorial Reverté, Barcelona, Buenos Aires, México.

Bronstein, I.N. & Semendiaev, K.A.: **1985**, *Aide-Mémoire de Mathématiques*, traduit par Lefort, H., Eyrolles, Paris.

Cagnac, G., Ramis, E. & Commeau, J.: **1967**, *Traité de Mathématiques Spéciales, Volume 2: Analyse*, Masson & C^{ie}, Paris.

Granville, W.A.: **1972**, *Cálculo Diferencial e Integral*, traducción castellana por Byington, S.T., Unión Tipografica Editorial Hispano-América, Buenos Aires, Caracas, Guatemala, Habana, Lima, Rio de Janeiro, Santiago, México.

Stewart, J.: **2008**, *Calculus, Early Transcendentals*, Thomson Books/Cole, Australia, Brazil, Canada, Mexico, Singapore, Spain, United Kingdom, United States.

Pair, C., Baille, A. & Boursin, J.-L.: **1972**, *Collection de Mathématiques, Classe de Terminale C, E*, Collection Cossart et Théron, Bordas, Paris.

Théron, P., Couturier, M. & Boursin, J.-L.: **1970**, *Collection de Mathématiques, Classe de Première C, D, E*, Collection Cossart et Théron, Bordas, Paris.

V. Índice de los capítulos