Óptica geométrica

Christian Nitschelm

Mayo de 2023

Parte del curso Astronomía Observacional

(Magíster en Astronomía, Universidad de Antofagasta)

1. Nociones de base

1.1. Camino óptico

Se define el índice de refración de un medio transparente como siendo $n = \frac{c}{v}$, donde c y v son las velocidades de la luz en el vacío y en el mismo medio transparente. Entonces, el índice de refración es siempre superior o igual a 1. En el vacío, de manera obvia, $n = 1$, mientras tanto, en un medio material transparente, $n > 1$. En el aire, n tiene un valor levemente superior a 1. No obstante, se utiliza $n = 1$ en primera aproximación.

a) Si n es alto, se habla de un medio refringente.

b) Si n es bajo, se habla de un medio poco refringente.

Podemos entonces hablar de un intervalo elemental de tiempo $dt = \frac{ds}{v} = \frac{nds}{c}$.

El camino óptico L se define como siendo:

$$L = \int_{t_A}^{t_B} cdt = \int_A^B nds = c(t_B - t_A)$$

El camino óptico es la duración de propagación de la luz, medida en metros, la velocidad de la luz $c = 299792458\, ms^{-1}$ siendo el factor de conversión.

1.2. Onda luminosa monocromática

Una onda luminosa monocromática ψ está definida por la relación siguiente:

$$\psi = A\cos\omega(t - \frac{x}{v}) = A\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$

con:

ω: pulsación;
$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$: frecuencia;
$T = \nu^{-1} = \frac{1}{\nu}$: periodo;
$\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$: longitud de onda en el vacío;
$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n}$: longitud de onda en un medio material ($\lambda < \lambda_0$);
$\vec{k_0}$: vector de onda $\vec{k_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\vec{u}$ en el vacío;
$\vec{k}$: vector de onda $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}\vec{u} = n\vec{k_0}$ en un medio material;
$\vec{u}$: vector unitario en la dirección de propagación.

Table 1: Correspondencia entre longitud de onda y color:

λ_0	$\leq 400\,nm$	$500\,nm$	$590\,nm$	$630\,nm$	$\geq 750\,nm$
Color	*ultravioleta*	*azul*	*amarillo*	*rojo*	*infrarrojo*

1.3. Construcción de Huygens

A la interfaz entre dos medios de indices n_1 y n_2, podemos construir el rayo refractado:

$$II_1 = r_1 = \frac{1}{n_1} = IK\cos(\frac{\pi}{2} - i_1) = IK\sin i_1$$

$$II_2 = r_2 = \frac{1}{n_2} = IK\cos(\frac{\pi}{2} - i_2) = IK\sin i_2$$

$$\frac{II_1}{II_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{IK\sin i_1}{IK\sin i_2} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2}$$

Lo que permite demostrar la relación de Snell-Descartes por la refracción:

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Entonces, una simple construcción geométrica permite demostrar una ley bien conocida de la óptica.

1.4. Principio de Fermat

La luz se propaga de un punto a un otro siguiendo una trayectoria tal que la duración del recorrido sea mínima (estacionario).

$$L(AB) = \int_A^B nds$$

Sea $L'(AB)$ un camino levemente diferente de $L(AB)$, obtenido por variación infinitesimal δM del camino $L(AB)$ en cada punto M. Como A y B no cambian, podemos escribir: $\delta A = \delta B = 0$.
Se dice que el camino óptico L es estacionario cuando la cantidad elemental $\delta L = L'(AB) - L(AB)$ es infinitamente pequeña con respecto al valor superior de δM.
En consecuencia, podemos establecer que la luz se propaga de manera rectilínea en un medio material homogéneo. Como un tal medio está caracterizado por un índice constante, podemos escribir: $L(AB) = \int_A^B nds = n\widetilde{AB}$. De eso resulta que el camino óptico $L(AB)$ es mínimo si $\widetilde{AB}$ se identifica a la línea recta $\overline{AB}$.
Por otra parte, podemos también establecer el principio de vuelta inversa de la luz: $L(AB) = \int_A^B nds = \int_B^A n(-ds) = \int_B^A nds' = L(BA)$.

1.5. Leyes de Snell-Descartes

1.5.1. Diferencial de un camino óptico rectilineal

La longitud del segmento AB se puede escribir: $AB = \vec{u}.\overrightarrow{AB}$, donde $\vec{u}$ es el vector unitario del rayo luminoso en el sentido A hacia B. Asumiendo que el medio es homogéneo (n constante), podemos entonces escribir:

$$L(AB) = nAB = n\vec{u}.\overrightarrow{AB}$$

Imponemos variaciones elementales dA y dB en las extremidades. La variación $dL(AB)$ se escribe:

$$dL(AB) = nd(\vec{u}.\overrightarrow{AB}) = n\overrightarrow{AB}.d\vec{u} + n\vec{u}.d\overrightarrow{AB} = nAB\vec{u}.d\vec{u} + n\vec{u}.(d\vec{B} - d\vec{A})$$

Como $\vec{u}$ es un vector unitario, $\vec{u}.\vec{u} = u^2 = 1$ y $d(\vec{u}.\vec{u}) = 2\vec{u}.d\vec{u} = 0$. Entonces:

$$dL(AB) = n\vec{u}.(d\vec{B} - d\vec{A})$$

1.5.2. Expresión vectorial de las leyes de Snell-Descartes

Consideramos una interfaz (superficie de separación) entre dos medios transparentes 1 y 2 de índices diferentes n_1 y n_2 y un rayo luminoso incidente llegando en el punto I, ubicado en esta interfaz. Entre los puntos A_1 y A_2 ubicados respectivamente en los medios 1 y 2, el camino óptico se escribe:

$$L(A_1A_2) = n_1A_1I + n_2IA_2$$

Aplicamos el principio de Fermat con una leve deformación de la trayectoria A_1IA_2 según $A_1I'A_2$. La variación correspondiente del camino óptico se escribe:

$$\delta L = n_1\vec{u_1}.\delta\vec{I} - n_2\vec{u_2}.\delta\vec{I} = -\delta\vec{I}(n_2\vec{u_2} - n_1\vec{u_1})$$

donde $\vec{u_1}$ y $\vec{u_2}$ son los vectores unitarios de los rayos incidente y emergente, y $\delta\vec{I} = \overrightarrow{II'}$. Como $\delta L = 0$ según el principio de Fermat, $n_2\vec{u_2} - n_1\vec{u_1}$ debe estar colineal al vector unitario $\vec{N}$ normal a la interfaz. Entonce, a siendo un número real, tenemos:

$$n_2\vec{u_2} - n_1\vec{u_1} = a\vec{N}$$

1.5.3. Ley fundamental de la óptica geométrica

La fórmulación vectorial de las leyes de Snell-Descartes permite establecer la ecuación diferencial de la trayectoria de un rayo luminoso en un medio no homogéneo. De hecho, consideramos una superficie de igual índice y aplicamos la fórmula anterior entre dos puntos vecinos ubicados en ámbas partes de esta superficie. Viene inmediatamente $d(n\vec{u}) = a\vec{N}$. Como $\vec{N}$ y $\overrightarrow{grad}(n) = \vec{\nabla}n$ son colineal, podemos escribir:

$$d(n\vec{u}) = dn\vec{u} + nd\vec{u} = a'\overrightarrow{grad}(n) = a'\vec{\nabla}n$$

Como $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ y $dn = \overrightarrow{grad}(n).d\vec{r}$, podemos buscar el valor de a':

$$dn + 0 = a'\overrightarrow{grad}(n).\frac{d\vec{r}}{ds} = a'\frac{dn}{ds}$$

Lo que permite establecer el valor de este parámetro: $a' = ds$. Finalmente:

$$\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \overrightarrow{grad}(n) = \vec{\nabla} n$$

Esta ecuación es la ley fundamental de la óptica geométrica, y es equivalente al principio de Fermat. Es muy útil para estudiar el comportamiento de una haz de luz en un medio no homogéneo. Sirve también en el estudio de la refracción atmosférica.

1.5.4. Leyes de la refracción

a) **Primera ley**: Utilizando la relación vectorial de Snell-Descartes, podemos escribir $\vec{u_2} = \frac{n_1}{n_2}\vec{u_1} + \frac{a}{n_2}\vec{N}$, lo que implica que el vector $\vec{u_2}$ está contenido en el plano de incidencia $(\vec{u_1}, \vec{N})$, y entonces que el rayo refractado está también contenido en el plano de incidencia.
b) **Segunda ley**: Multiplicando vectorialmente por la izquierda la relación vectorial de Snell-Descartes por el vector $\vec{N}$, tenemos:

$$n_2\vec{N} \wedge \vec{u_2} = n_1\vec{N} \wedge \vec{u_1} + a\vec{N} \wedge \vec{N} = n_1\vec{N} \wedge \vec{u_1}$$

Introduciendo el ángulo de incidencia $i_1 = (\widehat{\vec{N}, \vec{u_1}})$ y el ángulo de refracción $i_2 = (\widehat{\vec{N}, \vec{u_2}})$, estamos obteniendo la (bien conocida) ley de Snell-Descartes por la refracción:

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

1.5.5. Leyes de la reflexión

Podemos todavía utilizar la relación vectorial de Snell-Descartes. Aquí, la luz siendo reflejada en I, el punto A_2 está ubicado en mismo medio que A_1, y $n_2 = n_1$.
a) **Primera ley**: Utilizando la relación vectorial de Snell-Descartes, podemos escribir $\vec{u_2} = \vec{u_1} + \frac{a}{n_1}\vec{N}$, lo que implica que el vector $\vec{u_2}$ está contenido en el plano de incidencia $(\vec{u_1}, \vec{N})$, y entonces que el rayo refractado está también contenido en el plano de incidencia.
b) **Segunda ley**: Multiplicando vectorialmente por la izquierda la relación vectorial de Snell-Descartes por el vector $\vec{N}$, $i_2 = (\widehat{-\vec{N}, \vec{u_2}})$ siendo el ángulo de reflexión, tenemos:

$$-\sin i_2 = \vec{N} \wedge \vec{u_2} = \vec{N} \wedge \vec{u_1} + \frac{a}{n_1}\vec{N} \wedge \vec{N} = \vec{N} \wedge \vec{u_1} = \sin i_1$$

Finalmente, estamos encontrando la (bien conocida) ley de Snell-Descartes por la reflexión:

$$i_2 = -i_1$$

1.5.6. Ángulo de refracción límite; Reflexión total

Según la ley de Snell-Descartes por la refracción, tenemos:

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Cuando el índice de primer medio es inferior al lo del segundo medio: $n_1 < n_2$, podemos escribir: $-1 \leq \sin i_1 \leq 1$ y entonces: $-\frac{n_1}{n_2} \leq \sin i_2 \leq \frac{n_1}{n_2}$. En consecuencia: $-\frac{\pi}{2} \leq i_1 \leq \frac{\pi}{2}$ y $-\hat{\xi} \leq i_2 \leq \hat{\xi}$, donde $\hat{\xi}$ es el ángulo de refracción límite, definido por:

$$\sin \hat{\xi} = \frac{n_1}{n_2}$$

Conviene aquí de distinguir dos casos:
a) El rayo luminoso se dirige hacia un medio más refringente ($n_1 < n_2$): El rayo es entonces

siempre refractado. Si el ángulo de incidencia vale $i_1 = \frac{\pi}{2}$, el rayo refractado vale $\hat{\xi}$, de manera tal que $\sin\hat{\xi} = \frac{n_1}{n_2}$.
b) El rayo luminoso se dirige hacia un medio menos refringente ($n_1 > n_2$): Si el ángulo de incidencia es inferior o igual a $\hat{\xi}$, está refractado en I (parcialmente, debido a que una parte más o menos sustancial del rayo incidente está reflejada en I). No obstante, si el ángulo de incidencia es superior a $\hat{\xi}$, no hay ningún rayo refractado, pero solamente un rayo reflejado. Se habla entonces de reflexión total del rayo luminoso.

1.5.7. Refracción al interior de un prisma; Fórmulas del prisma

El prisma es un medio refringente, transparente, homogéneo e isótropo limitado por dos interfaces planas formando un diedro de ángulo A.
Anotando n el índice de refración del prisma, i y r los ángulos de incidencia y de refracción en la primera interfaz (punto I, a la entrada del prisma), r' y i' los ángulos de incidencia y de refracción en la segunda interfaz (punto I', a la salida del prisma), y D el ángulo de desviación del prisma (obtenido entre el rayo incidente a la entrada del prisma y el rayo refractado a la salida del prisma), tenemos, por una parte: $\sin i = n \sin r$ y $n \sin r' = \sin i'$.
Por otra parte, considerando los triángulos IKI' y ILI', podemos establecer: $A = r + r'$ y $D = (i - r) + (i' - r')$, lo que nos da: $D = i + i' - A$.

2. Formación de las imágenes en óptica geométrica

Cuando los rayos procedientes de un punto objeto A_o emergen del instrumento óptico convergiendo hacia un punto imagen A_i, se dice que A_i es la imagen conjugada de A_o o que el instrumento es estigmático por los puntos A_o y A_i.

2.1. Estigmatismo riguroso

Estamos considerando un sistema óptico que hace converger en el punto imagen A_i todos los rayos luminosos procedentes del punto objeto A_o. Tales puntos objetos o imágenes están nombrados reales, siendo definidos por la intersección de rayos luminosos.
Según el principio de Fermat, sabemos que el camino óptico es estacionario entre A_o y A_i. Entonces, su valor establecido debe estar independiente del rayo luminoso considerado: $L(A_oA_i) = Cste$, lo que se puede escribir:

$$L(A_oA_i) = n_oA_oI + L(IJ) + n_iJA_i = Cste$$

Estamos aquí nombrando n_o y n_i los índices de los medios objeto e imagen.
Para incluir todos los casos (objetos reales o virtuales, imágenes reales o virtuales), la relación anterior se escribe de manera algébrica:

$$L(\overline{A_oA_i}) = n_o\overline{A_oI} + L(\overline{IJ}) + n_i\overline{JA_i} = Cste$$

a) En el caso de un objeto real y de una imagen real:

$$L(\overline{A_oA_i}) = n_oA_oI + L(IJ) + n_iJA_i = Cste$$

b) En el caso de un objeto real y de una imagen virtual:

$$L(\overline{A_oA_i}) = n_oA_oI + L(IJ) - n_iJA_i = Cste$$

c) En el caso de un objeto virtual y de una imagen real:

$$L(\overline{A_oA_i}) = -n_oA_oI + L(IJ) + n_iJA_i = Cste$$

2.2. Ejemplos de instrumentos con Estigmatismo riguroso

2.2.1. Instrumentos constituidos de una superficie reflectante

Notando A_o y A_i los puntos objeto e imagen, I un punto de la superficie reflectante, y n el índice del medio, el camino óptico se escribe:

$$L(\overline{A_oA_i}) = n(\overline{A_oI} + \overline{IA_i}) = Cste$$

a) Si los puntos A_o y A_i son de misma naturaleza (real o virtual), $A_oI + IA_i = Cste$ y el conjunto de los puntos i es un elipsoide de revolución, A_o y A_i siendo sus focos.
b) Si los puntos A_o y A_i son de naturaleza diferente, $A_oI - IA_i = Cste$ y el conjunto de los puntos i (superficie estigmática) es un hiperboloide de revolución, A_o y A_i siendo sus focos. En el caso de tener esta constante nula, el conjunto de los puntos I es el plano meridiano del segmento A_o A_i, y el instrumento es un espejo plano.
c) Si uno de los dos puntos A_o y A_i está ubicado al infinito, por ejemplo A_o, se utiliza un punto Q_o de una superficie de onda Σ_o tal que: $L(\overline{Q_oA_i}) = \overline{Q_oI} + \overline{IA_i} = 0$, lo que se puede escribir: $Q_oI = IA_i$, A_i siendo real. La superficie estigmática es entonces un paraboloide de revolución de foco A_i. Su utilización en astronomía es fundamental, debido al uso de los espejos primarios paraboloidales por la mayoría de los telescopios reflectores en el mundo.

2.2.2. Instrumentos constituidos de una superficie refráctante

Entre los puntos A_o y A_i, localizados en medios transparentes homogéneos de índices n_o y n_i, el camino óptico se puede escribir:

$$L(\overline{A_oA_i}) = n_o\overline{A_oI} + n_i\overline{IA_i} = Cste$$

Si los puntos A_o y A_i son reales, tenemos:

$$L(\overline{A_oA_i}) = n_oA_oI + n_iIA_i = Cste$$

Las superficies soluciones están llamadas ovoides de Descartes.
No obstante, solamente el caso $Cste = 0$ presenta un interés, debido a que la superficie solución de este caso peculiar es una esfera. En este caso, A_o y A_i están de naturalezas diferentes, A_o siendo real y A_i, virtual. Tenemos entonces: $n_oA_oI - n_iIA_i = 0$. Podemos definir el parametra K, tal que $K = \frac{IA_i}{IA_o} = \frac{n_o}{n_i}$. El rayo R y la distancia OC del medio del segmento A_o, A_i (con $A_oA_i = a$) al centro de la esfera valen: $R = \frac{aK}{|K^2-1|}$ y $OC = \frac{a}{2}\frac{K^2+1}{|K^2-1|}$.
Se utiliza este tipo de lente esférica por los objetivos de microscopios.

2.3. Estigmatismo aproximado

Lo más generalmente, los sistemas ópticos no son estigmáticos de manera rigurosa, o lo son solamente por dos puntos conjugados A_o y A_i. No obstante, los sistemas ópticos se utilizan dentro de un Estigmatismo aproximado, lo que es generalmente suficiente.
Se llama sistema centrado un sistema óptico presentando un eje de simetría de revolución circular alrededor de su eje óptico. Sean A_o y A_i dos puntos conjugados de este eje:

$$L(\overline{A_oA_i}) = n_o\overline{A_oI} + L(\overline{IJ}) + n_i\overline{JA_i} = Cste$$

Estamos ahora introduciendo les puntos conjugados M_o y M_i vecinos respectivamente de A_o y A_i. Como M_i es el conjugado de M_o, tenemos: $L(\overline{M_oM_i}) = Cste$. Y entonces:

$$L(\overline{M_oM_i}) - L(\overline{A_oA_i}) = n_o\vec{u_o}(\Delta\vec{I} - \Delta\vec{A_o}) + n_1\vec{u_1}(\Delta\vec{I_1} - \Delta\vec{I}) + ... + n_i\vec{u_i}(\Delta\vec{A_i} - \Delta\vec{J}) = Cste$$

$$L(\overline{M_oM_i}) - L(\overline{A_oA_i}) = -n_o\vec{u_o}.\overrightarrow{A_oM_o} + (n_o\vec{u_o} - n_1\vec{u_1})\Delta\vec{I} + ... + n_i\vec{u_i}.\overrightarrow{A_iM_i} = Cste$$

Según la ley de Snell-Descartes por la refracción, sabemos que: $(n_o\vec{u_o} - n_1\vec{u_1})\Delta\vec{I} = 0$. Entonces, todos los termas intermediarios desaparecen y podemos finalmente escribir:

$$L(\overline{M_oM_i}) - L(\overline{A_oA_i}) = n_i\vec{u_i}.\overrightarrow{A_iM_i} - n_o\vec{u_o}.\overrightarrow{A_oM_o} = Cste$$

2.3.1. Aplanetismo: Condición de los senos de Abbe

Estamos llamando Aplanetismo la conservación del Estigmatismo en un plano de frente perpendicular al eje óptico. Sean B_o y B_i dos puntos vecinos respectivamente de A_o y A_i según los ejes A_ox_o y A_ix_i (los segmentos A_oB_o y A_iB_i son entonces perpendiculares al eje óptico. Podemos escribir de nuevo la relación establecida anteriormente:

$$L(\overline{B_oB_i}) - L(\overline{A_oA_i}) = n_i\vec{u_i}.\overrightarrow{A_iB_i} - n_o\vec{u_o}.\overrightarrow{A_oB_o} = n_i\overline{A_iB_i}\sin\theta_i - n_o\overline{A_oB_o}\sin\theta_o = Cste$$

Como el sistema tiene su eje de simetría confundido con su eje óptico, si $\theta_o = 0$, entonces $\theta_i = 0$ por razón obvia de simetría axial, lo que implica inmediatamente que $Cste = 0$. Podemos así definir la condición de los senos de Abbe:

$$n_o\overline{A_oB_o}\sin\theta_o = n_i\overline{A_iB_i}\sin\theta_i$$

Por otra parte, se puede escribir la misma relación de otra manera:

$$\frac{\sin\theta_o}{\sin\theta_i} = \frac{n_i}{n_o}\frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{A_oB_o}} = \frac{n_i}{n_o}G_t$$

$G_t = \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{A_oB_o}}$ siendo el aumento transversal del sistema óptico centrado.

2.3.2. Aplanetismo: Condición de Herschel

Por otra parte, podemos estudiar la conservación del Estigmatismo a lo largo del eje óptico del sistema centrado. Sean C_o y C_i dos puntos vecinos respectivamente de A_o y A_i según el eje óptico. Como anteriormente, podemos escribir:

$$L(\overline{C_oC_i}) - L(\overline{A_oA_i}) = n_i\vec{u_i}.\overrightarrow{A_iC_i} - n_o\vec{u_o}.\overrightarrow{A_oC_o} = n_i\overline{A_iC_i}\cos\theta_i - n_o\overline{A_oC_o}\cos\theta_o = Cste$$

Por razón de simetría axial, si $\theta_o = 0$, entonces $\theta_i = 0$ y $Cste = n_i\overline{A_iC_i} - n_o\overline{A_oC_o}$:

$$n_i\overline{A_iC_i}\cos\theta_i - n_o\overline{A_oC_o}\cos\theta_o = n_i\overline{A_iC_i} - n_o\overline{A_oC_o}$$

$$n_o\overline{A_oC_o}(1 - \cos\theta_o) = n_i\overline{A_iC_i}(1 - \cos\theta_i)$$

Finalmente, estamos encontrando la condición de Herschel por el Aplanetismo:

$$n_o\overline{A_oC_o}\sin^2\frac{\theta_o}{2} = n_i\overline{A_iC_i}\sin^2\frac{\theta_i}{2}$$

Lo que podemos también escribir de la manera siguiente:

$$\frac{\sin^2\frac{\theta_o}{2}}{\sin^2\frac{\theta_i}{2}} = \frac{n_i}{n_o}\frac{\overline{A_iC_i}}{\overline{A_oC_o}} = \frac{n_i}{n_o}G_l$$

$G_l = \frac{\overline{A_iC_i}}{\overline{A_oC_o}}$ siendo el aumento longitudinal del sistema óptico centrado.

2.3.3. Condiciones de Estigmatismo tri-dimensional

Las relaciones encontradas anteriormente permiten de escribir:

$$\frac{\sin^2\theta_o}{\sin^2\theta_i} = \frac{4\sin^2\frac{\theta_o}{2}\cos^2\frac{\theta_o}{2}}{4\sin^2\frac{\theta_i}{2}\cos^2\frac{\theta_i}{2}} = \frac{n_i^2}{n_o^2}G_t^2$$

y también la última relación encontrada, sin ningún cambio:

$$\frac{\sin^2\frac{\theta_o}{2}}{\sin^2\frac{\theta_i}{2}} = \frac{n_i}{n_o}G_l$$

Podemos combinar estas dos relaciones, eliminando los senos y obteniendo:

$$\frac{\cos^2\frac{\theta_o}{2}}{\cos^2\frac{\theta_i}{2}} = \frac{n_i}{n_o}\frac{G_t^2}{G_l}$$

Como $\theta_i = 0$ cuando $\theta_o = 0$, los dos miembros de esta ecuación deben estar igual a 1. Eso implica que este sistema puede solamente trabajar con $\theta_i = \theta_o$, lo que limita mucho su utilización. Con $G_t = \pm\frac{n_o}{n_i}$, un tal sistema está llamado perfecto, con $\frac{n_i}{n_o}\frac{G_t^2}{G_l} = 1$.
Un ejemplo de instrumento perfecto es el espejo plano ($\theta_i = -\theta_o$), con $G_t = 1$.

3. Aproximación de Gauss

La aproximación de Gauss es la aproximación lineal (al primer orden) de la óptica geométrica. Dentro de esta aproximación, los ángulos permanecen pequeños, lo que implica que los senos pueden estar cambiados en los ángulos (exprimidos en radianes).

3.1. Caso de la interfaz esférica

Estamos siguiendo el comportamiento de un rayo luminoso. Tenemos:

$$i_1 = (\widehat{\vec{N},\vec{u_1}}) => i_2 = \arcsin(\frac{n_1\sin i_1}{n_2}) = (\widehat{\vec{N},\vec{u_2}})$$

$$a\vec{N} = n_2\vec{u_2} - n_1\vec{u_1} => a = a\vec{N}.\vec{N} = n_2\vec{N}.\vec{u_2} - n_1\vec{N}.\vec{u_1} = n_2\cos i_2 - n_1\cos i_1$$

$$\vec{u_2} = \frac{1}{n_2}(n_1\vec{u_1} + a\vec{N}) = \frac{1}{n_2}(n_1\vec{u_1} + (n_2\cos i_2 - n_1\cos i_1)\vec{N})$$

Estos cálculos son válidos solamente por un rayo luminoso, además de estar complicados.

3.2. La interfaz esférica dentro de la aproximación de Gauss

Asumiendo que los ángulos i_1 y i_2 permanecen débiles (inferiores a 10^o, más o menos), con rayos pocos inclinados sobre el eje óptico y entonces el punto I vecino del punto S (lo cual está ubicado sobre el eje óptico), podemos escribir: $\sin i_1 \approx i_1$ y $\sin i_2 \approx i_2$.
La ley de Snell-Descartes se puede escribir: $n_1 i_1 \approx n_2 i_2$ y el parámetro a vale: $a \approx n_2 - n_1$.
Anotando $\bar{R}$ el radio algébrico de la interfaz esférica. Podemos escribir $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$:

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, podemos escribir la relación de Snell-Descartes:

$$n_2\vec{u}_2 - n_1\vec{u}_1 = a\vec{N} = (n_2 - n_1)\frac{\overrightarrow{IC}}{R}$$

$$=> n_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} - n_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = (n_2 - n_1) \begin{pmatrix} -\frac{x}{R} \\ -\frac{y}{R} \\ \gamma_N \end{pmatrix}$$

Como los rayos son pocos inclinados con respecto al eje óptico, tenemos: $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx \gamma_N \approx 1$.

$$=> \begin{cases} n_2\alpha_2 - n_1\alpha_1 = -\frac{n_2-n_1}{\bar{R}}x \\ n_2\beta_2 - n_1\beta_1 = -\frac{n_2-n_1}{\bar{R}}y \end{cases}$$

Pasando a la notación compleja, podemos entonces escribir (con $\underline{\alpha} = \alpha + i\beta$ y $\underline{x} = x + iy$):

$$n_2\underline{\alpha_2} - n_1\underline{\alpha_1} = -\frac{n_2 - n_1}{\bar{R}}\underline{x} => n_2\underline{\alpha_2} = n_1\underline{\alpha_1} - \frac{n_2 - n_1}{\bar{R}}\underline{x}$$

Por otra parte, durante la refracción, la coordenada $\underline{x}$ no cambia: $\underline{x_1} = \underline{x_2}$.

3.3. Vergencia de una interfaz esférica

Por definición, la vergencia de una interfaz esférica es (con $\bar{R} = \overline{SC}$ radio de curvatura):

$$V = \frac{n_2 - n_1}{\bar{R}}$$

La unidad de la vergencia es la dioptría (símbolo: δ).

$$\begin{array}{llll} V > 0 & x_2 > 0 & \alpha_2 < 0 & interfaz\ convergente \\ V > 0 & x_2 < 0 & \alpha_2 > 0 & interfaz\ convergente \\ V < 0 & x_2 > 0 & \alpha_2 > 0 & interfaz\ divergente \\ V < 0 & x_2 < 0 & \alpha_2 < 0 & interfaz\ divergente \end{array}$$

El punto C es el centro de curvatura.
a. Si C se ubica en el medio más refringente, $V > 0$ y la interfaz es convergente.
b. Si C se ubica en el medio menos refringente, $V < 0$ y la interfaz es divergente.
c. Por una interfaz plana (caso del espejo plano), $V = 0$.

3.4. Relación de conjugación de una interfaz esférica

Considerando los triángulos A_oCI y CIA_i, tenemos: $|i_1| = |\theta_o| + |\phi|$ y $|i_2| = |\phi| - |\theta_i|$.
Por otra parte, la ley de Snell-Descartes por la refracción nos da: $n_o|i_1| = n_i|i_2|$.
Podemos entonces deducir de estas relaciones que: $n_o|\theta_o| + n_i|\theta_i| = (n_i - n_o)|\phi|$.
Considerando los triángulos A_oHI y HIA_i, $|\theta_o| \approx \frac{HI}{HA_o} \approx \frac{HI}{SA_o}$: $|\theta_i| \approx \frac{HI}{HA_i} \approx \frac{HI}{SA_i}$ y $|\phi| \approx \frac{HI}{R}$:

$$=> \frac{n_o}{SA_o} + \frac{n_i}{SA_i} = \frac{n_i - n_o}{R} = V$$

Algebraicamente, tenemos $SA_o = -\overline{SA_o}$; $SA_i = \overline{SA_i}$ y $R = \bar{R}$. Entonces:

$$=> \frac{n_i}{\overline{SA_i}} - \frac{n_o}{\overline{SA_o}} = \frac{n_i - n_o}{\bar{R}} = V$$

a. Si $A_o \to -\infty$, $A_i \to F_i$ (foco imagen). $\overline{SF_i} = f_i = \frac{n_i}{V}$ (f_i distancia focal imagen)
b. Si $A_i \to \infty$, $A_o \to F_o$ (foco objeto). $\overline{SF_o} = f_o = -\frac{n_o}{V}$ (f_o distancia focal objeto)
Bajo la aproximación de Gauss, la relación de Abbe se escribe:

$$n_o\overline{A_oB_o}\theta_o = n_i\overline{A_iB_i}\theta_i => G_t = \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{A_oB_o}} = \frac{n_o}{n_i}\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{n_o}{n_i}\frac{\overline{SA_i}}{\overline{SA_o}}$$

3.5. Matrices fundamentales de una interfaz esférica

3.5.1. Matriz de refracción

Estamos escribiendo $\underline{X}$ la matriz columna:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x \\ n\underline{\alpha} \end{bmatrix}$$

El franqueamiento de la interfaz esférica por la luz se escribe $\underline{X}_2 = \Re(S)\underline{X}_1$ o:

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ n\underline{\alpha} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ n\underline{\alpha} \end{bmatrix}_1$$

$$\Re(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \qquad Det(\Re(S)) = 1$$

3.5.2. Matriz de translación

Matriz de translación entre dos planos de frente A_1xy y A_2xy, con índice n constante. Como anteriormente, podemos escribirla de la forma siguiente: $\underline{X}_2 = \Im(\overline{A_1A_2})\underline{X}_1$ o:

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ n\underline{\alpha} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\overline{A_1A_2}}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ n\underline{\alpha} \end{bmatrix}_1$$

$$\Im(\overline{A_1A_2}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\overline{A_1A_2}}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Det(\Im(\overline{A_1A_2})) = 1$$

4. Sistemas centrados: Elementos cardinales

Son sistemas compuestos de varias superficies / interfaces / volumenes refringentes, refráctantes y/o reflectantes, generalmente de forma esférica tales que el conjunto presente un eje de simetría (también llamado eje de revolución) $0z$ (eje confundido con el eje óptico, lo cual es definido por el sentido de propagación de la luz).

4.1. Matriz de transfer de un sistema centrado

Consideramos un sistema centrado compuesto de p interfaces ópticas refringentes separadas por medios homogéneos. Entre los planos de frente de entrada Exy y de salida Sxy, el sistema es entonces homogéneo por partes. La trayectoria de cada rayo luminoso es una sucesión de segmentos cuyas extremidades están ubicadas en las superficies de separación. Para encontrar el rayo emergente dentro de la aproximación de Gauss, debemos introducir la matriz de transfer $T(\overline{ES})$ del sistema.
Las matrices columnas de entrada y salida se escriben:

$$\underline{X}_e = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ n\underline{\alpha} \end{bmatrix}_e \qquad \underline{X}_s = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ n\underline{\alpha} \end{bmatrix}_s$$

utilizando la notación compleja $\underline{x} = x + iy$ y $n\underline{\alpha} = n(\alpha + i\beta)$.
Podemos entonces escribir (notando $\Re(S_i)$ la matriz de transfer de la interfaz i):

$$\underline{X}_s = T(\overline{ES})\underline{X}_e = \Im(\overline{S_pS})\Re(S_p)\ldots\Im(\overline{S_2S_3})\Re(S_2)\Im(\overline{S_1S_2})\Re(S_1)\Im(\overline{ES_1})\underline{X}_e$$

$$=> T(\overline{ES}) = \Im(\overline{S_pS})\Re(S_p)\ldots\Im(\overline{S_2S_3})\Re(S_2)\Im(\overline{S_1S_2})\Re(S_1)\Im(\overline{ES_1})$$

Podemos también escribir la matriz $T(\overline{ES})$ de la manera siguiente:

$$T(\overline{ES}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad Det(T(\overline{ES})) = ad - bc = 1$$

El determinante de $T(\overline{ES})$ es igual a 1 como producto de matrices de determinantes siempre iguales a 1. Por otra parte, la ecuación matricial $\underline{X}_s = T(\overline{ES})\underline{X}_e$ se puede ahora escribir:

$$\begin{cases} \underline{x}_s = a\underline{x}_e + bn\underline{\alpha}_e \\ n\underline{\alpha}_s = c\underline{x}_e + dn\underline{\alpha}_e \end{cases}$$

4.2. Vergencia de un sistema centrado

Podemos escribir la matriz de transfer $T(\overline{A_1A_2})$ entre los puntos A_1 y A_2 respectivamente ubicados en los espaces objeto e imagen, de índices n_o y n_i:

$$T(\overline{A_1A_2}) = \Im(\overline{SA_2})T(\overline{ES})\Im(\overline{A_1E})$$

Fijando $z_1 = \overline{EA_1}$ y $z_2 = \overline{SA_2}$, tenemos:

$$\begin{bmatrix} T_{11}(A) & T_{12}(A) \\ T_{21}(A) & T_{22}(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z_2}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{z_1}{n_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo que se puede escribir:

$$\begin{cases} T_{11}(A) = a + c\frac{z_2}{n_i} \\ T_{12}(A) = -a\frac{z_1}{n_o} + b + \frac{z_2}{n_i}(-c\frac{z_1}{n_o} + d) \\ T_{21}(A) = c = -V \\ T_{22}(A) = d - c\frac{z_1}{n_o} \end{cases}$$

$T_{21}(A) = c = -V$ es independiente de la posición de los puntos A_1 y A_2. **Por definición, $V = -c = -T_{21}(A)$ es la vergencia del sistema**.
Si $V > 0$, el sistema es convergente. Cada rayo incidente paralelo al eje óptico emerge acercandose a este, si los puntos I (punto de entrada del rayo incidente) y J (punto de salida del rayo emergente) se ubican del mismo lado del eje.
Si $V < 0$, el sistema es divergente. Cada rayo incidente paralelo al eje óptico emerge alejandose de este, si los puntos I (punto de entrada del rayo incidente) y J (punto de salida del rayo emergente) se ubican del mismo lado del eje.
Si $V = 0$, el sistema es afocal. Cada rayo incidente paralelo al eje óptico emerge quedandose paralelo a este. Este último caso no es tan interesante y no vamos a verlo más.

4.3. Matriz de conjugación

Supongamos ahora que los puntos considerados sean conjugados A_o y A_i, B_o y B_i (los rayos luminosos pasando por B_o pasan también por B_i, con $\underline{x}_o = \overline{A_oB_o}$ y $\underline{x}_i = \overline{A_iB_i}$) y

$\overrightarrow{A_oB_o} \parallel \overrightarrow{A_iB_i} \perp$ eje óptico. Los termas de la matriz de transfer se pueden escribir:

$$\begin{cases} T_{11}(A) = a - V\frac{z_2}{n_i} \\ T_{12}(A) = -a\frac{z_1}{n_o} + b + \frac{z_2}{n_i}(V\frac{z_1}{n_o} + d) \\ T_{21}(A) = -V \\ T_{22}(A) = d + V\frac{z_1}{n_o} \end{cases}$$

Y, entonces:

$$\underline{X}_i = T(\overline{A_oA_i})\underline{X}_o => \begin{cases} \underline{x}_i = T_{11}(A)\underline{x}_o + T_{12}(A)n_o\underline{\alpha}_o \\ n_i\underline{\alpha}_i = -V\underline{x}_o + T_{22}(A)n_o\underline{\alpha}_o \end{cases}$$

Como la posición $\underline{x}_i$ del punto imagen B_i es independiente de la inclinación $\underline{\alpha}_o$ del rayo luminoso procedente del punto objeto B_o, tenemos de manera obvia $T_{12}(A) = 0$, lo que permite escribir: $T_{11}(a) = \frac{\underline{x}_i}{\underline{x}_o} = \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{A_oB_o}} = G_t$ (G_t es el aumento transversal).
Por otra parte, $T_{22}(A)$ se puede escribir $T_{22}(A) = \left(\frac{n_i\alpha_i}{n_o\alpha_o}\right)_{x_o=0}$. Se define el aumento angular como siendo $G_a = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_o}\right)_{x_o=0}$. Entonces, estamos obteniendo $T_{22}(A) = \frac{n_i}{n_o}G_a$.
Finalmente, la matriz de transfer entre dos puntos conjugados se escribe:

$$T(\overline{A_oA_i}) = \begin{bmatrix} G_t & 0 \\ -V & \frac{n_i}{n_o}G_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_t & 0 \\ -V & G_t^{-1} \end{bmatrix} \qquad Det(T(\overline{A_oA_i})) = \frac{n_i}{n_o}G_tG_a = 1$$

El valor del determinante permite encontrar la aproximación lineal (de Gauss) de la relación de (los senos) de Abbe: $\frac{n_i}{n_o}G_tG_a = 1 => G_t^{-1} = \frac{n_i}{n_o}G_a => n_ox_o\alpha_o = n_ix_i\alpha_i$. Esta relación entre el aumento transversal y el aumento angular está llamada relación de Lagrange-Helmholtz.
Dentro de la aproximación de Gauss, podemos también aplicar la relación de Herschel para expresar la conservación del Estigmatismo: $n_o\Delta z_o\alpha_o^2 = n_i\Delta z_i\alpha_i^2$. Utilizando el aumento longitudinal $G_l = \frac{\Delta z_i}{\Delta z_o}$, tenemos $\frac{n_i}{n_o}G_lG_a^2 = 1$. Se puede combinar todo eso con lo anterior:

$$\frac{n_i}{n_o}G_tG_a = 1 \qquad \frac{n_i}{n_o}G_lG_a^2 = 1 \qquad G_l = \frac{n_i}{n_o}G_t^2 \qquad G_t = G_lG_a$$

4.4. Elementos cardinales

4.4.1. Distancias focales

Se definen las distancias focales objeto e imagen como siendo:

$$f_o = -\frac{n_o}{V} \qquad f_i = \frac{n_i}{V}$$

$$\begin{cases} V > 0 => f_o < 0 \ y \ f_i > 0 => Sistema \ convergente \\ V < 0 => f_o > 0 \ y \ f_i < 0 => Sistema \ divergente \end{cases}$$

Si el medio es lo mismo en los espacios objeto e imagen ($n_i = n_o$), tenemos: $f_i = -f_o$.

4.4.2. Planos principales

Son los planos de frente conjugados H_oxy y H_ixy tal que $G_t = 1$. Están generalmente lamados planos unitarios. Su matriz de transfer se escribe:

$$T(\overline{H_oH_i}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} T_{11}(A) = 1 = a - V\frac{\overline{SH_i}}{n_i} => \overline{SH_i} = (a-1)\frac{n_i}{V} = (a-1)f_i \\ T_{22}(A) = 1 = d + V\frac{\overline{EH_o}}{n_o} => \overline{EH_o} = (1-d)\frac{n_o}{V} = (d-1)f_o \end{cases}$$

4.4.3. Puntos nodales

Son los dos puntos conjugados del eje óptico N_o y N_i tal que cada rayo incidente pasando por N_o emerge de N_i paralelamente a su dirección incidente. Eso implica inmediatamente que: $G_a = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_o}\right)_{x_o=0} = 1$. Su matriz de transfer se escribe:

$$T(\overline{N_oN_i}) = \begin{bmatrix} \frac{n_o}{n_i} & 0 \\ -V & \frac{n_i}{n_o} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} T_{11}(A) = \frac{n_o}{n_i} = a - V\frac{\overline{SN_i}}{n_i} => \overline{SN_i} = (a - \frac{n_o}{n_i})\frac{n_i}{V} = (a - \frac{n_o}{n_i})f_i \\ T_{22}(A) = \frac{n_i}{n_o} = d + V\frac{\overline{EN_o}}{n_o} => \overline{EN_o} = (\frac{n_i}{n_o} - d)\frac{n_o}{V} = (d - \frac{n_i}{n_o})f_o \end{cases}$$

Podemos establecer las distancias entre los puntos H_o y N_o y entre los puntos H_i y N_i:

$$\begin{cases} \overline{H_oN_o} = \overline{EN_o} - \overline{EH_o} = (d - \frac{n_i}{n_o})f_o - (d-1)f_o = (1 - \frac{n_i}{n_o})f_o = f_o + f_i \\ \overline{H_iN_i} = \overline{SN_i} - \overline{SH_i} = (a - \frac{n_o}{n_i})f_i - (a-1)f_i = (1 - \frac{n_o}{n_i})f_i = f_o + f_i \end{cases}$$

En el caso de tener $n_i = n_o$, podemos fácilmente ver que $\overline{H_oN_o} = \overline{H_iN_i} = 0$.
Por otra parte, podemos verificar que $\overline{H_oH_i} = \overline{N_oN_i}$

$$\overline{H_oH_i} = \overline{H_oN_o} + \overline{N_oN_i} + \overline{N_iH_i} = f_o + f_i + \overline{N_oN_i} - f_o - f_i = \overline{N_oN_i}$$

4.4.4. Planos focales

Son los planos F_oxy en el espacio objeto y F_ixy en el espacio imagen tales que todo rayo luminoso procedente de F_o emerge paralelo al eje óptico y que todo rayo luminoso incidente paralelo al eje óptico emerge pasando por F_i.
a. Foco objeto: $\alpha_s = 0 \ \forall \ x_e \ \& \ \alpha_e$.

$$\begin{cases} \underline{x}_s = a\underline{x}_e + bn_o\underline{\alpha}_e \\ n_i\underline{\alpha}_s = -V\underline{x}_e + dn_o\underline{\alpha}_e = 0 => \frac{\underline{x}_e}{\underline{\alpha}_e} = \frac{n_o}{V}d = -f_od = -\overline{EF_o} \end{cases}$$

$$\overline{EF_o} = f_od => \overline{H_oF_o} = \overline{H_oE} + \overline{EF_o} = -(d-1)f_o + df_o = f_o => \overline{H_oF_o} = f_o$$

b. Foco imagen: $\alpha_e = 0 \ \forall \ x_s \ \& \ \alpha_s$.

$$\begin{cases} \underline{x}_s = a\underline{x}_e + bn_o\underline{\alpha}_e = a\underline{x}_e \\ n_i\underline{\alpha}_s = -V\underline{x}_e + dn_o\underline{\alpha}_e = -V\underline{x}_e \end{cases} => \frac{\underline{x}_s}{\underline{\alpha}_s} = -\frac{n_i}{V}a = -f_ia = -\overline{SF_i}$$

$$\overline{SF_i} = f_ia => \overline{H_iF_i} = \overline{H_iS} + \overline{SF_i} = -(a-1)f_i + af_i = f_i => \overline{H_iF_i} = f_i$$

4.5. Fórmulas de conjugación y construcciones

Hay dos maneras complementarias de obtener la imagen de un objeto:
a) Manera algébrica;
b) Manera geométrica.

4.5.1. Relación de conjugación homográfica

A partir de los puntos conjugados A_o y A_i, podemos definir $z_o = \overline{EA_o}$ y $z_i = \overline{SA_i}$. Vimos antes que:

$$T_{12}(A) = -(a\frac{z_o}{n_o} - b) + \frac{z_i}{n_i}(V\frac{z_o}{n_o} + d) = 0$$

Lo que permite establecer la relación de conjugación homográfica del sistema centrado:

$$\frac{z_i}{n_i} = \frac{a\frac{z_o}{n_o} - b}{V\frac{z_o}{n_o} + d}$$

Se debe anotar que no hay ninguna asumpción sobre la posición de A_o aquí.

4.5.2. Fórmulas de Descartes; Aumentos; Planos focales

Utilizando dos planos conjugados como planos de entrada y de salida, tenemos: $b = 0$, $a = G_t$ y $d = G_t^{-1}$. Como consecuencia inmediata, tenemos:

$$\frac{z_i}{n_i} = \frac{G_t\frac{z_o}{n_o}}{V\frac{z_o}{n_o} + G_t^{-1}} \quad => \quad -G_t^{-1}\frac{z_i}{n_i} + G_t\frac{z_o}{n_o} = V\frac{z_o z_i}{n_o n_i} \quad => \quad -G_t^{-1}\frac{n_o}{z_o} + G_t\frac{n_i}{z_i} = V$$

En el caso donde los planos de referencias son los planos principales, tenemos $G_t = 1$, $p_o = \overline{H_o A_o}$ y $p_i = \overline{H_i A_i}$ y obtenemos la fórmula clásica de Descartes:

$$\frac{n_i}{p_i} - \frac{n_o}{p_o} = V = \frac{n_i}{f_i} \quad => \quad \frac{f_i}{p_i} + \frac{f_o}{p_o} = 1$$

Cuando los medios extremos son idénticos ($n_i = n_o$), $f_i = -f_o$, la fórmula anterior viene:

$$\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_o} = \frac{1}{f_i}$$

Utilizando los puntos principales H_o y H_i, la matriz de transfer $T(\overline{A_o A_i})$ de un sistema centrado se puede escribir:

$$T(\overline{A_o A_i}) = \Im(\overline{H_i A_i})T(\overline{H_o H_i})\Im(\overline{A_o H_o}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{p_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{p_o}{n_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=> T(\overline{A_o A_i}) = \begin{bmatrix} 1 - V\frac{p_i}{n_i} & 0 \\ -V & 1 + V\frac{p_o}{n_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_t & 0 \\ -V & \frac{n_i}{n_o}G_a \end{bmatrix}$$

Lo que permite deducir los valores de los aumentos transversal y angular:

$$G_t = 1 - V\frac{p_i}{n_i} = 1 - \left(\frac{n_i}{p_i} - \frac{n_o}{p_o}\right)\frac{p_i}{n_i} = \frac{n_o}{n_i}\frac{p_i}{p_o}$$

$$G_a = \frac{n_o}{n_i}\left(1 + V\frac{p_o}{n_o}\right) = \frac{n_o}{n_i}\left(1 + \left(\frac{n_i}{p_i} - \frac{n_o}{p_o}\right)\frac{p_o}{n_o}\right) = \frac{p_o}{p_i}$$

La relación de Lagrange-Helmholtz ($\frac{n_i}{n_o}G_t G_a = 1$) permite verificar este resultado:

$$\frac{n_i}{n_o}G_t G_a = \frac{n_i}{n_o}\frac{n_o}{n_i}\frac{p_i}{p_o}\frac{p_o}{p_i} = 1$$

Por lo que concierne el aumento longitudinal, podemos diferenciar la fórmula de Descartes:

$$\frac{n_o}{p_o^2}dp_o - \frac{n_i}{p_i^2}dp_i = 0 \quad => \quad G_l = \frac{dp_i}{dp_o} = \frac{n_o}{n_i}\left(\frac{p_i}{p_o}\right)^2 = \frac{n_i}{n_o}G_t^2$$

Se definen los planos focale $F_o xy$ y $F_i xy$ de la manera siguiente:

$$\begin{cases} p_o \to -\infty => p_i = \frac{n_i}{V} = f_i \\ p_i \to +\infty => p_o = -\frac{n_o}{V} = f_o \end{cases}$$

Se debe recordar que el foco imagen F_i no es la imagen del foco objeto F_o.

4.5.3. Fórmulas de Newton

Utilizando de nuevo los puntos principales H_o y H_i, la matriz de transfer $T(\overline{F_oF_i})$ entre los dos puntos focales F_o y F_i de un sistema centrado se puede escribir:

$$T(\overline{F_oF_i}) = \Im(\overline{H_iF_i})T(\overline{H_oH_i})\Im(\overline{F_oH_o}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{f_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{f_o}{n_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=> T(\overline{F_oF_i}) = \begin{bmatrix} T_{11}(F) & T_{12}(F) \\ -V & T_{22}(F) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & V^{-1} \\ -V & 0 \end{bmatrix}$$

debido a que $f_i = \frac{n_i}{V}$ y $f_o = -\frac{n_o}{V}$, y entonces:

$$\begin{cases} T_{11}(F) = 1 - V\frac{f_i}{n_i} = 0 \\ T_{12}(F) = -\frac{f_o}{n_o} + \frac{f_i}{n_i}(1 + V\frac{f_o}{n_o}) = -\frac{f_o}{n_o} = V^{-1} \\ T_{22}(F) = 1 + V\frac{f_o}{n_o} = 0 \end{cases}$$

En el caso de un sistema centrado ubicado en el aire, tenemos $n_o = n_i = 1$, $f_i = -f_o$ y:

$$T(\overline{F_oF_i}) = \begin{bmatrix} 0 & f_i \\ -\frac{1}{f_i} & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos fijar: $\sigma_o = \overline{F_oA_o}$ y $\sigma_i = \overline{F_iA_i}$. La relación de conjugación con origen en los puntos focales F_o y F_i se escribe (con $a = 0$, $b = V^{-1}$ y $d = 0$):

$$\frac{\sigma_i}{n_i} = \frac{a\frac{\sigma_o}{n_o} - b}{V\frac{\sigma_o}{n_o} + d} = \frac{-V^{-1}}{V\frac{\sigma_o}{n_o}} = -\frac{1}{V^2\frac{\sigma_o}{n_o}} \quad => \quad \sigma_o\sigma_i = -\frac{n_on_i}{V^2} = f_of_i$$

Esta última fórmula está llamada fórmula de conjugación de Newton: $\sigma_o\sigma_i = f_of_i$.
En el caso de tener $n_o = n_i$, encontramos: $\sigma_o\sigma_i = -f_o^2 = -f_i^2$.
Podemos ahora establecer los diferentes aumentos correspondientes:

$$T(\overline{A_oA_i}) = \Im(\overline{F_iA_i})T(\overline{F_oF_i})\Im(\overline{A_oF_o}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & V^{-1} \\ -V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sigma_o}{n_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=> T(\overline{A_oA_i}) = \begin{bmatrix} -V\frac{\sigma_i}{n_i} & V^{-1} + V\frac{\sigma_o\sigma_i}{n_on_i} \\ -V & 1 + V\frac{\sigma_o}{n_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_t & 0 \\ -V & \frac{n_i}{n_o}G_a \end{bmatrix}$$

Y entonces:

$$\begin{cases} T_{12}(A) = 0 \\ \frac{n_i}{n_o}G_tG_a = 1 \end{cases} => \begin{cases} G_t = -V\frac{\sigma_i}{n_i} = -\frac{\sigma_i}{f_i} = -\frac{f_o}{\sigma_o} \\ G_a = -\frac{n_o}{V\sigma_o} \end{cases}$$

4.5.4. Construcciones geométricas

La determinación de una imagen A_iB_i dada por un sistema centrado de un objeto A_oB_o se puede también hacer a través de una construcción geométrica según la procedura siguiente que utiliza tres rayos luminosos (incidentes y emergentes) peculiares:
a. Rayo luminoso incidente procedente del punto B_o y paralelo al eje óptico => El rayo luminoso emergente pasa por el punto focal imagen F_i.
b. Rayo luminoso incidente procedente del punto B_o y pasando por el punto focal objeto F_o => Este rayo luminoso emerge paralelo al eje óptico.
c. Rayo luminoso incidente procedente del punto B_o y pasando por el punto nodal objeto

N_o => Este rayo luminoso emerge paralelo a sí mismo desde el punto nodal imagen N_i.
Para obtener un resultado correcto, la construcción geométrica debe estar muy bien hecha, con herramientas adecuadas de dibujo.

5. El ojo humano

5.1. Características del ojo humano

La matriz de transfer del ojo humano se define como siendo, en unidades SI:

$$T(\overline{ES}) \approx \begin{bmatrix} 0 & 1,67\,10^{-2} \\ -60 & 0,9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ V = 60\,\delta \\ \overline{H_oH_i} = \overline{N_oN_i} < 1\,mm \\ n_o = 1 \\ n_i = 1,336 \\ f_o = SH_o = -16,7\,mm \\ f_i = 22,3\,mm \end{cases}$$

El límite de resolución del ojo humano es $\varepsilon = 4,8\,10^{-4} rad = 1,5'$.
La visión diurna (conos) es diferente de la visión nocturna (bastoncillos).
Con nuestros dos ojos, tenemos una visión binocular (noción de profundidad)...

5.2. Defectos del ojo humano y sus correcciones

El ojo humano puede tener tres tipos principales de defectos:
a. Ojo miope: Corrección con una lente divergente.
b. Ojo hipermétrope: Corrección con una lente convergente.
c. Astigmatismo del ojo: Es un defecto de simetría del ojo. Es más complicado a corregir.

6. Instrumentos

6.1. Aumentos y ampliación

Cada instrumento óptico (microscopio, telescopio, etc.) está caracterizado por tres tipos de aumentos (transversal G_t, angular G_a y longitudinal G_l) y por su ampliación G:

$$\begin{cases} G_t = \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{A_oB_o}} \\ G_a = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_o}\right)_{x_o=0} \\ G_l = \frac{\Delta z_i}{\Delta z_o} \\ G = \frac{|\alpha_i|}{\theta} \end{cases}$$

El ángulo θ es lo cual se ve el objeto con simple ojo:
a. En el caso del microscopio: $\theta \approx \frac{A_oB_o}{d_m}$ => $G \approx \frac{|\alpha_i|A_oB_o}{d_m}$ (d_m: Punctum Proximum).
b. En el caso del telescopio: $\theta = |\alpha_o|$ => $G = |G_a|$.

6.2. Potencia intrínseca de un instrumento

Por definición, la potencia intrínseca de un instrumento es su vergencia: $P_i = V$:

$$P_i = V = \frac{n_i}{f_i} = \frac{n_i}{\overline{F_oN_o}} = -\frac{n_i\alpha_i}{\overline{A_oB_o}}$$

6.3. Diafragmas, pupilas y lucernas

Conociendo la posición de la imagen de un objeto dada por un instrumento, es importante, en la práctica, de conocer también la cantidad de luz que alcanza al plano imagen, además del tamaño de la parte iluminada de este mismo plano imagen.
Estas grandezas están definidas por los diafragmas cuyo rol es a menudo de realizar la aproximación de Gauss. Lo que limita la cantidad de luz está llamado el *diafragma de apertura* y lo que limita el campo está llamado el *diafragma de campo*.
Sea D un diafragma localizado dentro del instrumento. Si la haz de luz pasa al interior de D, pasa también:
a. Al interior del contorno del conjugado objeto Δ_o que admite D como imagen por el sub-sistema óptico ubicado *antes* de D;
b. Al interior del contorno de la imagen Δ_i que da de D el sub-sistema óptico ubicado *después* de D.

6.3.1. Diafragma de apertura y pupilas

El diafragma de apertura $D.A.$ es el diafragma que define la haz cónica más restringida procedente de A_o y alcanzando a A_i.
Los conjugados objeto $(\Delta_o)_m$ e imagen $(\Delta_i)_m$ correspondientes están respectivamente llamados pupila de entrada P_e y pupila de salida P_s.
La apertura está caracterizada por la apertura númerica $A.N.$ (en el caso del microscopio) y el número de apertura $N.A.$ (en el caso del telescopio o de la cámara fotográfica):

$$\begin{cases} A.N. = n_o sin\alpha_o \\ N.A. = \frac{f}{D} \end{cases}$$

En astronomía y en fotografía, el diafragma de apertura se escribe: $D.A. = f/N.A.$
Por otra parte, el flujo luminoso se define como siendo: $\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ (unidad $W = J.s^{-1}$).

6.3.2. Diafragma de campo y lucernas

El diafragma de campo $D.C.$ es el diafragma que define la haz de rayos principales pasando por el centro M_i de la pupila de salida P_s. Es el diafragma cuyo conjugado objeto L_e está visto del centro de la pupila de entrada según el ángulo más debil.
a. El conjugado objeto Σ_o que da $D.C.$ como imagen por el sub-sistema ubicado *antes* de $D.C.$ está llamado lucerna de entrada L_e.
b. El conjugado imagen Σ_i dado de $D.C.$ por el sub-sistema ubicado *después* de $D.C.$ está llamado lucerna de salida L_s.

6.3.3. Vignetting

Consideramos ahora el punto B_o, definido por el rayo que se apoye en el borde superior de L_e y que pasa por el centro M_o de la pupila de entrada P_e. Consideramos también el punto C_o, definido por el rayo que se apoye en el borde superior de L_e y en el borde inferior de la pupila de entrada P_e.
Los diferentes puntos localizados al interior del círculo de radio A_oB_o emiten rayos luminosos que no están bloqueado por L_e. Este círculo define el campo objeto. No obstante, los puntos localizados más allá que B_o y por debajo del punto C_o emiten haces de luz parcialmente bloqueados por la lucerna de entrada Σ_o (L_e). La zona de penumbra correspondiente en el plano imagen está llamada vignetting.
Se elimina el vignetting haciendo coincidir las lucernas de entrada Σ_o (L_e) y de salida Σ_i (L_s) con los planos objeto e imagen. Como consecuencia, el campo de visión presenta bordes nitidos.

6.4. Resolución teórica

La resolución teórica de un instrumento es el más pequeño detalle detectable del objeto observado, tomando en cuenta el factor limitante de la difracción:

$$\Delta x_o = \frac{\lambda_o}{8\pi n_o sin\alpha_o} = \frac{\lambda_o}{8\pi A.N.} \approx \lambda_o$$

La resolución teórica Δx_o es entonces del orden de magnitud de la longitud de onda λ_o.

7. Lentes

Las lentes están compuestas de dos interfaces esféricas delimitando un medio de índice n (generalmente un cierto vidrio), el conjunto siendo utilizado en el aire o en el vacío.

7.1. Lentes gruesas

7.1.1. Matriz de transfer

Anotando V_1 la vergencia de la interfaz de entrada (de centro E) y V_2 la vergencia de la interfaz de salida (de centro S), y e la distancia ES, la matriz de transfer se escribe:

$$T(\overline{ES}) = \Re(S)\Im(\overline{ES})\Re(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{eV_1}{n} & \frac{e}{n} \\ -V & 1 - \frac{eV_2}{n} \end{bmatrix}$$

con $V_1 = \frac{n-1}{\overline{R_1}}$, $\overline{R_1} = \overline{S_1C_1}$, $V_2 = \frac{1-n}{\overline{R_2}}$, $\overline{R_2} = \overline{S_2C_2}$ y $V = V_1 + V_2 - \frac{eV_1V_2}{n}$.

7.1.2. Elementos cardinales

Los elementos cardinales de una lente gruesa se encuentran de la manera siguiente:
a. fórmula de Gullstrand por la vergencia y distancias focales ($f_i = -f_o = V^{-1}$):

$$V = \frac{1}{f_i} = -\frac{1}{f_o} = V_1 + V_2 - \frac{eV_1V_2}{n} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{R_1}} - \frac{1}{\overline{R_2}} + \frac{n-1}{n}\frac{e}{\overline{R_1R_2}}\right)$$

b. Planos principales y puntos nodales:

$$\overline{EH_o} = f_i(d-1) = \frac{eV_2}{nV} \quad => \quad \overline{SH_i} = f_i(a-1) = -\frac{eV_1}{nV}$$

Los parámetros a y d son elementos (primero y cuarto) de la matriz de transfer $T(\overline{ES})$.
Como los medios extremos son idénticos, N_o y N_i son confundidos con H_o y H_i.
Por otra parte, la determinación de las posiciones de los puntos focales se hace debido al uso de las fórmulas algébricas $\overline{H_oF_o} = f_o$ y $\overline{H_iF_i} = f_i$.

7.1.3. Centro óptico

El centro óptico es el punto de intersección O, con el eje óptico, de un rayo luminoso tal que sus partes incidente y emergente sean paralelas: $\alpha_s = \alpha_e$. Está entonces conectado con los puntos nodales N_o y N_i, N_o siendo su conjugado objeto por la primera interfaz y N_i, su conjugado imagen por la segunda interfaz. Tenemos (con $n_e = n_s = 1$):

$$\begin{bmatrix} x_s \\ n_s\alpha_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{eV_1}{n} & \frac{e}{n} \\ -V & 1 - \frac{eV_2}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ n_e\alpha_e \end{bmatrix}$$

Lo que da: $x_s = (1 - \frac{eV_1}{n})x_e + \frac{e}{n}\alpha_e$. Por otra parte, $\frac{x_e}{\alpha_e} = -\overline{EN_o} = -\frac{eV_2}{nV}$, podemos destacar que la coordenada x_s de J está relacionada con la coordenada x_e de I:

$$\alpha_s = \alpha_e \quad => \quad \frac{x_s}{\overline{OS}} = \frac{x_e}{\overline{OE}} \quad => \quad \frac{\overline{OS}}{\overline{OE}} = \frac{x_s}{x_e} = 1 - \frac{eV_1}{n} + \frac{e}{n}\left(\frac{nV}{-eV_2}\right) = -\frac{V_1}{V_2} = \frac{\overline{R_2}}{\overline{R_1}}$$

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{R_2}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{R_1}} = \frac{\overline{OS} - \overline{OE}}{\overline{R_2} - \overline{R_1}} = \frac{\overline{ES}}{\overline{R_2} - \overline{R_1}} \quad => \quad \overline{EO} = \overline{ES}\left(\frac{\overline{R_1}}{\overline{R_1} - \overline{R_2}}\right)$$

El centro óptico O es siempre ubicado más cercano del lado más curvo. En el caso de tener una interfaz plana, el centro óptico O está ubicado en la superficie de la otra interfaz.

7.2. Diferentes tipos de lentes

Hay seis tipos de lentes, tres convergentes y tres divergentes:
a. Lentes convergentes (más espesas en su centro):
+ Lente biconvexa;
+ Lente plana-convexa;
+ Menisco convergente.
b. Lentes divergentes (menos espesas en su centro):
+ Lente bicóncava;
+ Lente plana-cóncava;
+ Menisco divergente.
Es una propiedad intrínseca que es independiente del sentido de propagación de la luz. Cuando se invierte una lente, se hace una permutación de los planos principales.

7.3. Lupa

Para distinguir los detalles de un objeto, un observador lo ubica a la menor distancia posible, entonces al Punctum Proximum ($d_m = 25\,cm$ con un ojo normal). En esta situación, el ángulo según lo cual se ve la imagen es entonces lo más grande posible.
La lupa es un instrumento de distancia focal corta (algunos centímetros) que permite aumentar el ángulo según lo cual se ve el objeto. Es a menudo compuesta de una sola lente gruesa convergente. El objeto se debe ubica en el foco objeto, lo que permite al ojo normal de recibir una haz cilíndrica de luz, la cual está emergiendo de la segunda interfaz de la lupa. Como $\alpha_i = \frac{A_oB_o}{f_i}$. todo pasa como si se hizo la sustitución de d_m por f_i.
La ampliación de la lupa se escribe, anotando que $\alpha_i = \frac{A_oB_o}{f_i}$ y que $\theta = \frac{A_oB_o}{d_m}$:

$$G = \frac{|\alpha_i|}{\theta} = \frac{d_m}{f_i}$$

Utilizado con un valor convencional de $25\,cm$ por el Punctum Proximum d_m, G está llamado ampliación comercial y está escrito: $5\times$ (en el caso de tener $f_i = 5\,cm$).
Con una lupa, el ojo sirve generalmente de diafragma de apertura y además de pupila de salida. Entonces, la montura de la lupa sirve de diafragma de campo. El campo como tal está definido como el ángulo máximo $|\theta_i|_m$ según lo cual se puede ver la imagen a través de la lente. Este ángulo está relacionado con el radio r de la montura de la lupa y la distancia lupa pupila del ojo OP por la ecuación:

$$tan(|\theta_i|_m) = \frac{r}{OP}$$

Se puede aumentar el campo acercando el ojo de la lupa.

7.4. Lentes delgadas

7.4.1. Definición

Las lentes delgadas son lentes cuyo espesor e es despreciable, de tal manera que la vergencia se reduce a la suma de las vergencias de ambas interfaces:

$$V \approx V_1 + V_2 = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{R_1}} - \frac{1}{\overline{R_2}}\right)$$

Esta definicón supone que el espesor e es despreciable con respecto a $|\overline{R_1}|$, $|\overline{R_2}|$ y $|\overline{R_1} - \overline{R_2}|$.

7.4.2. Propiedades

Como los planos de entrada y de salida son idénticos, los planos principales coinciden con el plano de la lente. Por otra parte, los medios extremos son de mismo índice óptico, y los puntos principales H_o y H_i coinciden con los puntos nodales N_o y N_i. Resulta de todo eso que todos estos puntos están confundidos con el centro óptico O de la lente.
Los puntos focales F_o y F_i sont simétricos con respecto a centro óptico O y ubicados a una distancia $|f_i|$ de este punto. Se puede entonces escribir:

$$f_i = \overline{OF_i} = -\overline{OF_o} = \frac{1}{V} = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{\overline{R_1}} - \frac{1}{\overline{R_2}}\right)} = \frac{\overline{R_1}\overline{R_2}}{(n-1)\left(\overline{R_2} - \overline{R_1}\right)}$$

7.4.3. Construcción geométrica

Por lo que concierne la construcción geométrica de la imagen A_iB_i de un objeto A_oB_o dada por una lente delgada, se debe dibujar los tres rayos luminosos usuales (incidentes y emergentes):
a. Rayo luminoso incidente procedente del punto B_o y paralelo al eje óptico => El rayo luminoso emergente pasa por el punto focal imagen F_i.
b. Rayo luminoso incidente procedente del punto B_o y pasando por el punto focal objeto F_o => Este rayo luminoso emerge paralelo al eje óptico.
c. Rayo luminoso incidente procedente del punto B_o y pasando sin desviación al principio por el centro óptico O y después por el punto B_i.
El principio es lo mismo, que sea una lente convergente o, al contrario, una lente divergente.

7.4.4. Fórmulas de conjugación

Estas fórmulas pueden estar deducidas de las fórmulas generales de los sistemas centrados, pero se puede también encontrarlas a partir de la construcción geométrica. En el caso de la lente delgada convergente, podemos destacar que los tríangulos OHF_i y $A_iB_iF_i$ son homotéticos, como también los tríangulos OKF_o y $A_oB_oF_o$ y los tríangulos OA_oB_o y OA_iB_i. Podemos escribir:

$$\frac{A_iB_i}{OH} = \frac{F_iA_i}{OF_i} \qquad \frac{A_oB_o}{OK} = \frac{F_oA_o}{OF_o} \qquad \frac{A_iB_i}{A_oB_o} = \frac{OA_i}{OA_o}$$

Como en el anterior, tenemos: $p_o = \overline{OA_o}$, $p_i = \overline{OA_i}$, $\sigma_o = \overline{F_oA_o}$ y $\sigma_i = \overline{F_iA_i}$, mientras tanto la construcción geométrica muestra inmediatamente que: $OH = A_oB_o$ y $OK = A_iB_i$. Así:

$$G_t = \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{A_oB_o}} = -\frac{\sigma_i}{f_i} = \frac{f_i}{\sigma_o} = \frac{p_i}{p_o} \qquad G_t < 0$$

Como $\sigma_i = p_i - f_i$, podemos ahora escribir:

$$-\frac{\sigma_i}{f_i} = -\frac{p_i - f_i}{f_i} = \frac{p_i}{p_o} \quad => \quad -\frac{p_i}{p_o} + 1 = \frac{p_i}{f_i} \quad => \quad \frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_o} = \frac{1}{f_i} \qquad G_t = \frac{p_i}{p_o}$$

Lo que nos permite demostrar de nuevo la relación bien conocida de Descartes.
Por otra parte, podemos de nuevo demostrar la relación igualmente conocida de Newton:

$$-\frac{\sigma_i}{f_i} = \frac{f_i}{\sigma_o} \quad => \quad \sigma_o\sigma_i = -f_i^2 \qquad G_t = -\frac{\sigma_i}{f_i}$$

7.4.5. Como conclusión sobre las lentes delgadas

Podemos ahora concluir a propósito de las lentes delgadas:
a. Lente delgada convergente ($f_i > 0$):
+ A_o real ($p_o < 0$) y ubicado adelante de F_o => Imagen real ($p_i > 0$) e invertida.
+ A_o real ($p_o < 0$) y ubicado entre F_o y O => Imagen virtual ($p_i < 0$) y recta.
+ A_o virtual ($p_o > 0$) y ubicado después de O => Imagen real ($p_i > 0$) y recta.
+ Una lente delgada convergente no puede dar una imagen virtual de un objeto virtual.
b. Lente delgada divergente ($f_i < 0$):
+ A_o real ($p_o < 0$) y ubicado adelante de O => Imagen virtual ($p_i < 0$) y recta.
+ A_o virtual ($p_o > 0$) y ubicado entre O y F_o => Imagen real ($p_i > 0$) y recta.
+ A_o virtual ($p_o > 0$) y ubicado después de F_o => Imagen virtual ($p_i < 0$) e invertida.
+ Una lente delgada divergente no puede dar una imagen real de un objeto real.

8. Aberración cromática y acromatismo

8.1. Aberración cromática

8.1.1. Caracterización de la aberración cromática

En el caso de una lente delgada, la vergencia V y la distancia focal f_i se escriben:

$$\frac{1}{f_i} = V \approx V_1 + V_2 = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{R_1}} - \frac{1}{\overline{R_2}}\right)$$

Pero, la experiencia muestra que el índice óptico del vidrio depende de la longitud de onda: $n = n(\lambda)$, lo más generalmente, $n \searrow$ cuando $\lambda \nearrow$. Por ejemplo, podemos tener:

$$n \approx \sqrt{2,3 - 10^{-2}\lambda^2 + \frac{10^{-2}}{\lambda^2}}$$

En esta última ecuación, la longitud de onda está dada en micrómetros (μm).
Los focos imágenes azul. amarillo y rojo están llamados F_b, F_a y F_r. El foco azul está generalmente ubicado más cercano del centro óptico de la lente. La cantidad (generalmente positiva): $F_bF_r = f_r - f_b$ está llamada aberración cromática longitudinal principal.
a. En el plano focal azul (F_b), aparece una mancha azul en su centro y roja alrededor.
b. En el plano focal rojo (F_r), aparece una mancha roja en su centro y azul alrededor.
Este fenómeno caracteriza la aberración cromática transversal principal.

8.1.2. Poder dispersivo de los vidrios

La ecuación dando la distancia focal imagen de una lente delgada se escribe también:

$$(n-1)f_i = \frac{(n-1)}{V} = \frac{\overline{R_1R_2}}{\left(\overline{R_2} - \overline{R_1}\right)}$$

Debemos aquí anotar que la cantidad $(n-1)f_i = \frac{(n-1)}{V}$ es igual a un coeficiente geométrico y es entonces independiente de la longitud de onda λ_0. Toda variación débil $\Delta\lambda_0$ de la longitud de onda implica una variación correspondiente Δf_i de la distancia focal y, como consecuencia, una variación ΔV de la vergencia en conexión con la del índice óptico:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta f_i}{f_i} = \frac{\Delta n}{n-1}$$

Aparece entonces natural de caracterizar la variación relativa de vergencia o de distancia focal con la cantidad sin dimensión $\frac{\Delta n}{n-1}$ calculada por dos longitudes de onda extremas (rojo: $\lambda_C = 656,3\,nm$ y azul: $\lambda_F = 486,1\,nm$) y una longitud de onda media (amarillo: $\lambda_D = 587,56\,nm$). Los índices correspondientes están llamados n_C, n_F y n_D.
El poder dispersivo del vidrio es la cantidad positiva K:

$$K = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

Como K es siempre inferior a 1, se utiliza de manera preferente el número de Abbe A de un vidrio, igualmente llamado la constringencia:

$$A = \frac{1}{K} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

8.1.3. Clasificación de los vidrios

Los especialistas distinguen dos categorías principales de vidrios:
a. Los vidrios livianos, llamados **crown**, de baja dispersión, de índice $n_D < 1,6$ y de constringencia alta: $A > 50$ (generalmente silicatos de potasio y calcio);
b. Los vidrios pesados, llamados **flint**, de mayor dispersión, de índice $n_D > 1,6$ y de constringencia baja: $A < 50$ (generalmente silicatos de potasio y plomo).

8.2. Acromatismo

Debido a la dificultad de remover completamente la aberración cromática, se utilizan sistemas de dos o más lentes para reducirla de manera significativa.

8.2.1. Acromatismo de un sistema de dos lentes delgadas

La matriz de transfer del sistema de dos lentes delgadas se escribe:

$$T(\overline{O_1O_2}) = \Re(O_2)\Im(\overline{O_1O_2})\Re(O_1)$$

$$T(\overline{O_1O_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - eV_1 & e \\ -(V_1 + V_2 - eV_1V_2) & 1 - eV_2 \end{bmatrix}$$

Como el sistema está localizado en el aire, tenemos: $f_1 = \frac{1}{V_1}$ y $f_2 = \frac{1}{V_2}$, y entonces:

$$V = V_1 + V_2 - eV_1V_2 \quad => \quad \frac{1}{f_i} = V = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2}$$

Cuando la longitud de onda λ varía de $\Delta\lambda = \lambda_F - \lambda_C$, se puede estudiar la variación Δf_i de la focal imagen en función de las variaciones Δf_1 y Δf_2:

$$-\frac{\Delta f_i}{f_i^2} = -\frac{\Delta f_1}{f_1^2} - \frac{\Delta f_2}{f_2^2} + \frac{e}{f_1 f_2}\left(\frac{\Delta f_1}{f_1} + \frac{\Delta f_2}{f_2}\right)$$

Como $-\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{\Delta n_1}{n_1-1} = \frac{1}{A_1}$ y $-\frac{\Delta f_2}{f_2} = \frac{\Delta n_2}{n_1-1} = \frac{1}{A_2}$, podemos igualmente escribir:

$$-\frac{\Delta f_i}{f_i^2} = \frac{1}{A_1 f_1} + \frac{1}{A_2 f_2} - \frac{e}{f_1 f_2}\left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right)$$

Resulta de este cálculo que un sistema de dos lentes delgadas es acromático por las dos radiaciones C y F si $\Delta f_i = 0$ y entonces si la condición de acromátismo está realizada:

$$\frac{1}{A_1 f_1} + \frac{1}{A_2 f_2} = \frac{e}{f_1 f_2}\left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right) \quad <=> \quad e = \frac{A_1 f_1 + A_2 f_2}{A_1 + A_2}$$

8.2.2. Acromatismo de dos lentes delgadas acopladas

Como las lentes están acopladas, tenemos: $e = 0$. Entonces:

$$A_1 f_1 + A_2 f_2 = 0 \quad => \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{V_1}{V_2} = -\frac{A_1}{A_2}$$

Debido a que las constringencias son positivas, las dos lentes deben estar de vergencia opuestas, una lente convergente y la otra divergente. Resulta que, como $V = V_1 + V_2$:

$$V_1 = \frac{A_1}{A_1 - A_2} V$$

En el caso de querer un sistema convergente $V > 0$, se debe tener:
a. $V_1 > 0$ si $A_1 > A_2$;
b. $V_1 < 0$ si $A_1 < A_2$;
Así, un sistema convergente de dos lentes delgadas acopladas de tipos crown convergente y flint divergente reduce la aberración cromática, esta condición siendo realizada dentro de los objetivos acromáticos de Alexis Clairaut.

8.2.3 Acromatismo de dos lentes delgadas hechas en el mismo material

En el caso de tener dos lentes delgadas hechas el mismo material, $A_1 = A_2$. La condición de acromatismo viene entonces mucho más simple:

$$e = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Así, podemos reducir la aberración cromática de un sistema compuesto de dos lentes delgadas de misma contringencia ubicandolas a una distancia igual a la mitad de la suma de sus distancias focales. Esta condicón está realizada en el doblete de Huygens.

8.3. Dobletes de lentes delgadas

Los dobletes de lentes delgadas son sistemas centrados constituidos de dos lentes delgadas L_1 y L_2, caracterizados por tres números enteros relativos μ, ν, ρ tales que:

$$\frac{f_1}{\mu} = \frac{e}{\nu} = \frac{f_2}{\rho} = u$$

El parámetro u está llamado unidad de longitud del doblete.

8.3.1. Elementos cardinales

Como ya visto, la matriz de transfer se escribe:

$$T(\overline{O_1 O_2}) = \begin{bmatrix} 1 - eV_1 & e \\ -(V_1 + V_2 - eV_1 V_2) & 1 - eV_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\nu}{\mu} & \nu u \\ -\frac{\mu+\rho-\nu}{\mu\rho u} & 1 - \frac{\nu}{\rho} \end{bmatrix}$$

el cálculo dando: $1 - eV_1 = 1 - \frac{\nu}{\mu}$, $1 - eV_2 = 1 - \frac{\nu}{\rho}$, $e = \nu u$ y $V = \frac{\mu+\rho-\nu}{\mu\rho u}$. Eso implica que:

$$f_i = \frac{\mu\rho u}{\mu + \rho - \nu} \qquad \overline{O_2H_i} = -\frac{\nu\rho u}{\mu + \rho - \nu} \qquad \overline{O_1H_o} = \frac{\nu\mu u}{\mu + \rho - \nu}$$

Como los medios extremos son idénticos, los puntos nodales N_o y N_i están confundidos con los puntos principales correspondientes H_o y H_i.

8.3.2. Ejemplos

Ocular de Ramsden (3, 2, 3)

En este caso, $V_1 = V_2 = \frac{1}{3u}$ y $e = 2u$. La matriz de transfer se escribe:

$$T(\overline{O_1O_2}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2u \\ -\frac{4}{9u} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Podemos entonces deducir inmediatamente los valores de los parámetros asociados:

$$f_i = \frac{9u}{4} \qquad \overline{O_2H_i} = -\frac{3u}{2} \qquad \overline{O_1H_o} = \frac{3u}{2} \qquad \overline{O_2F_i} = \frac{3u}{4} \qquad \overline{O_1F_o} = -\frac{3u}{4}$$

Ocular de Huygens (3, 2, 1)

En este caso, $V_1 = \frac{1}{3u}$, $V_2 = \frac{1}{u}$ y $e = 2u$. La matriz de transfer se escribe:

$$T(\overline{O_1O_2}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2u \\ -\frac{2}{3u} & -1 \end{bmatrix}$$

Podemos entonces deducir inmediatamente los valores de los parámetros asociados:

$$f_i = \frac{3u}{2} \qquad \overline{O_2H_i} = -u \qquad \overline{O_1H_o} = 3u \qquad \overline{O_2F_i} = \frac{u}{2} \qquad \overline{O_1F_o} = \frac{3u}{2}$$

En ambos casos, la construcción geométrica permite verificar estos resultados.
La fórmula de Gullstrand $V = V_1 + V_2 - eV_1V_2$ permite calcular la distancia focal resultante del doblete, mientras tanto las construcciones geométricas del rayo incidente paralelo al eje óptico y del rayo emergente paralelo al eje óptico nos permiten de dterminar los focos imagen F_i y objecto F_o, respectivamente.

8.3.3. Pupila y lucerna de entrada de un doblete de lentes delgadas idénticas

Dos lentes delgadas idénticas L_1 y L_2, de diámetro $2r$, de focal imagen f_i y separadas de una distancia $4f_i$, forman la imagen de un objeto real localizado a una distancia $2f_i$ de L_1. El diafragma de apertura es la montura de L_2, debido a que el conjugado objeto de L_2 con respecto a L_1 es un diafragma de radio $\frac{r}{3}$ ubicado adelante de L_1 a una distancia de $\frac{4f_1}{3}$. Es entonces este último que juega el rol de pupila de entrada P_e. La pupila de salida P_s coincide con el diafragma de apertura y entonces con la montura de L_2.
Se puede deducir de lo anterior que la montura de L_1 sirve de diafragma de campo y también de lucerna de entrada Σ_e, mientras tanto la lucerna de salida Σ_s, imagen de L_1 dada por L_2, está ubicada a una distancia de $\frac{4f_1}{3}$ de L_2. El campo del objeto es entonces igual a r, la mitad del diámetro de las lentes.
Para evitar el vignetting y aumentar el campo, se agrega una tercera lente L_3 idéntica en el medio del segmento O_1O_2. La montura de L_1 ruega ahora el rol de diafragma de apertura, debido a que el conjugado objeto de L_2 con respecto L_3 está ubicado en el mismo plano definido por L_1 y el conjugado objeto de L_3 con respecto a L_1 está ubicado en el plano

objeto. La montura de L_3 ruega ahora el rol de diafragma de campo. Resulta de eso que la lucerna de entrada Σ_e es un círculo de diámetro $2r$ en el plano objeto. Entonces, debido a la presencia de L_3, el diámetro de la pupila de entrada P_e ha aumentado y lo de la lucerna de entrada Σ_e ha sido duplicado. La lente L_3 se llama lente de campo. Además, como la lucerna de entrada Σ_e está ahora ubicada en el plano objeto, el vignetting ha desaparecido.

8.3.4. Método matricial de determinación de la pupila de salida

Estamos considerando el doblete de Ramsden (3, 2, 3) constituido de dos lentes L_1 y L_2 de radio respectivos r_1 y r_2, con $r_2 < r_1$. Podemos aquí estudiar la condición necesaria para tener un diafragma D de radio $r < r_2$, de manera tal que la montura de L_2 sea pupila de salida cuando el objeto está localizado al foco objeto del sistema. Llamando A el centro del diafragma D y $z = \overline{O_1A}$, podemos escribir la matriz de transfer entre F_o y A:

$$T(\overline{F_oA}) = \Im(\overline{O_1A})\Re(O_1)\Im(\overline{F_oO_1})$$

$$T(\overline{F_oA}) = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3u} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3u}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{z}{3u} & \frac{3}{4}(u+z) \\ -\frac{1}{3u} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Como el rayo luminoso sale del punto focal objeto, $x_e = 0$ y $x_s = \frac{3}{4}(u+z)\alpha_e$. Entonces:

$$\alpha_e = \frac{4x_s}{3(u+z)}$$

Por lo que corresponde a las dos lentes L_1 y L_2, y al diafragma D, estamos obteniendo:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \quad => \quad x_s = r_1 \quad => \quad (\alpha_e)_1 = \frac{4r_1}{3u} \\ z_2 = e = 2u \quad => \quad x_s = r_2 \quad => \quad (\alpha_e)_2 = \frac{4r_2}{9u} \\ z_D = z \quad => \quad x_s = r \quad => \quad (\alpha_e)_D = \frac{4r}{3(u+z)} \end{cases}$$

Como $(\alpha_e)_1 > (\alpha_e)_2$, solamente la montura de L_1 y el diafragma D pueden ser diafragma de apertura. Para permitir a L_2 de ser pupila de salida, debemos tener la condición siguiente:

$$(\alpha_e)_2 < (\alpha_e)_D \quad => \quad \frac{4r_2}{9u} < \frac{4r}{3(u+z)} \quad => \quad z < \left(\frac{3r}{r_2} - 1\right)u$$

8.4. Principio de funcionamiento de los oculares

Los oculares básicos (casi ausentes en el mercado a nuestra época, debido a que los constructores hacen oculares con más lentes, hasta ocho o nueve) son dobletes compuestos de dos lentes generalmente planas-convexas. La primera lente define la amplitud del campo y está llamada vidrio de campo. la segunda lente, de menor diámetro, es el vidrio del ojo.

8.4.1. Oculares positivos y negativos

Como las lupas, los oculares trabajan con los objetos ubicados en su plano focal objetos. Podemos entonces determinar la longitud algébrica $\overline{F_oO_1}$:

$$\overline{F_oO_1} = -\overline{O_1F_o} = -\overline{O_1H_o} - \overline{H_oF_o} = -\frac{\nu\mu u}{\mu+\rho-\nu} - f_o = -\frac{\nu\mu u}{\mu+\rho-\nu} + f_i$$

$$=> \quad \overline{F_oO_1} = -\frac{\nu\mu u}{\mu+\rho-\nu} + \frac{\mu\rho u}{\mu+\rho-\nu} = \frac{\mu(\rho-\nu)u}{\mu+\rho-\nu}$$

Como los oculares son convergentes, tenemos entonces dos tipos de dobletes:
a. F_o adelande de O_1 ($\overline{F_oO_1} > 0$): Ocular positivo;

b. F_o detrás de O_1 ($\overline{F_oO_1} < 0$): Ocular negativo.
En la práctica, se utilizan oculares positivos compuestos de dos grupos acromátricos de lentes acopladas, lo que permite, además, de observar un retículo de mira (rayas finas perpendiculares grabadas sobre una placa de vidrio) al mismo timepo que el objeto. En este caso, la imagen del retículo está también corregida de la aberración cromática.
Los oculares nulos (F_o confundido con O_1) presentan el inconveniente mayor de hacerse visibles los granos de polvo y las manchas de grasa localizadas en el lado de entrada de la primera lente. Es entonces preferible evitarlos, en la medida de lo posible.

8.4.2. Ejemplos de oculares

Un cierto número de tipos de oculares está disponible en el mercado:
a. Kelner (muy básico, corrección mediocre, campo aparente débil);
b. Ramsden (básico, corrección mediocre, campo aparente débil));
c. Huygens (básico, corrección mediocre, campo aparente débil));
d. Erfle (mejor corrección, campo aparente amplio);
e. Plössl (mejor corrección, campo aparente mediano);
f. Delos (excelente corrección, campo aparente mediano);
g. Nägler (excelente corrección, campo aparente amplio);
h. Ethos (excelente corrección, campo aparente muy amplio).

9. Aberraciones geométricas de los sistemas centrados

En óptica, las aberraciones geométricas de los sistemas centrados son las desviaciones a la aproximación lineal de Gauss. Se pueden observarlas cuando las condiciones de la aproximación de Gauss no están más realizadas, aún en luz monocromática.

9.1. Clasificación de las aberraciones geométricas

Las desviaciones a la óptica paraxial no son despreciables si la distancia del punto objeto al eje óptico viene grande y tampoco si los ángulos de inclinación de los rayos luminosos incidentes no permanecen paqueños. Como estos ángulos de inclinación están definidos por la pupila de entrada, aparece conveniente de limitar el sistema óptico centrado por el espacio incluido entre las pupilas de entrada y de salida. Los índices n_o y n_i están generalmente iguales a 1, lo que vamos a suponer en los cálculos siguientes.
En el caso de la aproximación lineal de Gauss, tenemos: $x_i = G_t x_o$ y $y_i = G_t y_o$, lo que se escribe: $\underline{x}_i = G_t \underline{x}_o$, introduciendo los números complejos: $\underline{x}_o = x_o + iy_o$ y $\underline{x}_i = x_i + iy_i$.
A fuera de esta aproximación, $\underline{x}_i$ depende no solamente de x_o y y_o, pero también de la inclinación del rayo luminoso incidente, y entonces de los ángulos α_o y β_o que hacen con el eje óptico las proyecciones del rayo incidentes sobre los planos A_oxz y A_oyz.
Está conveniente de sustituir a las variables: x_o, y_o, α_o y β_o las dos variables complejas: $\underline{x}_o$ y $\underline{\alpha}_o$ y sus complejos conjugados correspondientes: $\underline{x}_o^*$ y $\underline{\alpha}_o^*$:

$$\underline{x}_o = x_o + iy_o \qquad \underline{x}_o^* = x_o - iy_o \qquad \underline{\alpha}_o = \alpha_o + i\beta_o \qquad \underline{\alpha}_o^* = \alpha_o - i\beta_o$$

La coordenada compleja $\underline{x}_i$ puede entonces escribirse en la forma de un desarrollo en forma polinomial de grado creciente, el grado lo más bajo representando la aproximación lineal:

$$\underline{x}_i = \sum_{\mu\nu tv} C_{\mu\nu tv} \underline{x}_o^{\mu} \underline{x}_o^{*\nu} \underline{\alpha}_o^{t} \underline{\alpha}_o^{*v}$$

En este desarrollo, los coeficientes $C_{\mu\nu tv}$ son números reales o complejos, mientras tanto los números μ, ν, t y v son enteros positivos o nulos.

Como el sistema centrado presenta una simetría de revolución alrededor del eje óptico, si se cambian $\underline{x}_o$ y $\underline{\alpha}_o$ en $\underline{x}_o exp(i\theta)$ y $\underline{\alpha}_o exp(i\theta)$, lo que implica una rotacón de ángulo θ en el plano objeto, entonces se debe observar la misma rotación en el plano imagen. Entonces:

$$\underline{x}_i exp(i\theta) = \sum_{\mu\nu t v} C_{\mu\nu t v} \underline{x}_o^{\mu} \underline{x}_o^{*\nu} \underline{\alpha}_o^{t} \underline{\alpha}_o^{*v} exp[i\theta(\mu - \nu + t - v)]$$

Viene por identificación: $\mu - \nu + t - v = 1$, lo que se escribe: $\mu + t = \nu + v + 1$. El grado del desarrollo polinomial, $m = \mu + \nu + t + v = 2(\nu + v) + 1$, es entonces impar.
a. Si $m = 1$, $\nu + v = 0$ y $\nu = v = 0$, mientras tanto $\mu + t = 1$.
Podemos entonces deducir que: $\underline{x}_i = C_{1000}\underline{x}_o + C_{0010}\underline{\alpha}_o$. Como los planos objeto e imagen están conjugados, $C_{0010} = 0$ y $C_{1000} = \frac{\underline{x}_i}{\underline{x}_o} = G_t$. Eso es el caso de la aproximación lineal.
b. Si $m = 3$, $\nu + v = 1$, mientras tanto $\mu + t = 2$.

$$\underline{x}_i = G_t\underline{x}_o + C_{0021}\underline{\alpha}_o^2\underline{\alpha}_o^* + C_{1011}\underline{x}_o\underline{\alpha}_o\underline{\alpha}_o^* + C_{0120}\underline{x}_o^*\underline{\alpha}_o^2 + C_{2001}\underline{x}_o^2\underline{\alpha}_o^* + C_{1110}\underline{x}_o\underline{x}_o^*\underline{\alpha}_o + C_{2100}\underline{x}_o^2\underline{x}_o^*$$

La aberración geométrica es la desviación a la aproximación lineal: $\Delta\underline{x}_i = \underline{x}_i - G_t\underline{x}_o$. Así:

$$\Delta\underline{x}_i = C_{0021}\underline{\alpha}_o^2\underline{\alpha}_o^* + C_{1011}\underline{x}_o\underline{\alpha}_o\underline{\alpha}_o^* + C_{0120}\underline{x}_o^*\underline{\alpha}_o^2 + C_{2001}\underline{x}_o^2\underline{\alpha}_o^* + C_{1110}\underline{x}_o\underline{x}_o^*\underline{\alpha}_o + C_{2100}\underline{x}_o^2\underline{x}_o^*$$

Convertiendo los complejos en notaciones polares: $\underline{x}_o = r_o exp(i\theta_o)$ y: $\underline{\alpha}_o = \rho_o exp(i\phi_o)$:

$$\Delta\underline{x}_i = C_{0021}\rho_o^3 exp(i\phi_o) + C_{1011}r_o\rho_o^2 exp(i\theta_o) + C_{0120}r_o\rho_o^2 exp[i(2\phi_o - \theta_o)]$$
$$+C_{2001}r_o^2\rho_o exp[i(2\theta_o - \phi_o)] + C_{1110}r_o^2\rho_o exp(i\phi_o) + C_{2100}r_o^3 exp(i\theta_o)$$

Los seis coeficientes de este desarrollo al orden 3 (C_{0021}, C_{1011}, C_{0120}, C_{2001}, C_{1110}, C_{2100}) están llamados coeficientes de Seidel. Son todos reales, debido a que, cuando $\underline{x}_o$ y $\underline{\alpha}_o$ son reales, $\Delta\underline{x}_i$ también lo es. Los diferentes termas se clasifican en cuatro grupos:
a. La aberración de esfericidad: $C_{0021}\rho_o^3 exp(i\phi_o)$;
b. La aberración de coma: $r_o\rho_o^2(C_{1011}exp(i\theta_o) + C_{0120}exp[i(2\phi_o - \theta_o)])$;
c. El astigmátismo $C_{2001}r_o^2\rho_o exp[i(2\theta_o - \phi_o)]$ y la curvatura de campo: $C_{1110}r_o^2\rho_o exp(i\phi_o)$;
d. La distorsión de la imagen: $C_{2100}r_o^3 exp(i\theta_o)$.

9.2. Aberración esférica

9.2.1. Aberración esférica transversal

Por un punto objeto A_o localizado en el eje óptico, tenemos: $r_o = r_i = 0$. Entonces:

$$(\Delta\underline{x}_i)_s = C_{0021}\rho_o^3 exp(i\phi_o)$$

Anotando $\Delta r_i = |(\Delta\underline{x}_i)_s|$ y designando u_o el valor máximo del módulo de ρ_o, tenemos:

$$\Delta r_i = C_{0021}u_o^3$$

Podemos introducir el coeficiente de aberración esférica C_s, homogéneo a una distancia: $C_{0021} = |G_t|C_s$. Volviendo al espacio objeto, la aberración esférica transversal se escribe:

$$\Delta r_i = A_iB_i^m = |G_t|C_s u_o^3 \quad => \quad \Delta r_o = \frac{\Delta r_i}{|G_t|} = C_s u_o^3$$

9.2.2. Aberración esférica longitudinal

La aberración esférica longitudinal $l = A_i^m A_i$ está relacionada de manera simple con la aberración esférica transversal $\Delta r_i = A_iB_i^m = |G_t|C_s u_o^3$ con la ecuación: $l \approx \frac{\Delta r_i}{u_i}$.

El parámetro u_i es el ángulo de inclinación de los rayos luminosos marginales en el espacio imagen. Como tenemos $\frac{u_i}{u_o} \approx |G_a| = \frac{1}{|G_t|}$, viene: $l \approx C_s G_t^2 u_o^2$.

9.2.3. Reducción de la aberración esférica

La reducción de la aberración esférica es un problema complejo. Una manera de hacerla es de limitar el valor del ángulo máximo de inclinación de los rayos incidentes u_o, pero eso consiste a disminuir la cantidad de luz entrando en el instrumento, con uso de diafragmas. Para evitar este inconveniente, se puede buscar el valor lo más bajo posible del coeficiente C_s. El cálculo técnico de $C_s = C_s(q)$ muestra que la aberración esférica depende del factor de forma $q = \frac{\overline{R_1}+\overline{R_2}}{\overline{R_1}-\overline{R_2}}$, donde $\overline{R_1}$ y $\overline{R_2}$ designan los radios de curvatura de la lente. Este cálculo es complicado, pero la aberración esférica puede estar minimalizada con el uso de una lente tal que la superficie más curva sea utilizada con los rayos menos inclinados.

9.3. Aberración de coma

El terma explicitando la aberración de coma se escribe:

$$(\Delta \underline{x}_i)_c = C_{1011} r_o \rho_o^2 exp(i\theta_o) \left[1 + \frac{C_{0120}}{C_{1011}} exp[2i(\phi_o - \theta_o)]\right]$$

Así, $(\Delta \underline{x}_i)_c$ es la suma de dos números complejos representados en el plano imagen por los vectores $\overrightarrow{B_iC}$ y $\overrightarrow{CM}$. Cuando ϕ_o cambia de valor, el punto M describe el círculo de centro C y de radio $\frac{C_{0120}}{C_{1011}}$. La razón entre el radio de este círculo CM y la distancia B_iC es constante. Por consecuencia, cuando ρ_o^2 cambia de 0 a un valor definido por la pupila de entrada, el círculo se desplaza al interior del cono de cumbre B_i y de ángulo de cumbre 2θ. La figura de aberración de coma se presenta entonces como un cono cuya cumbre es la imagen geométrica B_i y cuyo ángulo de cumbre $2\theta = 60^o$, debido a que $\frac{C_{0120}}{C_{1011}} = 0,5$. Como tiene una apariencia de cometa, está llamada aberración de coma.

9.4. Astigmatismo y curvatura de campo

Las aberraciones llamadas astigmatismo y curvatura de campo aparecen en la suma:

$$(\Delta \underline{x}_i)_{a.c.} = r_o^2 \rho_o \left[C_{2001} exp[i(2\theta_o - \phi_o)] + C_{1110} exp(i\phi_o)\right]$$

Como dependen de r_o^2, ambas aberraciones se manifiestan especialmente cuando el objeto y entonces su imagen están suficiente lejanos del eje óptico.
Podemos estudiar lo que pasa a una distancia Δz de B_i por un rayo luminoso real, victima de estas aberraciones: $\overrightarrow{P^*M} = \overrightarrow{P^*M^*} + \overrightarrow{M^*M} \;\; => \;\; \underline{X} \approx -\frac{x_s}{z_i}\Delta z + (\Delta \underline{x}_i)_{a.c.}$.

9.4.1. Astigmatismo

Como $\frac{x_s}{z_i} \approx \underline{\alpha}_i = G_a \underline{\alpha}_o = \frac{\alpha_o}{G_t} = \frac{\rho_o}{G_t} exp(i\phi_o)$, $\underline{X}$ se escribe, introduciendo $\rho_i = \frac{\rho_o}{G_t}$:

$$\underline{X} = \rho_i \Delta z \, exp(i\phi_o) + \rho_i r_o^2 G_t C_{2001} exp[i(2\theta_o - \phi_o)]$$

Podemos también introducir $\psi = \phi_o - \theta_o$ en la ecuación anterior, lo que nos da:

$$\underline{X} = \rho_i exp(i\theta_o) \left[\Delta z \, exp(i\psi) + r_o^2 G_t C_{2001} exp(-i\psi)\right]$$

$$=> \;\; \underline{X} exp(-i\theta_o) = \rho_i \left[(\Delta z + r_o^2 G_t C_{2001}) cos\psi + i(\Delta z - r_o^2 G_t C_{2001}) sin\psi\right]$$

Como consecuencia, cuando el punto J se desplaza en el plano de la pupila de salida P_s (ρ_i y ψ cambian), el punto M describe un elipse alrededor de P^* de semi-ejes a y b:

$$a = \rho_i|\Delta z + r_o^2 G_t C_{2001}| \qquad b = \rho_i|\Delta z - r_o^2 G_t C_{2001}|$$

En el plano de Gauss ($\Delta z = 0$), es un círculo de radio: $R = r_o^2 G_t C_{2001}$.
Por $\Delta z = -r_o^2 G_t C_{2001}$ y $\Delta z = r_o^2 G_t C_{2001}$, el elipse se reduce a dos segmentos de longitud $2R$. El primero corresponde a una zona de focalización en el plano $B_o zx$ y está llamado focal sagital. El segundo, perpendicular a este, está llamado focal tangencial.

9.4.2. Curvatura de campo

Según lo anterior, la expresión correspondiente de $\underline{X}$ es:

$$\underline{X} = \rho_i \Delta z\, exp(i\phi_o) + \rho_i r_o^2 G_t C_{1110} exp(i\phi_o) = \rho_i(\Delta z + r_o^2 G_t C_{1110}) exp(i\phi_o)$$

La desviación $\underline{X}$ se anula en puntos tales que $\Delta z = -r_o^2 G_t C_{1110}$. La imagen geométrica de un objeto plano es entonces una superficie curva. Según el signo de C_{1110}, la curva muestra al objeto su concavidad ($\Delta z < 0$) o su convexidad ($\Delta z > 0$).

9.5. Distorsión

Esta aberración depende solamente del tamaño del objeto. Se escribe:

$$(\Delta \underline{x}_i)_d = C_{2100} r_o^3 exp(i\theta_o)$$

Cuando el punto B_o describe un cuadrado, su conjugado imagen B_i se desplaza con respecto a la imagen gaussiana del cuadrado de una cantidad proporcional al cubo de su distancia r_o al eje óptico y entonces muestra deformaciones de dos tipos:
a. Si $C_{2100} > 0$, la deformación es más importante en los puntos más lejanos del eje óptico. La imagen de un cuadrado parece un cojín, desde entonces el nombre de cushion por esta aberración (cushion = cojín en inglés);
b. Si $C_{2100} < 0$, la deformación es más importante en los puntos más cercanos del eje óptico. La imagen de un cuadrado parece un barrilete, desde entonces el nombre de barrel por esta aberración (barrel = barrilete en inglés).

10. Asociación de dos sistemas centrados; Microscopio compuesto

Algunos instrumentos, y especialmente el microscopio compuesto, pueden estar representados por dos sistemas centrados bien distinctos que comparten el mismo eje óptico. El primero, más cercano del objeto está llamado **objetivo**. El segundo, el **ocular**, tiene como función de facilitar la observación visual de la imagen dada por el objetivo. Importa entonces de estudiar al principio la asociación de dos sistemas centrados.

10.1. Asociación de dos sistemas centrados

A fin de estudiar la asociación de dos sistemas centrados y de determinar los elementos cardinales del conjunto, estamos evaluando la matriz de transfer entre el plano principal objeto del objetivo ($H_{o,1}$) y el plano principal imagen del ocular ($H_{i,2}$):

$$T(\overline{H_{o,1}H_{i,2}}) = T(\overline{H_{o,2}H_{i,2}})\Im(\overline{H_{i,1}H_{o,2}})T(\overline{H_{o,1}H_{i,1}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\overline{H_{o,1}H_{i,2}}) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{eV_1}{n} & \frac{e}{n} \\ -(V_1 + V_2 - \frac{e}{n}V_1V_2) & 1 - \frac{eV_2}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{eV_1}{n} & \frac{e}{n} \\ -V & 1 - \frac{eV_2}{n} \end{bmatrix}$$

Estamos anotando n_o, n y n_i los índices respecivos de los dominios antes del objetivo, entre el objetivo (sistema 1) y el ocular (sistema 2), y después del ocular. Por otra parte, estamos designando V_1 y V_2 las vergencias del objetivo y del ocular, $e = \overline{H_{i,1}H_{o,2}}$ siendo la distancia óptica.
La relación entre la vergencia total de sistema compuesto y las vergencias del objetivo y del ocular está llamada fórmula de Gullstrand:

$$V = V_1 + V_2 - \frac{e}{n}V_1V_2$$

Introduciendo las distancias focales $f_1 = \frac{n}{V_1}$ y $f_2 = \frac{n_i}{V_2}$ de los sistemas 1 y 2, tenemos:

$$V = \frac{n_i}{f_i} = \frac{n}{f_1} + \frac{n_i}{f_2} - \frac{en_i}{f_1f_2} = \frac{nf_2 + n_if_1 - en_i}{f_1f_2}$$

Podemos introducir el intervalo óptico del sistema total:

$$\Delta = \overline{F_{i,1}F_{o,2}} = \overline{H_{i,1}H_{o,2}} - (\overline{H_{i,1}F_{i,1}} + \overline{F_{o,2}H_{o,2}}) = \overline{H_{i,1}H_{o,2}} - (\overline{H_{i,1}F_{i,1}} - \overline{H_{o,2}F_{o,2}})$$

$$=> \quad \Delta = e - (f_1 - f_{o,2}) = e - (f_1 + \frac{n}{n_i}f_2) = e - \frac{1}{n_i}(n_if_1 + nf_2) = \frac{1}{n_i}\left[n_ie - (n_if_1 + nf_2)\right]$$

Lo que permite escribir la ecuación anterior de la manera siguiente:

$$\frac{n_i}{f_i} = \frac{nf_2 + n_if_1 - en_i}{f_1f_2} = -\frac{n_i\Delta}{f_1f_2} \quad => \quad f_i = -\frac{f_1f_2}{\Delta}$$

Dos sistemas convergentes ($f_1 > 0$ y $f_2 > 0$) dan un sistema compuesto divergente ($f_i < 0$) cuando $\Delta > 0$. El caso afocal $\Delta = 0$ estará estudiado en el capítulo siguiente.

10.2. Microscopio compuesto

Estamos considerando el caso ideal de funcionamiento por el ojo normal, cuando la imagen real dada por el objetivo está ubicada en el plano focal objeto del ocular.

10.2.1. Ampliación y potencia

Con el ojo humano, el objeto A_oB_o está observado directamente según un ángulo θ a una distancia mínima $d_m \approx 25\,cm$, el Punctum Proximum, ya visto en el caso de la lupa. A_1B_1 siendo la imagen dada por el objetivo, la ampliación G del microscopio se escribe:

$$G = \frac{|\alpha_i|}{\theta} = \frac{A_1B_1}{f_2}\frac{d_m}{A_oB_o} = \frac{A_1B_1}{A_oB_o}\frac{d_m}{f_2} = |G_{t,1}|G_2$$

En la ecuación anterior, $|G_{t,1}| = \frac{A_1B_1}{A_oB_o}$ es el valor absoluto del aumento transversal del objetivo, mientras tanto $G_2 = \frac{d_m}{f_2}$ es la ampliación del ocular.
Por otra parte. la potencia intrínseca del microscopio se escribe:

$$P_i = V = \frac{n_i}{f_i} = V_1 + V_2 - \frac{e}{n}V_1V_2$$

Los constructores fijan generalmente $\Delta = 16\,cm$. Si $f_1 = 1\,cm$ y $f_2 = 2,5\,cm$, entonces $G_{t,1} = -16$, $G_2 = 10$, $G = 160$, $e = 19,5\,cm$, $P_i = V = -640\delta$ y $f_i = -1,56\,mm$.
El mircoscopio compuesto es un sistema dióptrico divergente.

10.2.2. Apertura numérica

Como la imagen observada dentro de un microscopio es muy ampliada, la cantidad de luz emitida por cada elemento de superficie y recibida por el ojo est débil. Es entonces indispensable de iluminar el objeto con una fuente de luz adicional, llamada condensador, y de trabajar con una fuerte apertura. La apertura numérica está definidad por la fórmula: $A.N. = n_o sinu_o$, donde u_o es el semi ángulo del cono de luz que entra en el objetivo.
a. El valor de $A.N.$ está limitado por las desvaciones a la aproximación lineal, debido a las aberraciones geométricas. No obstante, $A.N. = 0,8$ es un valor corriente. Para permitir el uso de un microscopio con este valor, ciertos microscopios trabajan con un objetivo sumergido en un liquido de índice de refracción cercano de lo de la lente. Se distingue entonces dos tipos de objetivos: los objetivos sumergidos y los objetivos secos.
b. La apertura numérica es una característica de un microscopio. En cada instrumento, se puede leer cuatro números agrupados dos por dos que respesentan por una parte el aumento transversal y la apertura numérica (ejemplo: $60\times\ 0,8$), y por otra parte el intervalo óptico y el espesor de la lámina cobreobjeto dado en milímetros (ejemplo: $160\times\ 0,17$).

10.2.3. Profundidad de campo

La profundidad de campo es la distancia máxima de dos puntos del eje óptico tal que sus imágenes sean ambas aceptables. Un instrumento no puede distinguir detalles de dimensiones superiores a un límite definido por la difracción:

$$\Delta x_o = \frac{\lambda_o}{8\pi n_o sinu_o} = \frac{\lambda_o}{8\pi A.N.}$$

Las imágenes de dos puntos vecinos del eje óptico A_o y C_o están ambas aceptables si el radio de la mancha centrada en C_o es inferior a Δx_o:

$$A_oC_o tan\, u_o \leq \frac{\lambda_o}{8\pi A.N.} = \frac{\lambda_o}{8\pi n_o sinu_o}$$

Entonces, la profundidad de campo $\Delta z_o = 2(A_oC_o)_{max}$ se escribe:

$$\Delta z_o = \frac{\lambda_o}{4\pi A.N.\, tan\, u_o} = \frac{\lambda_o cosu_o}{4\pi n_o sin^2 u_o} = \frac{\lambda_o\sqrt{n_o^2 - A.N.^2}}{4\pi A.N.^2}$$

Así, cuando la apertura numérica sube, la profundidad de campo disminuye.
Ejemplo: Si $A.N. = 0,65$ y $n_o = 1$, entonces $\Delta z_o = 0,08\,\mu m$. Este ejemplo muestra que la profundidad de campo de un microscopio es muy reducida. Esta propiedad permite reperar la posición de un objeto en el eje óptico con una alta precisión. Permite también de observar partes sucesivas de un objeto, aún si está muy delgado.

11. Sistemas centrados dióptricos afocales; Telescopios refractores

En el caso de los sistemas centrados dióptricos afocales, como $\Delta = 0$, tenemos:

$$V = V_1 + V_2 - \frac{e}{n}V_1V_2 = \frac{n_i}{f_i} = \frac{n}{f_1} + \frac{n_i}{f_2} - \frac{en_i}{f_1f_2} = \frac{nf_2 + n_if_1 - en_i}{f_1f_2} = -\frac{n_i\Delta}{f_1f_2} = 0$$

Las fórmulas establecidas anteriormente teniendo validez solamente por $\Delta \neq 0$, debemos hacer ahora un estudio peculiar de este tipo de instumentos.

11.1. Propiedades de los instrumentos afocales

Como $V = 0$, la matriz de transfer entre E y S se escribe:

$$T(\overline{ES}) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

Si la haz de luz incidente es paralela, la haz emergente es también paralela. De hecho, con la vergencia $V = 0$, el ángulo de inclinación α_s de los rayos emergentes depende solamente del ángulo de inclinación α_e de los rayos incidentes:

$$\alpha_s = d\frac{n_o}{n_i}\alpha_e$$

Podemos determinar la relación entre los planos objeto e imagen escribiendo la matriz de transfer entre dos puntos conjugados objeto A_o e imagen A_i:

$$T(\overline{A_oA_i}) = \Im(\overline{SA_i})T(\overline{ES})\Im(\overline{A_oE}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{z_o}{n_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\overline{A_oA_i}) = \begin{bmatrix} T_{11}(A) & T_{12}(A) \\ 0 & T_{22}(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_t & 0 \\ 0 & \frac{n_i}{n_o}G_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_t & 0 \\ 0 & G_t^{-1} \end{bmatrix}$$

identificando los coeficientes de la matriz de transfer con resultados ya vistos:

$$\begin{cases} T_{11}(A) = a = G_t \\ T_{12}(A) = -a\frac{z_o}{n_o} + d\frac{z_i}{n_i} + b = 0 \\ T_{22}(A) = d = \frac{n_i}{n_o}G_a = G_t^{-1} \end{cases}$$

Y, entonces, tenemos la relación homográfica de conjugación:

$$\frac{z_i}{n_i} = \frac{a\frac{z_o}{n_o} - b}{T_{22}(A)} = \frac{a\frac{z_o}{n_o} - b}{d}$$

Podemos diferenciar la relación de conjugación anterior:

$$G_l = \frac{\Delta z_i}{\Delta z_o} = \frac{n_i a}{n_o d} = \frac{G_t}{G_a} = G_t^2\frac{n_i}{n_o} = \frac{\overline{C_iA_i}}{\overline{C_oA_o}}$$

Anotando C_oC_i los puntos conjugados conocidos y A_oA_i los puntos conjugados buscados.
Diferentes ejemplos de sistemas afocales:
interfaz plana; sucesión de interfaces planas; lámina a lados paralelos.

11.2. Telescopios refractores

Un telescopio refractor sirve a ampliar el ángulo según lo cual está visto un objeto extendido lejano (objetos astronómicos, por ejemplo) y a colectar lo máximo de luz procedente de un objeto puntual. Está compuesto de un sistema óptico convergente de gran distancia focal (entre 500 mm y algunos metros), el objetivo, que da una imagen en el plano focal de un objeto lejano. Este objetivo es la pieza óptica fundamental del instrumento. Está a menudo compuesto de dos (achromat) o tres (apochromat) lentes acopladas. Cuando el observador quiere observar esta imagen, utiliza un ocular, de distancia focal mucho más corta (entre 4 mm y 40 mm, generalmente). Cuando quiere obtener una imagen sobre un suporte cualquiera, pone un detector (película fotográfica, detector CCD, etc.).

11.2.1. Estudio óptico

El plano focal imagen del objetivo coincide con el plano focal objeto del ocular ($\Delta = 0$). Eso significa que la distancia entre objetivo y ocular es: $e = f_1 + f_2$. El aumento transversal vale $G_t = \frac{f_2}{f_1}$. Podemos precisar todo eso escribiendo la matriz de transfer:

$$T(\overline{ES}) = T(\overline{H_{o,2}S})\Im(\overline{H_{i,1}H_{o,2}})T(\overline{EH_{i,1}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\overline{ES}) = \begin{bmatrix} 1 - eV_1 & e \\ -(V_1 + V_2 - eV_1V_2) & 1 - eV_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{f_2}{f_1} & f_1 + f_2 \\ 0 & -\frac{f_1}{f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_t & f_1 + f_2 \\ 0 & G_t^{-1} \end{bmatrix}$$

asumiendo que $n_o = n_i = 1$, $V_1 = \frac{1}{f_1}$, $V_2 = \frac{1}{f_2}$ y $V = V_1 + V_2 - eV_1V_2 = 0 \quad => \quad e = f_1 + f_2$. Como consecuencia, podemos destacar que $\theta = \alpha_o$, que $G_t = -\frac{f_2}{f_1}$ y que:

$$G_a = G_t^{-1} = -\frac{f_1}{f_2} \quad => \quad G = \frac{|\alpha_i|}{\theta} = \frac{|\alpha_i|}{|\alpha_o|} = |G_a| = |G_t^{-1}| = \left|\frac{f_1}{f_2}\right|$$

11.2.2. Círculo ocular

La haz luminosa que entra en el instrumento está definida de manera práctica por la montura del objetivo, la cual sirve de pupila de entrada y de diafragma de apertura. A la salida, la haz de luz está definida por la circunferencia de la pupila de salida que es la imagen de la montura del objetivo dada por el instrumento. Esta imagen está llamada círculo ocular, porque, para observar dentro de las mejores condiciones, se debe posicionar el ojo en su plano. Llamando D el diámetro de la montura del objetivo y a el diámetro del círculo ocular, la ampliación vale: $G = \frac{|\alpha_i|}{\theta} = \frac{|\alpha_i|}{|\alpha_o|} = |G_a| = |G_t^{-1}| = \left|\frac{f_1}{f_2}\right| = \frac{D}{a}$.
Para permitir al ojo de recibir la totalidad de la haz de luz incidente, el diámetro del círculo ocular debe estar inferior o igual a lo de la pupila de ojo del observador.

11.2.3. Resolución angular

Es el diámetro aparente lo más pequeño que se puede resolver.
Sabemos que el límite de resolución definido por la difracción se escribe:

$$\Delta x_o = \frac{\lambda_o}{8\pi n_o sin u_o}$$

Como $sin u_o \approx u_o \approx \frac{D}{2L}$ y $n_o = 1$, tenemos:

$$\Delta x_o \approx \frac{\lambda_o L}{4\pi D} \quad => \quad \Delta\theta = \frac{\Delta x_o}{L} \approx \frac{\lambda_o}{4\pi D} \approx \frac{\lambda_o}{D}$$

Por un telescopio refractor, se utiliza de manera preferente la resolución angular, la distancia L entre el objeto y el objetivo siendo muy grande. No obstante, un cálculo un poco más exacto de la resolución angular $\Delta\theta$ da un valor un poco diferente:

$$\Delta\theta = 1,22\frac{\lambda_o}{D}$$

donde $\Delta\theta$ se mide en radianes, λ_o y D en metros. Hablando en segundos de arco:

$$\Delta\theta = 1,22\left(3600\frac{180}{\pi}\right)\frac{\lambda_o}{D} = 251643\frac{\lambda_o}{D}$$

sabiendo que $1\,rad = 3600\frac{180}{\pi} = 206264,8$”.
Así, por una longitud de onda $\lambda_o = 0,477\,\mu m = 0.477\,10^{-6}\,m$, un telescopio refractor de diámetro $D = 12,5\,cm$ tiene una resolución angular de $\Delta\theta = 4,7\,10^{-6}\,rad = 0,96$”.

11.2.4. Ampliación máxima

La resolución teórica del ojo humano es $\epsilon \approx 1,5' = 4,4\,10^{-4}\,rad$ (mejor caso: $\epsilon \approx 1,0'$).
Por otra parte, ya sabemos que la ampliación se escribe: $G = |G_a| = \frac{|\alpha_i|}{\theta}$.
Como $|\alpha_i| = \epsilon$ y $\theta \geq 1,22\frac{\lambda_o}{D}$, podemos escribir, con D expresado en metros:

$$G \leq G_m = \frac{\epsilon D}{1,22\lambda_o} \approx 756D$$

Sin embargo, este modo de cálculo de la ampliación máxima es muy limitativo, dando un valor bastante bajo. Usando todavía D expresado en metros, se usa generalmente $G_m \approx 2400D$ (un poco exagerado) o $G_m \approx 2000D$ (lo que es más razonable).

11.2.5. Otros parámetros importantes

Por un refractor (o por un telescopio reflector, también), tenemos (utilizando siempre las mismas unidades cuando corresponde, por ejemplo el metro o el milímetro):
a. Razón focal: $F/D = \frac{F_{objectivo}}{D_{objectivo}} = \frac{f_1}{D}$.
b. Ampliación: $G = \frac{|\alpha_i|}{\theta} = \frac{|\alpha_i|}{|\alpha_o|} = |G_a| = |G_t^{-1}| = \left|\frac{f_1}{f_2}\right| = \frac{F_{objectivo}}{f_{ocular}} = \frac{D}{a}$.
c. Ampliación máxima: $G_m \approx 2000D$ (D en metros); $G_m \approx 2,0D$ (D en milímetros).
d. Resolución: $\Delta\theta = 1,22\frac{\lambda_o}{D}$ (en radianes); $\Delta\theta = 251643\frac{\lambda_o}{D}$ (en segundos de arco).
e. Magnitud límite: $m_{limite} = 2,5 + 5\,log_{10}D$ (con D expresado en milímetros).
f. Campo visual: $C_r = \frac{C_a}{G}$ (C_r: Campo real en el cielo; C_a: Campo aparente del ocular).

11.2.6. Tipos de telescopios refractores

Existen algunos tipos de telescopios refractores:
a. Telescopio refractor astronómico (ocular convergente e imagen invertida);
b. Telescopio refractor terrestre (ocular convergente. con sistema rectificador de imagen);
c. Binoculares (con dobles prismas cruzados, llamados de Porro, para rectificar la imagen);
d. Telescopio de Galileo (ocular divergente e imagen recta).

Notas:

a. El sistema rectificador de imagen ocasiona un absopción significativa de la luz recibida y, entonces, no se utiliza en astronomía, donde el máximo de luz colectado es indispensable;
b. El telescopio de Galileo ocasiona aberraciones significativas que vienen de la lente divergente utilizada como ocular. Casi no se utiliza más a nuestra época.

12. Espejos y cavidades ópticas

Como lo vimos antes, las leyes de Snell-Descartes por la reflexión dicen que.
a. El rayo reflejado está ubicado en el plano de incidencia;
b. Ángulos incidente $i_1 = (\vec{N}, \vec{u_1})$ y reflejado $i_2 = (-\vec{N}, \vec{u_2})$ iguales y opuestos: $i_2 = -i_1$.
Por otra parte, un espejo plano es una superficie estigmática por todo punto del espacio. Es entonces un instrumento perfecto de aumento igual a uno. Es a menudo utilizado para cambiar la dirección del eje óptico de un sistema centrado (ejemplo: telescopio newtoniano).

12.1. Espejos esféricos en la aproximación de Gauss

12.1.1. Análisis geométrico

Como, en un sistema comportando un espejo esférico recibiendo normalmente una haz

de luz, hay claramente un cambio de sentido de propagación de la luz, es entonces bastante conveniente de utilizar una orientación del eje óptico según el sentido de propagación de la luz, antes (sentido 1) y después (sentido 2) de la reflexión a la superficie del espejo, lo que implica un cambio de la orientación del eje óptica al momento de esta reflexión.
Un análisis geométrico permite establecer la fórmula de conjugación de estos espejos:
Consideramos un espejo esférico de centro C y de radio $\overline{R}$ que da una imagen A_i de un punto objeto A_o En los triángulos A_oIC y A_iIC, podemos establecer que:

$$|\theta_o| + |\phi| + \pi - |i_1| = \pi \quad => \quad |i_1| = |\theta_o| + |\phi|$$

$$\pi - |\theta_i| + |\phi| + |i_2| = \pi \quad => \quad |i_2| = |\theta_i| - |\phi|$$

Finalmente, el cálculo nos da la relación siguiente:

$$|i_1| = |i_2| \quad => \quad |\theta_o| + |\phi| = |\theta_i| - |\phi| \quad => \quad |\theta_o| - |\theta_i| = -2|\phi|$$

Podemos destacar que $|\theta_o| \approx \frac{HI}{A_oH} \approx \frac{HI}{A_oS} \approx -\frac{HI}{\overline{SA_o}}$, $|\theta_i| \approx \frac{HI}{A_iH} \approx \frac{HI}{A_iS} \approx -\frac{HI}{\overline{SA_i}}$ y $|\phi| \approx \frac{HI}{\overline{R}}$:

$$\frac{HI}{\overline{SA_i}} - \frac{HI}{\overline{SA_o}} = -2\frac{HI}{\overline{R}} \quad => \quad \frac{1}{\overline{SA_i}} - \frac{1}{\overline{SA_o}} = -\frac{2}{\overline{R}}$$

Con $p_o = \overline{SA_o}$, $p_i = \overline{SA_i}$ y $\overline{R} = \overline{SC}$, podemos escribir, algebraicamente:

$$\frac{1}{\overline{SA_i}} - \frac{1}{\overline{SA_o}} = -\frac{2}{\overline{R}} \quad => \quad \frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_o} = -\frac{2}{\overline{R}}$$

12.1.2. Matriz de reflexión

Sabiendo que los índices son iguales: $n_i = n_o$, la relación matricial se escribe:

$$X_+ = \Re_m(S)X_- \quad => \quad \begin{bmatrix} x \\ n\alpha \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} a & b \\ -V & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ n\alpha \end{bmatrix}_e \quad => \quad \begin{cases} x_s = ax_e + bn_o\alpha_e \\ n_i\alpha_s = -Vx_e + dn_o\alpha_e \end{cases}$$

Como $x_s = x_e \; \forall \alpha_e$, debemos tener $a = 1$ y $b = 0$. Además, el determinante $det(\Re_m(S))$ siendo igual a 1, debemos tener $d = 1$, lo que permite escribir:

$$\Re_m(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix}$$

Como consecuencia, la segunda ecuación se escribe: $\alpha_s = -V\frac{x_e}{n_o} + \alpha_e$.
Por otra parte, según las leyes de Snell-Descartes por la reflexión, $\alpha_s = -\alpha_e$. Entonces:

$$2\alpha_e = V\frac{x_e}{n_o}$$

No obstante, la construcción geométrica muestra que $\alpha_e = -\frac{x_e}{\overline{R}}$, lo que da:

$$2\frac{x_e}{\overline{R}} = V\frac{x_e}{n_o} \quad => \quad V = -\frac{2n_o}{\overline{R}} \quad => \quad \Re_m(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n_o}{\overline{R}} & 1 \end{bmatrix}$$

Aquí, $\overline{R} = \overline{SC}$ es el radio del espejo esférico contado positivamente en el sentido de la luz incidente. Se debe anotar que, si $\overline{R} < 0$, entonces $V > 0$ y que, si $\overline{R} > 0$, entonces $V < 0$.
Todo eso permite concluir que:
a. Todo espejo cóncavo es convergente;

b. Todo espejo convexo es divergente.
c. Si el espejo es plano, su radio $\overline{R}$ es infinito y su vergencia V es nula.

12.1.3. Matriz de translación

Asumiendo que el sentido de propagación de la luz da el sentido del eje óptico (con un cambio de sentido al punto de reflexión), podemos escribir las matrices de translación:
a. Matriz de translación antes de la reflexión, sentido incidente (con $a = |\overline{A_1A_2}|$):

$$\Im(A_1A_2) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\overline{A_1A_2}}{n_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{n_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Matriz de translación después de la reflexión, sentido emergente ($a = |\overline{A_2A_1}|$):

$$\Im(A_2A_1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\overline{A_2A_1}}{n_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{n_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las dos matrices de translación (antes y después de la reflexión) son iguales.

12.1.4. Elementos cardinales

a. Distancias focales: Como $V = -\frac{2n_o}{\overline{R}}$, tenemos:

$$f_o = -\frac{n_o}{V} = \frac{\overline{R}}{2} \qquad f_i = \frac{n_i}{V} = \frac{n_o}{V} = -\frac{\overline{R}}{2}$$

b. Puntos focales: $\overline{SF_o} = f_o = \frac{\overline{R}}{2}$ (en el sentido incidente) y $\overline{SF_i} = f_i = -\frac{\overline{R}}{2}$ (en el sentido emergente). F_o y F_i están confundidos con el punto F, medio del segmento SC.
c. Planos principales: Están confundidos con el plano de frente pasando por S:

$$\overline{SH_i} = f_i(a-1) = 0 \qquad \overline{SH_o} = f_o(d-1) = 0$$

d. Puntos nodales: Están confundidos con el centro de curvatura C del espejo.

12.1.5. Relaciones de conjugación

Como ya visto durante el análisis geométrico, la fórmula de Descartes da (con $n_i = n_o$):

$$\frac{n_i}{p_i} - \frac{n_o}{p_o} = V \quad => \quad \frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_o} = -\frac{2}{\overline{R}}$$

Mientras tanto, sabemos que: $G_t = \frac{n_o}{n_i}\frac{p_i}{p_o} = \frac{p_i}{p_o}$.
Por otra parte, la fórmula de Newton nos da: $\sigma_o\sigma_i = f_of_i = -\frac{\overline{R}^2}{4}$. Por consecuencia, objeto e imagen se ubican siempre al mismo lado del punto F, medio del segmento SC.

12.1.6. Construcción geométrica

Como al usual, se construye la imagen A_iB_i de un objeto A_oB_o dada por un espejo esférico, debido a tres rayos luminosos peculiares ya conocidos:
a. Uno, incidente, paralelo al eje óptico y, emergente, pasando por F;
b. Uno, incidente, pasando por F y, emergente, paralelo al eje óptico;
c. El último, sin desviación, pasando por el centro de curvatura C (y entonces por los puntos nodales del sistema, confundidos con el centro de curvatura).
En el caso del espejo convergente:
a. Si el objeto real está ubicado más allá que el punto F, la imagen es real e invertida;
b. Si el objeto real está ubicado entre el punto F y el punto S, la imagen es real y recta.
En el caso del espejo divergente, la imagen de un objeto real es virtual y recta.

12.2. Cavidades ópticas

Una cavidad óptica es un conjunto de dos espejos, uno al frente del otro, que reflectan varias veces la luz. Un ejemplo simple es la cavidad cofocal simétrica, compuesta de dos espejos esféricos cóncavos idénticos tales que sus puntos focales F_1 y F_2 están confundidos en el centro F de la cavidad. Entonces, los centros de curvatura C_1 y C_2 están confundidos con los centros S_2 y S_1. Es fácil de ver que la imagen de un objeto localizado contra uno de los espejos coincide con este después de dos idas y vueltas de la luz dentro de la cavidad.
Podemos establecer la matriz de transfer entre los puntos objeto A_o y A_i imagen por una ida y vuelta, utilizando las notaciones $\overline{S_1A_o} = z_o$ y $\overline{S_1A_i} = z_i$:

$$T(\overline{A_oA_i}) = \Im(\overline{S_2A_i})\Re_m(S_2)\Im(\overline{S_1S_2})\Re_m(S_1)\Im(\overline{A_oS_1})$$

Sin embargo, podemos también escribir: $\Im(\overline{S_2A_i}) = \Im(\overline{S_1A_i})\Im(\overline{S_2S_1})$. Entonces:

$$T(\overline{A_oA_i}) = \Im(\overline{S_1A_i})\Im(\overline{S_2S_1})\Re_m(S_2)\Im(\overline{S_1S_2})\Re_m(S_1)\Im(\overline{A_oS_1}) = \Im(\overline{S_1A_i})T_{ar}\Im(\overline{A_oS_1})$$

$$T_{ar} = \Im(\overline{S_2S_1})\Re_m(S_2)\Im(\overline{S_1S_2})\Re_m(S_1) = \begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=> \;\; T_{ar} = \begin{bmatrix} 1 - eV_1 - e(V_1 + V_2 - eV_1V_2) & e(2 - eV_2) \\ -(V_1 + V_2 - eV_1V_2) & 1 - eV_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - eV_1 - eV & e(2 - eV_2) \\ -V & 1 - eV_2 \end{bmatrix}$$

En el caso de una cavidad cofocal simétrica, tenemos $\overline{R_1} = \overline{R_2} = -e$, $V_1 = V_2 = \frac{2}{e}$ y $V = V_1 + V_2 - eV_1V_2 = 0$, lo que implica que:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\; => \;\; T_{ar} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

Con un número par de reflexión sobre cada espejo, se encuentra bien la coincidencia del objeto con la imagen. Se puede deducir de eso que, en este caso:

$$T(\overline{A_oA_i}) = \begin{bmatrix} 1 & z_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T_{ar} \begin{bmatrix} 1 & -z_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -(z_i - z_o) \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & z_i - z_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como los puntos A_o y A_i están conjugados, tenemos $z_o = z_i$: Entonces, los puntos A_o y A_i están ubicados en el mismo lugar, y la imagen está confundida con el objeto.

13. Telescopios reflectores; Sistemas catadióptricos

13.1. Descripción

Es un instrumento similar al telescopio refractor, pero con un objetivo compuesto de un espejo cóncavo M_p, llamado espejo primario. El punto focal F_p de M_p está llamado foco primario. Este espejo primario está a menudo asociado a un espejo segundario M_s que puede estar plano, convexo o cóncavo (este último caso no es común).
El telescopio de Newton (o newtoniano) tiene un espejo segundario plano de forma elíptica, ubicado a una distancia adecuada antes de F_p según un ángulo de 45^o, de manera tal que el punto focal Newton F_N sea ubicado a 90^o del eje óptico, con $S_sF_p = S_sF_N$, mientras tanto el telescopio de Cassegrain tiene un espejo convexo (centro: S_s) que envia la luz en la dirección incidente, según una haz de luz más cerrada (más alargada) hasta el punto focal Cassegrain F_C, cruzando el espejo primario en un hoyo circular hecho en su centro.

Con respecto a los refractores, los telescopios reflectores presentan un doble interés:
a. No tienen aberraciones cromáticas, la luz siendo reflejada, sin entrar dentro del vidrio;
b. Apertura: El diámetro puede estar mucho más grande (espejo más fácil a realizar).
La superficie del espejo primario es generalmente de forma paraboloidal de revolución alrededor del eje óptico. De hecho, vimos anteriormente que una superficie paraboloidal del objetivo da una imagen estigmática, con una aberración de esferícidad despreciable.
No obstante, una tal superficie paraboloidal presenta una importante aberración de coma, lo que se puede corregir de varias maneras, que sea con un doblete corrector de coma (por ejemplo, el Paracorr de Televue), con una superficie de espejo primario un poco diferente del paraboloide de revolución, con un espejo segundario capaz de corregir este defecto (telescopio de Ritchey), o con un espejo primario esférico asociado con una lámina correctora de forma compleja instalada en su centro de curvatura C, lo que sirve a corregir ambas aberraciones de esferícidad y de coma (telescopio con lámina de Schmidt).

13.2. Monturas

La mayoría de los telescopios están instalados sobre una montura ecuatorial, la cual tiene dos ejes perpendiculares, el eje de ascensión recta (eje polar o eje α) y el eje de declinación (eje δ), la cual permite seguir del movimiento de casi todos los astros con un motor ubicado en el eje α (este motor sirve también para centrar los objetos en el campo del ocular, o para mover de un objeto a un otro), después de una aleinación correcta del eje polar. El motor de declinación no sirve más que para centrar los objetos en el campo del ocular, o para mover de un objeto a un otro. La montura como tal está sostenida por una estructura (columna, tripode, horquilla, cuna. etc.). Además, una montura de telescopio tiene lo más generalmente un sistema anexo que sirve a poder arreglar el eje polar, con dos movimientos perpendiculares, uno en acimut y uno en altura.

13.3. Puntos focales primario y segundario

El punto focal primario F_p está ubicado en el medio del segmento S_pC_p (S_p: centro del espejo primario M_p; C_p: centro de curvatura de M_p), mientras tanto el punto focal segundario es la imagen del punto focal F_p dada por el espejo segundario M_s. Considerando el sistema de Cassegrain, se puede obtener la posición de F_s con la relación siguiente:

$$\frac{1}{\overline{\overline{S_sF_s}}} - \frac{1}{\overline{\overline{S_sF_p}}} = V_s$$

13.4. Matriz de transfer del objetivo del telescopio de Cassegrain

La matriz de transfer del objetivo del telescopio de Cassegrain se escribe:

$$T(\overline{S_pS_s}) = \Re_m(S_s)\Im(\overline{S_pS_s})\Re_m(S_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_p & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\overline{S_pS_s}) = \begin{bmatrix} 1 - e_1V_p & e_1 \\ -(V_s + V_p - e_1V_sV_p) & 1 - e_1V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e_1V_p & e_1 \\ -V_1 & 1 - e_1V_s \end{bmatrix}$$

con: V_p: vergencia del espejo primario M_p; V_s: vergencia del espejo segundario M_s; e_1: distancia entre los dos espejos; $V_1 = V_s + V_p - e_1V_sV_p$: vergencia del objetivo $p + s$.

13.5. Funcionamiento del telescopio reflector

13.5.1. Observación con un ocular

En el caso de una observacón hecha con un ocular, el sistema es afocal, como el telescopio refractor ya estudiado. Los mismos resultados se aplican, y especialmente una haz de luz incidente cilíndrica emerge cilíndrica. Anotando E el punto principal objeto del objetivo, S el punto principal imagen del ocular, y e la distancia óptica, tenemos:

$$T(\overline{ES}) = \begin{bmatrix} 1-eV_1 & e \\ -(V_1+V_2-eV_1V_2) & 1-eV_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-eV_1 & e \\ 0 & 1-eV_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{f_2}{f_1} & f_1+f_2 \\ 0 & -\frac{f_1}{f_2} \end{bmatrix}$$

debido a que $V = V_1 + V_2 - eV_1V_2 = 0$ por un sistema centrado afocal.
Por lo que corresponde a las características del telescopio reflector, como son las mismas que en el caso del telescopio refractor, el lector se reportará a este caso.

13.5.2. Caso del telescopio de Newton

En este caso, el eje óptico no es lineal, como ya explicado. El espejo plano segundario está inclinado de un ángulo de 45^o sobre el eje óptico, lo que envía la haz de luz procedente del espejo primario en una dirección perpendicular al eje óptico.
Orientando cada parte del sistema según el sentido de propagación de la luz y utilizando propiedades matriciales ya demostradas, la matriz de transfer se escribe:

$$T(\overline{S_pS_s}) = \Re_m(S_s)\Im(\overline{S_pS_s})\Re_m(S_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_e & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-e_1V_e & e_1 \\ -V_e & 1 \end{bmatrix}$$

Como el espejo segundario es plano, su matriz de reflexión se identifica a la unidad.

13.6. Sistemas catadióptricos

Un sistema catadióptrico está compuesto de un sistema centrado conteniendo un espejo, que impone a la luz incidente de cruzar de nuevo el sistema en el sentido contrario.

13.6.1. Funcionamiento de los sistemas catadióptricos

Podemos adoptar como planos de entrada (centro E) y de salida S dos planos confundidos. La matriz de transfer puede entonces escribirse como producto de tres matrices:

$$T(\overline{ES}) = T(\overline{MS})\Re_m(M)T(\overline{EM})$$

donde $T(\overline{EMS})$ y $T(\overline{MS})$ son las matrices de transfer del mismo sistema dióptrico a la ida y a la vuelta. Estas matrices están conectadas. De hecho, la vergencia es la misma, debido a que las matrices de translación son las mismas y que las vergencias de las interfaces cruzadas son las mismas. Por otra parte, los elementos a y d están permutados, debido a que los planos principales y los puntos focales lo están, también. Finalmente, como el determinante de estas matrices vale 1, el último elemento b no cambia. Podemos escribir:

$$T(\overline{EM}) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -v_1 & d_1 \end{bmatrix} \qquad T(\overline{ES}) = \begin{bmatrix} d_1 & b_1 \\ -v_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

Podemos entonces deducir el valor de la matriz $T(\overline{ES})$ a partir de estos resultados:

$$T(\overline{ES}) = \begin{bmatrix} d_1 & b_1 \\ -v_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -v_m & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -v_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & b_1 \\ -v_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -v_ma_1-v_1 & -v_mb_1+d_1 \end{bmatrix}$$

$$T(\overline{ES}) = \begin{bmatrix} a_1d_1 - b_1v_1 - v_m a_1 b_1 & 2b_1d_1 + v_m b_1^2 \\ -(2a_1v_1 + v_m a_1^2) & a_1d_1 - b_1v_1 - v_m a_1 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -V & a \end{bmatrix}$$

con $a = a_1d_1 - b_1v_1 - v_m a_1 b_1$, $b = 2b_1d_1 + v_m b_1^2$ y $V = 2a_1v_1 + v_m a_1^2$.
Como al usual, los elementos cardinales se obtienen a partir de la matriz de transfer:

$$f_o = -\frac{n_o}{V} = -\frac{1}{V} \qquad f_i = \frac{n_i}{V} = \frac{1}{V}$$

$$\overline{EH_o} = f_o(a-1) \qquad \overline{SH_i} = f_i(a-1) = -\overline{EH_o}$$

Debido a la convención de orientación adoptada, H_o y H_i están confundidos en el mismo punto H. Por otra parte, como $\overline{H_oF_o} = -\frac{1}{V}$ y $\overline{H_iF_i} = \frac{1}{V}$, los puntos focales F_o y F_i están también confundidos en el mismo punto F.

13.6.2. Autocolimación

Es una técnica simple que permite medir la distancia focal de una lente delgada convergente L. debido al uso de un espejo plano ubicado después de la lente. Se busca la posición del sistema lente-espejo plano por la cual los planos objeto e imagen coinciden, lo que es realizado cuando estos planos están ubicados en el plano focal objeto de L. El conjugado imagen del objeto A_oB_o está entonces ubicado en el infinito. El espejo plano da también una imagen en el infinito, cuyo conjugado A_iB_i relativamente a L después de la reflexión está finalmente en el plano focal objeto de L.

$$T(\overline{O_-O_+}) = T(\overline{MO})\Re_m(M)T(\overline{OM}) = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_i} & 1-\frac{d}{f_i} \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} 1-\frac{d}{f_i} & d \\ -\frac{1}{f_i} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{2d}{f_i} & 2d \\ -\frac{2(1-\frac{d}{f_i})}{f_i} & 1-\frac{2d}{f_i} \end{bmatrix}$$

donde d es la distancia entre la lente y el espejo plano.
Resulta de eso que el espejo equivalente es un espejo cóncavo de centro H, cuya posición está: $\overline{OH} = -\frac{d}{(1-\frac{d}{f_i})}$, y de centro de curvatura N tal que: $\overline{HN} = 2\overline{HF} = \frac{f_i}{(1-\frac{d}{f_i})}$. Además, los dos puntos nodales son confundidos en el punto N, mientras tanto el objeto y la imagen, simétricas, se ubican en el mismo plano. Podemos establecer el valor de $\overline{ON}$:

$$\overline{ON} = \overline{OH} + \overline{HN} = -\frac{d}{(1-\frac{d}{f_i})} + \frac{f_i}{(1-\frac{d}{f_i})} = \frac{f_i - d}{(1-\frac{d}{f_i})} = f_i$$

Lo más generalmente, el espejo plano está localizado justo después de la lente.

14. Fotometría

La fotometría es el estudio energético de la radiación luminosa, lo más generalmente con un detector (cámara fotográfica, captor CCD, etc.). Cuando el detector es el ojo humano, la fotometría está definida como visual, utilizando unidades especiales. Por otra parte, en todo lo que sigue, se estudiarán las propiedades fotométricas con una luz moncromática.

14.1. Grandezas fotométricas

14.1.1. Flujo luminoso emitido por una fuente

La energía luminosa emitida por una fuente y recibida por un receptor crece propocionalmente al tiempo. Como consecuencia, se introduce el flujo luminoso Φ igual a la potencia irradiada por la fuente luminosa en todas las direcciones del espacio. El lujo luminoso elemental emitido por una fuente de superficie elemental dS ubicada en el punto A en un ángulo sólido elemental $d\Omega$ alrededor de la dirección AA', la cual hace un ángulo θ con la normal $\vec{n}$ a dS se escribe de la manera siguiente:

$$\delta^2\Phi = Lcos\theta dS d\Omega$$

En esta ecuación, el coeficiente L, llamado luminancia, depende débilmente del ángulo θ. Cuando la luminancia es independiente de θ, se dice que la fuente sigue la ley de Lambert.
Unidades SI: Φ se mide en watts (W); L se mide en $Wm^{-2}sr^{-1}$.
Unidades de fotometría visual: Φ se mide en lumens lm; L se mide en $lm\,m^{-2}sr^{-1}$.
Por la radiación luminosa $\lambda = 555\,nm$, correspondiente al máximo de sensibilidad del ojo humano en visión diurna, un lumen vale: $1\,lm = \frac{1}{683}\,W \approx 1,46\,10^{-3}\,W$.

14.1.2. Intensidad luminosa de una fuente

La intensidad luminosa de una fuente es el flujo irradiado por unidad de ángulo sólido:

$$I = \frac{\delta\Phi}{d\Omega} = \int Lcos\theta dS$$

Unidad SI: Wsr^{-1}. Unidad de fotometría visual: $lm\,sr^{-1}$ o candela (cd). La candela es una unidad de base del sistema internacional SI y su definición es: La candela es la intensidad luminosa en una dirección dada de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $540\,10^{12}\,Hz$ y cuya intensidad energética en esta dirección sea $\frac{1}{683}\,Wsr^{-1}$.
Si la fuente sigue la ley de Lambert, podemos escribir:

$$I = \frac{\delta\Phi}{d\Omega} = cos\theta \int LdS = I_0 cos\theta \qquad I_0 = \int LdS$$

En el caso general, la curva $I = I(\theta)$ dando la intensidad luminosa I en función del ángulo θ está llamada indicadora de la fuente. Si la ley de Lambert está respectada, la indicadora es un círculo de diámetro I_0 tangente a la fuente.

14.1.3. Iluminancia de una fuente

La iluminancia M de una fuente es el flujo irradiado por unidad de superficie:

$$M = \frac{\delta\Phi}{dS} = \int Lcos\theta d\Omega$$

Unidad SI: Wm^{-2}. Unidad de fotometría visual: $lm\,m^{-2}$ o lux (lx).
Cuando la fuente sigue la ley de Lambert, la relación entre M y L es muy fácil a establecer:

$$M = \frac{\delta\Phi}{dS} = L\int cos\theta d\Omega = L\int cos\theta(2\pi sin\theta)d\theta = 2\pi L\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta sin\theta d\theta = 2\pi L\left[\frac{sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi L$$

14.1.4. Iluminación o irradiancia

Anotando dS' un elemento de superficie de un receptor, localizado en el punto A' y apoyado sobre el contorno de la haz cónica de ángulo sólido $d\Omega$ procedente de A. Este elemento dS' recibe el flujo $\delta^2\Phi$ emitido por la superficie dS. La distancia entre la fuente dS y el receptor dS' vale $r = AA'$. dS' está conectado con $d\Omega$ por la relación siguiente:

$$d\Omega = \frac{dS' cos\theta'}{r^2}$$

La iluminación (o irradiancia) del elemento dS' por la fuente dS está definida por la razón:

$$\frac{\delta^2\Phi}{dS'} = L\frac{dS cos\theta cos\theta'}{r^2}$$

Entonces, se puede escribir la iluminación total del receptor por el elemento dS de la fuente:

$$E = \int L \frac{cos\theta cos\theta'}{r^2} dS$$

Como en el caso de la iluminancia de una fuente, la iluminación de un receptor se mide en Wm^{-2} (Unidad SI) o en $lm\,m^{-2}$ o lux (lx) en fotometría visual.
Cuando la fuente es de dimensión débil, r y θ' son débilmente variables y tenemos:

$$E = \frac{cos\theta'}{r^2} \int Lcos\theta dS = \frac{Icos\theta'}{r^2}$$

Si la superficie iluminada está normal a los rayos incidentes, entonces $\theta' = 0$ y $E = \frac{I}{r^2}$.

14.1.5. Extensión de una haz de luz

La extensión de una haz de luz es el coeficiente gemétrico, homogéneo a una superficie, por lo cual se debe multiplicar la luminancia de la fuente para obtener el flujo:

$$\delta^2\Phi = L \frac{dSdS'cos\theta cos\theta'}{r^2} = L\delta^2 U$$

El coeficiente $\delta^2 U$ es la extensión elemental:

$$\delta^2 U = \frac{dSdS'cos\theta cos\theta'}{r^2} = \frac{d\Sigma d\Sigma'}{r^2}$$

anotando $d\Sigma = dScos\theta$ y $d\Sigma' = dS'cos\theta'$ las superficies elementales normales.
Dentro de estas últimas expresiones de la extensión, conviene de destacar aquí la simetría (la similitud) de los roles de la fuente en A y del receptor en A'.

14.1.6. Atenuación del flujo luminoso

Al cruzar un medio material transparente, la energía luminosa está, por una parte, absorbida (en forma de agitación térmica, de excitación de niveles atómicas, etc.) y, por otra parte, diluida (por efecto Compton, etc.), lo que ocasiona una pérdida de una parte de la energía emitida. Considerando una haz de luz paralela cruzando un medio material, el análisis experimental muestra que la variación de flujo $d\Phi$ se escribe:

$$d\Phi = -\mu\Phi dz \quad => \quad \Phi = \Phi_0 exp(-\mu z)$$

La última ecuación está llamada ley de Beer, donde el coeficiente de atenuación lineico μ (homogéneo al inverso de una longitud) es una constante dependiende de la naturaleza del medio transparente, mientras tanto z caracteriza la posición alcanzada en el eje de propagación. En el caso de la atmósfera, la proporción del flujo transmitido es menor en el caso del violeta que en el caso del amarillo: $\mu_a \approx 10^{-5}\,m^{-1}$ y $\mu_v \approx 4\,10^{-5}\,m^{-1}$. Resulta de eso que las radiaciones violetas y ultravioletas cruzan la atmósfera con dificultad.

14.2. Conservación de la extensión y de la luminancia

14.2.1. Extensión de una haz de luz entrando en un sistema centrado

Consideramos una haz de luz apoyado sobre el contorno de la superficie elemental ΔS_o del objeto y sobre la pupila de entrada P_e del sistema centrado considerado. Como la superficie de la pupila de entrada no es elemental, tenemos en el espacio objeto:

$$U_o = \Delta S_o \int cos\theta_o d\Omega_o = \Delta S_o \int cos\theta_o (2\pi sin\theta_o) d\theta_o = 2\pi\Delta S_o \left[\frac{sin^2\theta_o}{2}\right]_0^{u_o} = \pi\Delta S_o sin^2 u_o$$

donde u_o es el ángulo de inclinación máxima de los rayos incidentes.
De la misma manera, tenemos en el espacio imagen: $U_i = \pi \Delta S_i sin^2 u_i$.

14.2.2. Conservación de la extensión óptica

Si el instrumento respecta la condición de aplanetismo de Abbe, tenemos:

$$n_o \overline{A_o B_o} sinu_o = n_i \overline{A_i B_i} sinu_i$$

Como las superficies son proporcionales al cuadrado de los segmentos, podemos escribir:

$$\frac{\Delta S_i}{\Delta S_o} = \left(\frac{A_i B_i}{A_o B_o}\right)^2 = \left(\frac{n_o sinu_o}{n_i sinu_i}\right)^2 \quad => \quad n_o^2 \Delta S_o sin^2 u_o = n_i^2 \Delta S_i sin^2 u_i \quad => \quad n_o^2 U_o = n_i^2 U_i$$

Entonces, $n^2 U$, llamada extensión óptica, se conserva. Cuando los medios extremos son idénticos, la extensión geométrica se conserva, también: $U_o = U_i$.

14.2.3. Conservación de la luminancia

Anotando τ el factor de transmisión energética del instrumento, entre el plano objeto y el plano imagen, viene: $\delta \Phi_i = \tau \delta \Phi_o$ y entonces: $L_i \delta U_i = \tau L_o \delta U_o$. Finalmente:

$$\frac{L_i}{n_i^2} = \tau \frac{L_o}{n_o^2}$$

14.3. Aplicación al telescopio

14.3.1. Flujo luminoso colectado por un telescopio

Consideramos un telescopio simple compuesto de un objetivo y de un ocular, sistema afocal, del punto de la fotometría energética. Introduciendo τ, coeficiente de transmisión energética del sistema óptico, típicamente de un valor alrededor de $0,7$, podemos escribir la relación entre el flujo incidente Φ_o y el flujo emergente Φ_i:

$$\Phi_i = \tau \Phi_o$$

No obstante, los flujos Φ_o, Φ_i y Φ_s (Φ_s: flujo recibido por el ojo humano en la ausencia del instrumento) se pueden escribir de la manera siguiente:

$$\Phi_o = E_o \frac{\pi D^2}{4} \qquad \Phi_i = \tau \Phi_o = \tau E_o \frac{\pi D^2}{4} \qquad \Phi_s = E_o \frac{\pi a^2}{4}$$

Como $G = \frac{D}{a}$ (a: diámetro de la pupila de salida), podemos entonces escribir:

$$\frac{\Phi_i}{\Phi_s} = \tau \frac{D^2}{a^2} = \tau G^2$$

Como consecuencia, los telescopios son claramente colectores de luz.

14.3.2. Magnitud

Por definición, la magnitud aparente m de un objeto celeste (estrellas, planetas, etc.) está relacionada con la iluminación E según la fórmula de Pogson:

$$m = -2,5 log_{10} E + Cste$$

Entre dos estrellas 1 y 2, podemos establecer la diferencia de magnitud:

$$m_1 - m_2 = -2,5 log_{10} \frac{E_1}{E_2} = 2,5 log_{10} \frac{E_2}{E_1}$$

Entonces, la razón de las extensiones se escribe de la manera siguiente:

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{0,4(m_1-m_2)} = 100^{(m_1-m_2)/5}$$

Podemos ahora introducir la noción de magnitud absoluta M:

$$100^{(m-M)/5} = \frac{E_{10pc}}{E} = \left(\frac{d}{10pc}\right)^2 \quad <=> \quad m - M = 5log_{10}d - 5$$

la iluminación E siendo proporcional al inverso del cuadrado de la distancia (d^{-2}) entre la fuente (estrellas, planetas) y el receptor (ojo humano, película fotográfica, captor CCD). Por otra parte, se utiliza el parsec (pc) como unidad de distancia en astronomía:

$$1\,pc = 3600\frac{180}{\pi} = 206.264,8\,UA = 3,0856\,10^{13}\,km = 3,2615\,años - luz$$

Entonces, una distancia de $10\,pc$ vale: $3,0856\,10^{14}\,km$.

14.4. Fuentes de radiación luminosa

14.4.1. Diferentes fuentes de radiación luminosa

Podemos distinguir entre fuentes naturales de luz (Sol, estrellas, etc.) y fuentes artificiales (ampolleta incandescente, ampolleta a descarga en un gas a baja presión, ampolleta a descarga en un gas a alta presión, laser).

14.4.2. Ampolleta incandescente; Cuerpo negro

Las ampolletas incandescentes están compuestas de un filamento metálico (a menudo un filamento de volframio) elevado a una temperatura cercana de $2500\,K$. La radiación emitida por una tal ampolleta es policromática (espectro continuo) y puede estar comparada a la radiación emitida por un cuerpo emisor ideal por lo cual la luminancia está máxima y depende solamente de su temperatura. Un tal cuerpo emisor perfecto es también llamado radiador perfecto (puede absorber y emitir perfectamente).
El análisis del cuerpo negro muestra que su luminancia energética espectral $L^0_{\Omega,\nu}$ (y entonces su flujo luminoso $\delta^2\Phi = L^0_{\Omega,\nu} dSd\Omega d\nu$) se puede escribir de la forma siguiente:

$$L^0_{\Omega,\nu} dSd\Omega d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{exp(h\nu/kT)-1}dSd\Omega d\nu$$

Esta relación puede estar transformada en función de la longitud de onda λ:

$$L^0_{\Omega,\lambda} dSd\Omega d\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{exp(hc/\lambda kT)-1}dSd\Omega d\lambda$$

Velocidad de la luz: $c = 299.792.458\,m\,s^{-1}$.
Constante de Planck: $h = 6,6260755\,10^{-34}J\,s$.
Constante de Boltzmann $k = 1,380658\,10^{-23}J\,K^{-1}$.

14.4.3. Ampolleta a descarga

Dentro de estas ampolletas, el proceso de emisión de luz consiste en una descarga eléctrica entre dos electrodos lo que ioniza el gas presente, lo que induce una emisión de luz cuya naturaleza depende del gas utilizado y de su presión dentro de la ampolleta.
a. Ampolletas baja presión: El espectro de emisión está constituido de líneas de emisión

momocromáticas encima de un continuo espectral débil o casi ausente.
b. Ampolletas alta presión: El espectro de emisión está constituido de líneas de emisión momocromáticas encima de un continuo espectral altamente en emisión.

14.5. Detectores

Durante muchos tiempos, el único detector utilizado en óptica era el ojo humano, en el dominio de longitudes de onda: $400\,nm < \lambda < 750\,nm$, diferente entre el día y la noche y con una alta sensibilidad, pero sin posibilidad de acumular con el tiempo la luz incidente. Entonces, el ojo humano dejó el espacio a otros detectores más adecuados.

14.5.1. Características de los detectores ópticos

Los detectores ópticos tienen algunas características en común:
a. Sensibilidad o respuesta espectral S: Es la razón entre la respuesta en salida y el flujo luminoso Φ. Por ejemplo, si la respuesta en salida es un corriente eléctrico I, podemos escribir $S = \frac{I}{\Phi}$ (unidad: $A\,W^{-1}$. Depende de la frecuencia o de la longitud de onda.
b. Rendimiento cuántico Q: Es la razón entre el número de electrones arrancados por la radiación incidente (fotoelectrones) y el número de fotones incidentes.
Si n es el número de fotones incidentes de energía $h\nu$ durante un segundo, el flujo energético incidente es: $nh\nu$ y el número de fotoelectrones es nQ, mientras tanto el corriente eléctrico es: enQ. Como consecuencia, la sensibilidad se escribe (sabiendo que $\lambda\nu = c$):

$$S = \frac{enQ}{nh\nu} = \frac{eQ}{h\nu} = \frac{e\lambda Q}{hc}$$

c. Constante de tiempo τ: Duración necesaria para alcanzar a una respuesta de $1-\frac{1}{e} \approx 0,63$ de su valor máximo cuando se ilumina el detector (aquí, e es el número $2,71828$).
d. Dominio de linealidad: Es el dominio donde la respuesta del detector es proporcional al flujo luminoso incidente. El gráfico $I = f(\Phi)$ está mostrando una parte lineal que está excluyendo las partes extremas. Este rango está llamado la dinámica del detector.
e. Ruido: El ruido es el conjunto de respuestas que no tienen ninguna relación con la radiación incidente. Más allá que el ruido térmico y el ruido asociado a los defectos de los componentes, el ruido más importante es el ruido de fotones. Está conectado con la naturaleza aleatoria de la emisión luminosa y sigue una ley de probabilidad.

14.5.2. La placa fotográfica

La placa fotográfica funciona según un proceso químico complejo que se puede resumir como siendo una reducción del ion Ag^+ en Ag atómico por la luz. Un tratamiento químico llamado revelado permite a la imagen de aparecer por ampliación del número de átomos de Ag y después de fijarla por eliminación de los iones Ag^+ no reducidos.
Se caracteriza este detector con la curva que da la densidad óptica (u opacidad): $D = log_{10}\tau$, τ siendo el factor de transmisión energética de la placa (razón entre el flujo luminoso emergente y el flujo luminoso incidente), en función de $log_{10}H$, donde $H = E\Delta t$, producto de la iluminación de la placa E por la duración de exposición Δt. es la exposición luminosa. Esta curva depende de la longitud de onda (está poco sensible al rojo).
En el dominio lineal, se pone de la forma siguiente: $D = A+\gamma log_{10}H$, donde γ está llamado el "gamma" de la emulsión. No obstante, la placa fotográfica tiene algunas desventajas:
a. El dominio lineal de la curva característica no es muy amplio;
b. No se puede comparar dos densidades ópticas sino si los tiempos de exposición son iguales: La densidad óptica depende del tiempo de exposición;
c. El rendimiento cuántico es muy bajo (alrededor de $0,8\%$, solamente);
d. El grano limita la resolución de la placa fotográfica.

Table 2: Comparación entre el ojo humano y la cámara fotográfica:

Ojo humano	*Cámara fotográfica*
interfaces + lente	*Objetivo*
Iris	*Diafragma*
Pupila	*Apertura*
Retina	*Pelicula fotográfica; captor CCD*
Acomodación	*enfoque*

14.5.3. Detectores a efecto fotoeléctrico

Hay varios detectores a efecto fotoeléctrico. Los más comunes son:
a. El fotomultiplicador;
b. El fotodiodo;
c. El fototransistor;
d. Los dispositivos a transfer de carga;
e. Los captores térmicos.
El único dispositivo importante en astronomía al día de hoy es el captor CCD (Charge Coupled Device), que es un dispositivo a transfer de carga. Se presenta en la forma de una red de celdas fotoconductores (a menudo varios millones), quienes forman una mosaica en dos dimensiones. El tamaño de cada celda es del orden de $10\,\mu m$, lo que es el factor limitante de la resulución espacial del detector. Son detectores con muchas calidades: Constante de tiempo débil, comportamiento lineal, rendimiento cuántico del orden de $0,5$, sensibilidad a un fotón, robusto, ocupación de un espacio reducido (lo que es muy útil por las cámaras fotográficas DSLR), buena adapatción al tratamiento de imagen.

15. La cámara fotográfica

Instrumento óptico muy común a nuestra época, la cámara fotográfica tiene muchas similaridades con el ojo humano. La tabla 1 está exponiendo las correspondencias entre los diferentes elementos del ojo humano y los de la cámara fotográfica.
No obstante, se debe anotar que el enfoque de una cámara fotográfica y la acomodación del ojo humano funcionan según principios diferentes de funcionamiento: En la cámara fotográfica, se hace el enfoque modificando la distancia entre el objetivo y et captor.

15.1. Descripción de la cámara fotográfica

La cámara fotográfica está compuesta principalmente de un conjunto de algunas lentes (el objetivo) que forman la imagen de un objeto sobre un receptor sensible a las radiaciones luminosas (película fotográfica, captor CCD). El sistema óptico está asociado a un cuerpo que juega el rol de una cámara negra, donde se encuentra el receptor, un obturador, un sistema óptico de mira y de enfoque (este último solamente cuando no está con el objetivo) y una celda fotoeleléctrica, para la evaluación del flujo luminoso incidente. Los aparatos modernos de fotografía son generalmente de tipo reflex, lo que significa que el objetivo propio sirve por el enfoque y por la toma de fotografía como tal. Este sistema incluye:
a. Un espejo plano pivotante;

b. Un vidrio de mira;
c. Una lente correctora;
d. Un pentaprisma;
e. Una lente ocular.

Una cámara fotográfica reflex está llamada SLR, por Single Lens Reflex. Cuando el receptor es un captor CCD, está llamda $DSLR$, por Digital Single Lens Reflex.

En el caso de la cámara clásica, está utilizando una película fotográfica sensible a las radiaciones luminosas. Lo más frecuentemente, esta película está compuesta de una emulsión de gelatina donde han sido incluidos microcristales de cloruro y bromuro de plata, sobre un soporte de vidrio o de plástico. Bajo la acción de la luz y después de un tratamiento químico (el baño de revelado), los iones Ag^+ están reducidos en plata Ag, mientras tanto los iones Br^- están oxidados en bromo Br_2:

$$2Ag^+ + 2e^- \longrightarrow 2Ag \qquad 2Br^- \longrightarrow Br_2 + 2e^-$$

Las repartición espacial de los átomos de plata forman una imagen visible que estamos estabilizando con un segundo baño de fijación, que elimina los iones de Ag^+ no reducidos. La sensibilidad está medida por la eficiencia de la acción de la luz sobre los microcristales de la emulsión y entonces por su tamaño. Cuando los microcristales son grandes ($\sim 30\,\mu m$). la sensibilidad es mayor y la película fotográfica está impresionada por una cantidad débil de luz. Se dice que la película fotográfica es rápida. Sin embargo, cuando los microcristales son pequeños ($\sim 5\,\mu m$). la sensibilidad es menor y la película fotográfica necesita muco más luz para estar impresionada. Se dice que la película fotográfica es lenta. Para medir la sensibilidad de una película fotográfica, se utiliza la escala ISO (International Standardization Organisation, llamada antiguamente ASA), según una progresión geométrica de razón 2: Dos películas fotográficas cuyas sensibilidades ISO son de razón 2 tienen opacidades en la misma razón por una exposición luminosa dada. La escala ISO es la siguiente:

25; 50; 100; 200; 400; 800; 1600; 3200

15.2. Características ópticas de un objetivo fotográfico

Los objetivos fotográficos están compuestos de varias lentes gruesas acopladas o separadas. Ciertos objetivos, llamados objetivos catadióptricos, tienen además espejos. Lo más generalmente, son objetivos de gran distancia focal. Otros objetivos están compuestos de lentes que pueden desplazarse unas con respecto a las otras: Son objetivos a geometría variable llamados zooms. El número alto de lentes (hasta 10) permite al constructor de corregir estos sistemas centrados de las aberraciones geométricas, además de las aberraciones cromáticas. Debido al uso de un tratamiento antirreflejo de las interfaces, este número limita muy poco el flujo transmitido, lo cual puede alcanzar 98% del flujo incidente.

15.2.1. Elementos cardinales

Para determinar los elementos cardinales, es suficiente de evaluar de manera analítica o experimental los elementos de la matriz de transfer del objetivo. Se deduce inmediatamente la vergencia V, y entonces las distancias focales. Más simple, la distancia focal imagen está generalmente inscrita en el contorno del lado adelante del objetivo. Por un formato determinado de receptor, se puede distinguir tres tipos de objetivos, los objetivos gran-angulares y fish-eyes (distancia focal corta), los objetivos normales (distancia focal mediana) y los teleobjetivos (distancia focal grande).

15.2.2. Aumento transversal

Con $\sigma_o = \overline{F_oA_o}$, $\sigma_i = \overline{F_iA_i}$ y la distancia focal f, el aumento transversal se escribe:

$$G_t = -\frac{\sigma_i}{f} = \frac{f}{\sigma_o}$$

La distancia algébrica $\sigma_i = \overline{F_iA_i}$ entre el foco imagen F_i y el punto A_i está llamada la tirada: Cuando el objeto se acerca de la cámara, el plano imagen se aleja de plano focal. Para aumentar σ_i, se puede agregar anillos o un fuelle entre el objetivo y el cuerpo. Esta técnica se utiliza en macrofotografía, para fotografiar objetos cercanos y pequeños.

15.2.3. Campo angular

El campo angular es el ángulo sólido cónico del espacio objeto de lo cual el objetivo fotográfico puede dar una imagen nítida. Se expone por el ángulo $2\theta_c$ del cono cuya cumbre es el punto nodal objeto N_o y que se apoya sobre círculos cuyos puntos internos admiten imágenes aceptables al nivel del receptor. Este campo angular está limitado por la dimensión máxima l_m del receptor, y entonces la diagonal del formato rectángular:

$$tan\theta_c = \frac{l_m}{2\overline{H_iA_i}} \approx \frac{l_m}{2f}$$

15.2.4. Apertura; Número de apertura

Se llama apertura de un aparato fotográfico el diámetro D de la pupila de entrada del objetivo. Como la razón $\frac{f}{D}$ de la distancia focal sobre el diámetro de la apertura interviene en la expresión de la iluminación, estamos introduciendo el número de apertura $N.A. = \frac{f}{D}$. Cuando el número de apertura vale 11, se dice que el objetivo trabaja a $f/11$. Los valores característicos del número de apertura, grabados sobre los contornos de los objetivos, son:

$1,4$; $1,8$; 2; $2,4$; $2,8$; 4; $5,6$; 8; 11; 16; 22; 32

15.3. Resolución

Como por el ojo humano, la estructura granular de receptor (película fotográfica, captor CCD) limita la capacidad del aparato fotográfico para resolver detalles de un objeto. Las películas rápidas con granos grandes son entonces los que tienen la menor resolución. En este caso, la mancha imagen correspondiente a un objeto puntual puede entonces tener un tamaño de $\sim 30\,\mu m$, lo que se puede comparar con el tamaño de la mancha de difracción:

$$sinu_o = \frac{D}{2|\sigma_o|} \quad => \quad \Delta x_o \approx \frac{\lambda}{8\pi n_o sinu_o} \approx \frac{\lambda}{4\pi D}|\sigma_o|$$

Como $n_o = 1$ y $|G_t| = \frac{\Delta x_i}{\Delta x_o}$, podemos escribir que:

$$\Delta x_i = |G_t|\Delta x_o \approx |G_t|\frac{\lambda}{4\pi D}|\sigma_o| \approx \frac{\lambda}{4\pi D}f = \frac{\lambda N.A.}{4\pi}$$

Como $\lambda \sim 0,55\,\mu m$ y generalmente $N.A. < 22$, $\Delta x_i < 1\,\mu m$. El límite de resolucón viene bien de la granulación del receptor, pero no de la difracción. Aún si es todavía presente, el problema viene menos crucial con un receptor a granos finos (película lenta, captor CCD).

15.4. Enfoque

15.4.1. Profundidad de campo

Se llama profundidad de campo la distancia máxima separando dos puntos A'_o y A''_o del eje óptico cuyas imágenes están vistas de manera nítida al nivel del receptor. Se admite que la visi'on está nítida cuando la mancha imagen no tenga un diámetro superior a un cierto valor a_i (valor más alto: no más de $100\,\mu m$; mejor: no más de $50\,\mu m$).
La profundidad de campo $A'_oA''_o$ es tal que: $\overline{A'_iA''_i}tanu_i = -a_i$. Sabemos que el ángulo u_i está relacionado con el ángulo u_o por la relación de los senos de Abbe:

$$n_o\overline{A_oB_o}sinu_o = n_i\overline{A_iB_i}sinu_i$$

Las fórmulas de Newton aplicadas a las pares de puntos más extremos $A'_oA'_i$ y $A''_oA''_i$, además de la par A_oA_i nos permiten de escribir:

$$\overline{A'_iA_i} = \overline{F_iA_i} - \overline{F_iA'_i} = -f^2\left(\frac{1}{\sigma_o} - \frac{1}{\sigma'_o}\right) = -\frac{a_i}{2tanu_i}$$

$$\overline{A_iA''_i} = \overline{F_iA''_i} - \overline{F_iA_i} = -f^2\left(\frac{1}{\sigma''_o} - \frac{1}{\sigma_o}\right) = -\frac{a_i}{2tanu_i}$$

a. Distancia óptima de enfoque: Es la distancia intermedia $d \approx F_oA_o = |\sigma_o|$ incluida entre las distancias $d' = \sigma'_o$ y $d'' = \sigma''_o$ por los cuales las imágenes están vistas de manera nítida. Según lo que establecemos antes, podemos escribir:

$$\frac{1}{\sigma_o} - \frac{1}{\sigma'_o} = \frac{1}{\sigma''_o} - \frac{1}{\sigma_o} \quad => \quad \frac{1}{d'} + \frac{1}{d''} \approx \frac{2}{d} \quad => \quad d \approx \frac{2d'd''}{d'+d''}$$

b. Expresión de la profundidad de campo: Tenemos ahora dos expresiones de $\overline{A'_iA''_i}$:

$$\overline{A'_iA''_i} = \overline{A'_iA_i} + \overline{A_iA''_i} = -\frac{a_i}{tanu_i}$$

$$\overline{A'_iA''_i} = \overline{A'_iA_i} + \overline{A_iA''_i} = f^2\left(\frac{1}{\sigma'_o} - \frac{1}{\sigma''_o}\right) = f^2\left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{d''}\right) = -f^2\frac{d'-d''}{d'd''}$$

Como consecuencia, tenemos:

$$\frac{a_i}{tanu_i} = f^2\frac{d'-d''}{d'd''} \qquad A'_oA''_o = d' - d'' = -\frac{a_i}{tanu_i}\frac{d'd''}{f^2}$$

La cantidad $\frac{d'd''}{f^2} \approx \frac{\sigma'_o\sigma''_o}{f^2}$ representa el cuadrado del aumento transversal. Como los ángulos son suficiente débiles, $tanu_i \approx sinu_i$ y como $n_o = n_i = 1$, podemos escribir:

$$tanu_i \approx sinu_i = \frac{sinu_o}{G_t} \approx \frac{D}{2dG_t}$$

Como $\frac{f}{d} = -G_t$ y $N.A. = \frac{f}{D}$, podemos finalmente escribir:

$$tanu_i \approx -\frac{1}{2N.A.} \qquad A'_iA''_i \approx 2a_iN.A. \qquad A'_oA''_o = \frac{2a_iN.A.}{f^2}d^2$$

La profundidad de campo:
a. aumenta cuando el número de apertura $N.A.$ aumenta;

b. aumenta cuando la distancia óptima de enfoque d aumenta;
c. disminuye cuando la distancia focal f aumenta.
El enfoque se hace desplazando de manera helicoidal el objetivo con respecto al receptor. Por un objetivo trabajando con un $N.A.$ dado, se puede leer la profundidad de campo (solamente por los valores más grandes, generalmente) debido a dos índices segundarios localizados en ambas partes del índice principal que da la distancia óptima de enfoque.

15.4.2. Distancia hiperfocal

La distancia hiperfocal H es la distancia óptima de enfoque correspondiente a una profundidad de campo definida por el intervalo $[\infty, \frac{H}{2}]$. Como consecuencia, adoptando $d' = \infty$ y $d'' = \frac{H}{2}$, viene: $d \approx 2d'' = H$ y $A'_iA''_i = \frac{f^2}{d''} = \frac{2f^2}{H}$. Pero, como $A'_iA''_i \approx 2a_iN.A.$:

$$H \approx \frac{f^2}{a_iN.A.}$$

Entonces, la distancia hiperfocal H:
a. aumenta cuando la distancia focal f aumenta;
b. disminuye cuando el número de apertura $N.A.$ aumenta.

15.5. Iluminación del plano imagen

La iluminación del plano imagen puede escribirse:

$$E_i = \frac{\delta\Phi_i}{dS_i}$$

Como $\delta\Phi_i = \pi L_i dS_i sin^2 u_i$ y $L_i = \tau L_o$ (τ: factor de transmisión energética), viene:

$$E_i = \pi\tau L_o sin^2 u_i$$

Tomando en cuenta la relación de Abbe, estamos obteniendo:

$$E_i = \pi\tau L_o \frac{sin^2 u_o}{G_t^2} \approx \pi\tau L_o \frac{D^2}{4G_t^2(A_oE)^2}$$

Y finalmente, como $G_t^2 = \frac{f^2}{\sigma_o^2} \approx \frac{f^2}{(A_oE)^2}$, tenemos:

$$E_i \approx \frac{\pi\tau L_o}{4(N.A.)^2}$$

Así, la iluminación E de la imagen en una cámara fotográfica está variando como el inverso del cuadrado de número de apertura $N.A.$. Como la densidad óptica de una película fotográfica revelado depende solamente de la exposición luminosa $H = E\Delta t$, la cantidad $\frac{\Delta t}{(N.A.)^2}$ juega un rol importante en fotografía.
De eso sale la relación entre la progresión geométrica de los números de apertura, de razón $\sqrt{2}$, y la de los tiempos de exposición Δt, de razón 2:

$N.A.$	2,8	4	5,6	8	11	16	22
$(N.A.)^2$	7,84	16	31,4	64	121	256	484
Δt	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$

15.6. Principio de funcionamiento del teleobjetivo

Los teleobjetivos está principalmente compuestos de dos sistemas ópticos distintos, el primero convergente y el segundo divergente, para formar un sistema de gran distancia focal sin ocupar un volumen demasiado amplio. Para simplificar, podemos estudiar el caso de un teleobjetivo de vergencia V, compuesto de dos lentes delgadas, de vergencias V_1 y V_2. Anotando $m = \frac{V_2}{V_1}$, podemos establecer la longitud algébrica $\overline{EF_i}$ (positiva) separando la entrada E de sistema de su punto focal imagen F_i:

$$\overline{EF_i} = \overline{ES} + \overline{SF_i} = e + f_i(1 - eV_1) = e + \frac{(1 - eV_1)}{V}$$

Como e está relacionado con V, V_1 y V_2 por la fórmula de Gullstrand:

$$V = V_1 + V_2 - eV_1V_2 = V_1(1+m) - emV_1^2 \quad => \quad e = \frac{V_1(1+m) - V}{mV_1^2}$$

Podemos entonces escribir el valor de la longitud algébrica $\overline{EF_i}$:

$$\overline{EF_i} = e + \frac{(1 - eV_1)}{V} = \frac{V_1(1+m) - V}{mV_1^2} + \frac{1 - V_1\frac{V_1(1+m)-V}{mV_1^2}}{V}$$

$$=> \quad \overline{EF_i} = \frac{1+m}{mV_1} - \frac{V}{mV_1^2} + \frac{1}{V} - \frac{V_1(1+m) - V}{mV_1V} = \frac{1+m}{mV_1} - \frac{V}{mV_1^2} + \frac{1}{V} - \frac{1}{mV} - \frac{1}{V} + \frac{1}{mV_1}$$

$$=> \quad \overline{EF_i} = \frac{2+m}{mV_1} - \frac{V}{mV_1^2} - \frac{1}{mV}$$

A fin de obtener $\overline{EF_i}$ mínima, podemos anular su derivada primera con respecto a V_1:

$$\frac{d\overline{EF_i}}{dV_1} = \frac{1}{mV_1^2}\left(\frac{2V}{V_1} - (2+m)\right) = 0 \quad => \quad V_1 = \frac{2V}{2+m}$$

El volumen está mínimo si, por $V_1 = \frac{2V}{2+m}$, la derivada segunda es positiva:

$$\frac{d^2\overline{EF_i}}{dV_1^2} = -\frac{2}{mV_1^3}\left(\frac{2V}{V_1} - (2+m)\right) - \frac{2V}{mV_1^4} = -\frac{(2+m)^4}{8mV^3} > 0$$

Como consecuencia, si V_1 y V son positivos, el volumen es mínimo cuando $m < 0$. Tenemos:

$$V_2 = mV_1 = \frac{2mV}{2+m} < 0$$

$$e = \frac{V_1(1+m) - V}{mV_1^2} = \frac{\frac{2V}{2+m}(1+m) - V}{m\frac{4V^2}{(2+m)^2}} = \frac{2+m}{4V} < \frac{1}{2V}$$

16. Óptica geométrica en medio no homogéneo

16.1. Ecuación iconal

Entre dos superficies de ondas Σ_0 y Σ, conjuntos de puntos de igual parturbación luminosa en los instantes t_0 y $t_0 + \tau$, podemos calcular el camino óptico a lo largo de un rayo luminoso curvo RL pasando por los puntos A_0 de Σ_0 y A de Σ:

$$L = \int_{A_0}^{A} nds$$

En esta ecuación, n es el índice del medio y ds el elemento curvilíneo de RL. Cuando el punto $A_0(\vec{r_0})$ está fijado mientras tanto el punto $A(\vec{r})$ se desplaza, el camino óptico así establecido depende solamente de $\vec{r}$, RL siendo una curva efectivamente seguida por la luz:

$$\int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} nds = L(\vec{r}) \qquad dL = \overrightarrow{grad}(L)\cdot d\vec{r} = nds = n(d\vec{r}\cdot \vec{u}) \quad => \quad n(d\vec{r}\cdot \vec{u}) = \overrightarrow{grad}(L)\cdot d\vec{r}$$

Como $d\vec{r}$ es cualquiera, podemos identificar:

$$n\vec{u} = \overrightarrow{grad}(L) = \vec{\nabla} L \quad => \quad n = ||\overrightarrow{grad}(L)|| = ||\vec{\nabla} L||$$

Esta última ecuación expresa que el índice del medio es igual a la norma del vector gradiente de la función camino óptico. Está conocida como la ecuación iconal de la óptica geométrica.

16.2. Ley fundamental de la óptica geométrica

Podemos evaluar la variación elemental del vector $(n\vec{u})$ en función de ds:

$$\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \frac{d}{ds}(n\alpha\vec{e_x} + n\beta\vec{e_y} + n\gamma\vec{e_z}) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial L}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial L}{\partial z}\vec{e_z}\right)$$

donde $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$) son los vectores unitarios según los ejes x, y, z de la base del espacio, y (α, β, γ) las componentes del vector $\vec{u}$ en la misma base. Como:

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\cdot d\vec{r}$$

Entonces, debido a lo anterior, podemos escribir:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\cdot\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\cdot\vec{u} = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{n}\vec{\nabla} L$$

Este resultado puede estar escrito de manera más explicita:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\frac{\partial L}{\partial z}\right]$$

Podemos ahora permutar el orden de la diferenciación entre x y y, y entre x y z:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)\frac{\partial L}{\partial z}\right]$$

Lo que se puede transformar de la manera siguiente:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \frac{1}{2n}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2\right] = \frac{1}{2n}\frac{\partial}{\partial x}(n^2) = \frac{\partial n}{\partial x}$$

Este mismo cálculo puede estar hecho por y y z. Finalmente, estamos obteniendo:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \frac{\partial n}{\partial x} \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = \frac{\partial n}{\partial y} \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right) = \frac{\partial n}{\partial z}$$

Y, como consecuencia, la ecuación vectorial obtenida se escribe:

$$\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \overrightarrow{grad}(n) = \vec{\nabla} n \quad <=> \quad \frac{d^2\vec{r}}{dl^2} = n\,\overrightarrow{grad}(n) = n\vec{\nabla} n$$

Introduciendo en esta última ecuación $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ y el elemento infinitesimal $dl = \frac{ds}{n} = \frac{dL}{n^2}$.

16.3. Consecuencias

16.3.1. Propagación rectilineal en un medio homogéneo

Si el medio es homogéneo, el índice es uniforme y $\overrightarrow{grad}(n) = \vec{\nabla} n = 0$. Así tenemos:

$$\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = n\frac{d\vec{u}}{ds} = 0 \quad => \quad \vec{u} = \overrightarrow{Cste}$$

Cuando s varia, $\vec{u}$ no cambia: La luz se propaga de manera rectilineal en medio homogéneo.

16.3.2. Leyes de Snell-Descartes

El vector $\overrightarrow{grad}(n) = \vec{\nabla} n$ está colineal a la normal $\vec{N}$ a la superficie separando dos medios de índices diferentes. Podemos escribir:

$$\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \overrightarrow{grad}(n) = \vec{\nabla} n \quad => \quad d(n\vec{u}) = ||\overrightarrow{grad}(n)||\vec{N}ds$$

Es ahora posible de integrar esta última ecuación entre dos puntos infinitamente vecinos ubicados en cada parte de la superficie:

$$\Delta(n\vec{u}) = \vec{N}\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} ||\overrightarrow{grad}(n)||ds \quad => \quad n_2\vec{u_2} - n_1\vec{u_1} = a\vec{N}$$

Donde a es un número real. Encontramos la expresión vectorial de la ley de Snell-Descartes.

16.4. Trayectoria de un rayo luminoso

La ecuación diferencial de la trayectoria de un rayo luminoso se escribe en (x,y,z):

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x} \qquad \frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial y} \qquad \frac{d}{ds}\left(n\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial z}$$

Por otra parte, podemos desarrollar la ecuación vectorial anterior:

$$\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \frac{dn}{ds}\vec{u} + n\frac{d\vec{u}}{ds} = \overrightarrow{grad}(n) = \vec{\nabla} n$$

Anotando $\vec{e_n}$ el vector unitario de la normal principal y R el radio de curvatura, tenemos:

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{\vec{e_n}}{R} \quad => \quad \frac{dn}{ds}\vec{u} + \frac{n}{R}\vec{e_n} = \overrightarrow{grad}(n) = \vec{\nabla} n$$

Multiplicando por $\vec{e_n}$ cada miembro de esta ecuación, obtenemos:

$$\frac{n}{R} = \vec{e_n}\cdot\vec{\nabla} n \quad => \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{n}\vec{e_n}\cdot\vec{\nabla} n$$

Todo eso permite determinar R. Como $R > 0$, el ángulo entre $\vec{e_n}$ y $\vec{\nabla} n$ es siempre agudo. Entonces, la concavidad está siempre orientada en el sentido del vector $\vec{\nabla} n$.

16.5. Fibras ópticas

16.5.1. Fibras con salto de índice

Dentro de las fibras con salto de índice, el índice cambia de valor bruscamente, entre un valor n_1 en el centro, llamado el corazón de la fibra, y un valor n_2 más débil en la periferia, llamada el recubrimiento de la fibra. Todo rayo luminoso propagandose dentro del corazón sopuerta una reflexión total que lo vuelve a llevar hacia el eje óptico de la fibra. Tenemos:

$$sini_1 \geq \frac{n_2}{n_1} \quad => \quad cosi_1 \leq \frac{(n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}}{n_1}$$

Podemos ahora introducir el ángulo θ_0 en la entrada de la fibra (índice externo: n_0):

$$n_0 sin\theta_0 = n_1 cosi_1 \quad => \quad n_0 sin\theta_0 \leq (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad => \quad sin\theta_0 \leq \frac{(n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}}{n_0}$$

Así, todo rayo luminoso que entra dentro de la fibra bajo un ángulo θ_0 respectando la condición anterior puede propagarse dentro de la fibra. La candidad siguiente:

$$A.N. = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

es la apertura numérica de la fibra. Este parámetro es importante, siendo directamente conectado con la cantidad de luz que la fibra puede colectar $(0,1 < A.N. < 0.6)$. El valor máximo de θ_0 es el ángulo de aceptancia de la fibra:

$$(\theta_0)_{max} = arcsin \left[\frac{(n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}}{n_0} \right]$$

Por lo que concierne las fibras de radio de corazón a no despreciable con respecto al espesor b del recubrimiento, la luz puede propagarse según diferentes modos, con diferentes números de relexión total sobre la superficie interna del recubrimiento. La duración de propagación entre dos planos de frente depende entonces del modo de propagación, lo que provoca una expansión de la señal propagándose dentro de la fibra, llamada dispersión modal. Para evitar este inconveniente, los constructores disminuyen el valor de a hasta $5\,\mu m$, para hacer subsistir un solo modo. No obstante, la tecnología moderna no permite un uso de tales fibras a salto de índice sin tener una pérdida inaceptable de luz. De este problema viene el interés industrial (y científico) por las fibras con gradiente de índice.

16.5.2. Fibras con gradiente de índice

Dentro de una fibra con gradiente de índice, el índice varia de manera continua desde el valor n_1 en el eje óptico hasta el valor n_2 cuando se aleja de éste. Un ejemplo típico de variación del índice n con el parámetro r, distancia al eje óptico, está dado por la fórmula:

$$n = n_1 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{2}} = n_1 \left[1 - 2\frac{n_1 - n_2}{n_1} \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{2}}$$

En esta ecuación, a es el radio del corazón de la fibra, y α un exponente que vale 1 por un perfil triangular y 2 por un perfil parabólico. Lo más frecuentemente, el parámentro $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \approx 0,01$ y $\alpha = 2$. Posando $\rho = \frac{a}{\sqrt{2\Delta}}$, y con un desarrollo limitado al orden dos:

$$n \approx n_1 \left(1 - \Delta \frac{r^2}{a^2} \right) = n_1 \left(1 - \frac{r^2}{2\rho^2} \right)$$

Como $a \approx 25\,\mu m$, $\rho \approx 180\,\mu m$. Generalmente, n_1 es independiente de z.
a. Ecuación diferencial de la trayectoria de un rayo luminoso en la aproximación de Gauss.
Como lo vimos antes, la ecuación vectorial de la trayectoria se escribe:

$$\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \overrightarrow{grad}(n) = \overrightarrow{\nabla} n$$

Según un eje transversal x, en la aproximación de Gauss ($ds \approx dz$), se puede escribir:

$$\frac{d}{dz}\left(n\frac{dx}{dz}\right) = \frac{\partial n}{\partial x}$$

Utilizando el valor del índice n establecido anteriormente, tenemos:

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{dn}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{n_1 r}{\rho^2}\frac{x}{r} = -\frac{n_1 x}{\rho^2}$$

Como estamos asumiendo que n es independiente de z, estamos obteniendo:

$$n\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{n_1 x}{\rho^2} \quad => \quad n\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{n_1 x}{\rho^2} = 0 \quad => \quad \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{x}{\rho^2} = 0$$

considerando $n \approx n_1$, lo que viene a omitir los termas no lineales.
b. Trayectoria.
La ecuación diferencial establecida anteriormente tiene como solución general:

$$x = Acos\left(\frac{z}{\rho}\right) + Bsin\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

Podemos deducir de eso la matriz de transfer entre el plano de frente a la entrada de la fibra ($z = 0$) y el plano de frente a la salida (z). Por eso, debemos determinar los valores de las constantes A y B en función de $x_e = x(0)$ y de $\left(n_1\frac{dx}{dz}\right)_e$:

$$x_e = x(0) = A \qquad \left(n_1\frac{dx}{dz}\right)_e = \frac{n_1}{\rho}\left[-Asin\left(\frac{z}{\rho}\right) + Bcos\left(\frac{z}{\rho}\right)\right]_{z=0} = \frac{n_1 B}{\rho}$$

Este último cálculo permite escribir, finalmente:

$$x = x_e cos\left(\frac{z}{\rho}\right) + \frac{\rho}{n_1}\left(n_1\frac{dx}{dz}\right)_e sin\left(\frac{z}{\rho}\right) \qquad n_1\frac{dx}{dz} = -\frac{n_1 x_e}{\rho}sin\left(\frac{z}{\rho}\right) + \left(n_1\frac{dx}{dz}\right)_e cos\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

Introduciendo el parámetro $p = 2\pi\rho$, podemos escribir:

$$X = TX_e \quad => \quad \begin{bmatrix} x \\ n_1\frac{dx}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(2\pi\frac{z}{p}\right) & \left(\frac{2\pi n_1}{p}\right)^{-1} sin\left(2\pi\frac{z}{p}\right) \\ -\frac{2\pi n_1}{p}sin\left(2\pi\frac{z}{p}\right) & cos\left(2\pi\frac{z}{p}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ n_1\frac{dx}{dz} \end{bmatrix}_e$$

Se puede verificar inmediatamente que $det(T) = 1$.
Por otra parte, se puede encontrar el caso de los medios homogéneos haciendo $p = \infty$. En el caso concreto donde $x_e = 0$ y $\left(n_1\frac{dx}{dz}\right)_e \neq 0$, la solución se escribe:

$$x = \rho\left(\frac{dx}{dz}\right)_e sin\left(\frac{z}{\rho}\right) = \frac{p}{2\pi}\left(\frac{dx}{dz}\right)_e sin\left(2\pi\frac{z}{p}\right)$$

Las trayectorias de los rayos luminosos son sinusoidales, de periodo p. Entonces, estos rayos luminosos cruzan periódicamente el eje óptico, seún un periodo de $\frac{p}{2}$.
La apertura numérica $A.N.$ de una fibra con gradiente de índice se expresa en función del radio a y de ρ. Por una parte, si $x_e = 0$, tenemos: $n_0|sin\theta_0| = \left|\left(n_1\frac{dx}{dz}\right)_e\right|$, y, por otra parte, $|x| = \left|\rho\left(\frac{dx}{dz}\right)_e sin\left(\frac{z}{\rho}\right)\right| \leq \left|\rho\left(\frac{dx}{dz}\right)_e\right|$ es siempre inferior a a si $\left|\rho\left(\frac{dx}{dz}\right)_e\right| \leq a$. Entonces:

$$n_0|sin\theta_0| \leq \frac{n_1 a}{\rho} \quad => \quad n_0|sin\theta_0| \leq A.N. = \frac{n_1 a}{\rho} = n_1\sqrt{2\Delta}$$

16.5.3. Atenuación de la luz dentro de una fibra óptica

La atenuación de la luz dentro de una fibra óptica ocurre principalmente debido a la absorción por el material y a la difusión Rayleigh en $\frac{1}{\lambda^4}$ dentro de este último y a las impurezas presentes. La atenuación se mide en decibeles por kilómetro, según la fórmula:

$$A_{dB/km} = \frac{10}{\Delta l} log_{10}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right)$$

Φ_1 y Φ_2 corresponden a los flujos luminosos en los planos de frente sucesivos 1 y 2 distantes de Δl (distancia expresada en kilómetros). Al día de hoy, se sabe construir fibras con muy baja atenuación en el infrarrojo: Por una longitud de onda $\lambda = 1,55\,\mu m$, podemos todavía tener 10% del flujo luminoso inicial después de $50\,km$ recorridos dentro de la fibra óptica.

16.6. Espejismo

Cuando el suelo está caliente, el índice $n(h)$ sube con la altura h. El vector $\vec{\nabla} n$ está entonces orientado hacia arriba. Los rayos procedentes de un objeto se curvan y alcanzan al ojo del observador con una apariencia engañosa como si estarían procedente de una superficie reflectante ubicada a gran distancia o aún al horizonte, lo más generalmente con una apariencia de una capa de agua. Como este fenómeno se ve por buen tiempo, el color azul metálico de agua falsa viene claramente de la atmósfera (cielo azul sin nubes). Un análisis detallado del fenómeno de espejismo muestra que existen actualmente dos imágenes que se superponen, una imagen recta y una imagen invertida.

16.7. Refracción atmosférica; Airmass

16.7.1. Refracción atmosférica

Como el índice tiene una simetría esférica, tenemos $n = n(r)$. Como sabemos que:

$$\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \overrightarrow{grad}(n) = \vec{\nabla} n = \frac{dn}{dr}\vec{e_r}$$

Podemos calcular el valor de la derivada del producto vectorial $\vec{r} \wedge n\vec{u}$:

$$\frac{d}{ds}(\vec{r} \wedge n\vec{u}) = \frac{d\vec{r}}{ds} \wedge n\vec{u} + \vec{r} \wedge \frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \frac{d\vec{r}}{ds} \wedge n\vec{u} + \vec{r} \wedge \vec{\nabla} n = \vec{0}$$

De hecho, como $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$, tenemos $\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge n\vec{u} = \vec{0}$, mientras tanto $\vec{\nabla} n$ es colineal con $\vec{r}$. Entonces, $\vec{r} \wedge n\vec{u}$ es una constante vectorial. Llamando ψ el ángulo entre el rayo luminoso y la vertical (que es la normal a las superficies esféricas de índices constantes), estamos obteniendo la fórmula siguiente (llamada fórmula de Bouguer):

$$nrsin\psi = Cste$$

El índice n es una función decreciente de r, mientras tanto el vector $\vec{\nabla} n$ está dirigido hacia el centro T de la Tierra. Los rayos luminosos procedentes de un astro lejano y alcanzando el ojo de un observador están entonces curvados debido a la refracción atmosférica. Resulta de eso que la posición aparente de un astro no es su posición real (el astro aparece más alto en el cielo que lo que es realmente, y la diferencia depende de su altura).

La descripción de la refracción atmosférica dada aquí viene de un artículo de Lawrence H. Auer y E. Myles Standish, *The Astrophysical Journal*, 119, 2472-2474 (**May 2000**).

Por una atmósfera simétrica esférica, la refracción atmosférica R está dada por:

$$R = \int_0^{\ln(n_0)} tg\,\psi\, d(\ln(n))$$

subyugada a la relación de invariancia:

$$nr \sin \psi = n_0 r_0 \sin \psi_0$$

n siendo el índice de refracción a la distancia r del centro de la Tierra, y ψ el ángulo entre el rayo luminoso incidente y el radio vector. El índice 0 está refiriendo a los valores al nivel del observador, y $\psi_0 = z$ es el ángulo cenital aparente visto desde el lugar de observación. Por diferenciación de la relación de invariancia, tenemos:

$$\sin \psi\, d(nr) + nr \cos \psi\, d\psi = 0$$

Lo que nos da:

$$tg\,\psi \frac{d(nr)}{nr} = tg\,\psi\, d(\ln(nr)) = -d\psi$$

Y finalmente:

$$tg\,\psi = -\frac{d\psi}{d(\ln(nr))}$$

Volviendo al cálculo de refracción atmosférica R y sustituyendo $tg\,\psi$, tenemos:

$$R = -\int_0^{\psi_0} \frac{d(\ln(n))}{d(\ln(nr))}\, d\psi = -\int_0^{\psi_0} \frac{\frac{d(\ln(n))}{d(\ln(r))}}{1 + \frac{d(\ln(n))}{d(\ln(r))}}\, d\psi$$

Como el índice de refracción n y el ángulo ψ dependen de la distancia al centro de la Tierra r ($n = n(r)$ y $\psi = \psi(r)$), la integración de esta última ecuación no se puede hacer de manera simple (se debe conocer las funciones $n(r)$ y $\frac{d(\ln(n))}{d(\ln(r))}$), pero a través de aproximaciones sucesivas en r, y entonces de manera empírica:

$$r_{i+1} = r_i - F(r_i)/F_r(r_i)$$

donde:

$$\begin{cases} F(r) = nr - \frac{n_0 r_0 \sin \psi_0}{\sin \psi} \\ \\ F_r(r) = \frac{dn}{dr} r + n \end{cases}$$

En el caso de una atmósfera compuesta de capas separadas, por ejemplo de una Troposfera y de una Estratosfera, se debe hacer el cálculo de integración en cada región.

Podemos entonces introducir un modelo realista de la atmósfera terrestre en dos capas, Troposfera y Estratosfera, en la ocurrencia el modelo politrópico a trozos. En este modelo, la densidad de la atmósfera está descrita por un polítropo de índice k en la Troposfera y por un otro polítropo de índice ∞ (entonces isotermal) en la Estratosfera. Las dos partes están conectadas con la presunción de la continuidad de la temperatura y de la densidad al límite (la Tropopausa), definido por su altura h_B encima de la superficie del mar. Este modelo tiene las ventajas de dar un tratamiento simple y de permitir ajustes según las condiciones de presión y de temperatura del lugar (lo cual está caracterizado por su altitud h encima del nivel del mar, con $h = r - r_\oplus$). El índice de refracción n está relacionado con la densidad ρ a través de la relación de Gladstone-Date:

$$n = 1 + \alpha\rho$$

donde la densidad vale 1 en la condiciones estándares de presión y de temperatura (273.15 K y 760 mmHg). Las relaciones que dan la densidad con respecto a la altura h encima de la superficie del mar se pueden escribir, por la Troposfera ($h < h_B$):

$$\begin{cases} \rho(r) = \rho_w \left[1 + \beta_w(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}_w})\right]^k \\ \\ T(r) = T_w \left[1 + \beta_w(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}_w})\right] \end{cases}$$

y por la Estratosfera ($h > h_B$):

$$\begin{cases} \rho(r) = \rho_w \, exp \left[\gamma_w(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}_w})\right] \\ \\ T(r) = T_w \end{cases}$$

Mientras tanto la escala de este modelo está ajustado con respecto a los valores observados de la temperatura T_w y de la presión p_w a una altura h_w, los parámetros de ambas relaciones están dados por (ver la tabla 1 por los valores de las constantes):

$$\begin{cases} \rho_w = \frac{p_w}{760}\frac{273.15}{T_w} \\ \\ \beta_w = \frac{g r_\oplus}{\Re T_w (1+k)} \\ \\ \gamma_w = \frac{g r_\oplus}{\Re T_w} \\ \\ \bar{r} = \frac{r_\oplus + h}{r_\oplus} \\ \\ \bar{r}_w = \frac{r_\oplus + h_w}{r_\oplus} \end{cases}$$

Par garantizar la continuidad en la Tropopausa (r_B, T_B, ρ_B), podemos calcular:
a) Por la Troposfera ($h < h_B$):

$$\begin{cases} \rho_B = \rho_w \left[1 + \beta_w(\frac{1}{\bar{r}_B} - \frac{1}{\bar{r}_w})\right]^k \\ \\ T_B = T_w \left[1 + \beta_w(\frac{1}{\bar{r}_B} - \frac{1}{\bar{r}_w})\right] \end{cases}$$

Table 3: Constantes físicas.

Símbolo	*Definición*	*Valor*
α	*Parámetro de Gladstone – Dale*	0.0029241[a]
$r_\oplus$	*Radio ecuatorial de la Tierra*	$6378390\,m$
g	*Constante de la gravitación*	$9.80655\,m\,s^{-2}$
$\Re$	*Constante de los gases perfectos*	$287.053\,m^2\,s^{-2}\,{}^oC^{-1}$
k	*Índice politrópico de la Troposfera*	5[a]
h_B	*Altura de la Tropopausa*[b]	$11019\,m$

[a] Sin unidad

[b] Variable según la latitud

b) Por la Estratosfera ($h > h_B$):

$$\begin{cases} \rho_B = \rho_w\, exp\left[\gamma_w(\frac{1}{\bar{r}_B} - \frac{1}{\bar{r}_w})\right] \\ \\ T_B = T_w \end{cases}$$

y ajustar los parámetros para tener esta continuidad en la Tropopausa.

Este método permite hacer un cálculo numérico por varias alturas, por varios valores de la temperatura y de la presión, así que por diferentes valores del ángulo cenital. Los resultados están presentados en la tabla 2.

Algunas otras fórmulas dando la refracción atmosférica:

Según Bennett (1982), podemos expresar la refracción atmosférica de la manera siguiente, h_a siendo la altura angular aparente en grados y R siendo la refracción atmosférica en minutos de arco:

$$R = cotg\left[h_a + \frac{7.31}{h_a + 4.4}\right]$$

Esta fórmula da R con una precisión mejor que $0.07'$ entre 0^o y 90^o.

Según Sæmundsson (1986), podemos expresar la refracción atmosférica de la manera siguiente, h siendo la altura angular aparente en grados y R siendo la refracción atmosférica en minutos de arco:

$$R = 1.02\,cotg\left[h + \frac{10.3}{h + 5.11}\right]$$

Esta fórmula está consistente a mejor que $0.1'$ con la fórmula de Bennet. Ambas fórmulas asumen una presión atmosférica de $101.0\ kPa$ y una temperatura de 10^oC. Por diferentes presiones P y temperaturas T, la refracción calculada a partir de estas fórmulas deben estar multiplicadas por $\frac{P}{101.0}\frac{283}{273+T}$ (Meeus 1991).

16.7.2. Airmass

En astronomía, la airmass es la longitud del camino óptico a través de la atmósfera de la Tierra de un rayo luminoso desde una fuente celeste. Cuando cruzando a través de la atmósfera, la luz está atenuada por dispersión y absorción; un espesor más grande de atmósfera cruzada da una atenuación más importante. Como consecuencia, los cuerpos

Table 4: Refracción atmosférica computada.

Ángulo cenital	$h_w = 0\,m$ $T_w = 273.15\,K$ $p_w = 760\,mmHg$ $h_0 = 0\,m$	$h_w = 0\,m$ $T_w = 273.15\,K$ $p_w = 780\,mmHg$ $h_0 = 0\,m$	$h_w = 0\,m$ $T_w = 303.15\,K$ $p_w = 760\,mmHg$ $h_0 = 0\,m$	$h_w = 0\,m$ $T_w = 273.15\,K$ $p_w = 760\,mmHg$ $h_0 = 2000\,m$	$h_w = 0\,m$ $T_w = 273.15\,K$ $p_w = 760\,mmHg$ $h_0 = 15000\,m$
$(^o)$	”	”	”	”	”
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
15	16.14	16.56	14.54	13.05	2.30
30	34.77	35.68	31.32	28.10	4.97
45	60.17	61.76	54.20	48.64	8.60
60	103.99	106.73	93.65	84.07	14.87
75	221.49	227.33	199.15	179.09	31.73
80	330.52	339.25	296.52	267.34	47.46
85	614.56	630.96	546.76	497.75	89.20
86	732.77	752.42	649.25	593.86	106.99
87	899.23	923.52	791.88	729.38	132.53
88	1145.51	1176.89	999.39	930.14	171.49
89	1532.65	1575.47	1317.72	1245.89	235.77
90	2189.42	2253.01	1838.65	1780.59	353.36
91				2777.33	600.62
92					1187.87
93					2316.43

celestes cerca del horizonte parecen menos brillantes que cuando se ubican cerca del zenit. La atenuación, conocida como extinción atmosférica, está descrita cuantitativamente por la ley de Beer-Lambert-Bouguer.

Ley de Beer-Lambert-Bouguer en la atmósfera:

$$I = I_0 exp\left[-m(\tau_a + \tau_g + \tau_{NO_2} + \tau_w + \tau_{O_3} + \tau_r)\right]$$

Donde cada τ_x es el espesor óptico correspondiente a la fuente x de absorción o de dispersión:

a está refiriendo a los aerosoles (que absorben y dispersan;)

g está refiriendo a los gases uniformemente mezclados (principalmente el dióxido de carbón (CO_2) y el oxígeno molecular (O_2) que solamente absorban);

NO_2 es el dióxido de nitrógeno, principalmente producido por la contaminación urbana (solamente en absorción);

w es la absorción del vapor de agua;

O_3 es el ozono (solamente en absorción);

r es la dispersión Rayleigh producida por el oxígeno molecular (O_2) y el nitrógeno (N_2) (la dispersión Rayleigh es responsable del color azul del cielo).

La palabra "airmass" está normalmente refiriendo a la airmass relativa, la longitud del camino óptico relativa a su valor al zenit medido desde el nivel del mar, y entonces, por definición, la airmass al nivel del mar al zenit es 1. La airmass está creciendo con el ángulo entre la fuente luminosa y el zenit está creciendo, alcanzando un valor alrededor de 38 al horizonte. Teóricamente, la airmass puede valer menos de 1 a una altitud superior a la del nivel del mar. No obstante, la mayoría de las fórmulas por la airmass no están incluyendo los efectos de la altura, y los ajustamientos deben estar hechos usualmente de otra manera.

Como lo vimos anteriormente, la refracción atmosférica es la razón que obliga la luz de seguir un camino óptico un poco más largo que el trayecto geométrico, y la airmass debe tomar en cuenta este camino óptico más largo. Adicionalmente, la refracción es la razón que hacer que un cuerpo celeste aparece más alto encima del horizonte que lo que realmente es. Al horizonte, la diferencia entre el ángulo cenital real y el ángulo cenital aparente es aproximadamente de 35 minutos de arco. La mayoría de las fórmulas son basadas en el ángulo cenital aparente, pero algunas son basadas en el ángulo cenital real, y es siempre importante de verificar que el valor correcto está usado, especialmente cerca del horizonte.

Atmósfera plana paralela (z = distancia cenital aparente):

$$X = \sec z \quad (con\ z = 90^o - h)$$

Young & Irvine (1967), donde z_t es la distancia cenital real:

$$X = \sec z_t \, (1 - 0.0012 \sec^2 z_t - 1)$$

Hardie (1962) introdujo un polinomio en $\sec z - 1$:

$$X = \sec z - 0.0018167(\sec z - 1) - 0.002875(\sec z - 1)^2 - 0.0008083(\sec z - 1)^3$$

Según Rozenberg (1966), se puede usar la fórmula siguiente:

$$X = \frac{1}{\cos z + 0.025\, e^{-11 \cos z}}$$

Kasten & Young (1989) dan una fórmula un poco más complicada:

$$X = \frac{1}{\cos\, z + 0.50572\,(96.07995 - z)^{-1.6364}}$$

Young (1994) está usando la distancia cenital real z_t:

$$X = \frac{1.002432\,\cos^2\, z_t + 0.148386\,\cos\, z_t + 0.0096467}{\cos^3\, z_t + 0.149864\,\cos^2\, z_t + 0.0102963\,\cos\, z_t + 0.000303978}$$

Pickering (2002) está usando la altura aparente $h = 90^o - z$:

$$X = \frac{1}{\sin(h + \frac{244}{165+47\,h^{1.1}})}$$

Las cuatro últimas fórmulas dan resultados bien coherentes, con una buena precisión, aun por z alrededor de 90^o (entonces un poco encima del horizonte, con h alrededor de 0^o).

16.7.3. Salida y puesta de los astros

Debido al movimiento diurno (y también, pero de una manera casi despreciable, a los otros movimientos de la Tierra, especialmente su movimiento de revolución alrededor del Sol, y a los movimientos de los astros "móviles"), los astros (estrellas, planetas, Luna, Sol, etc.) parecen girar lentamente alrededor del observador. De manera más precisa, podemos observar que los astros parecen girar circularmente alrededor del polo visible encima del horizonte (polo norte en el hemisferio norte y polo sur en el hemisferio sur). Sino por un observador precisamente localizado en el ecuador terrestre, se puede observar dos tipos de astros (por lo que concierne sus movimientos y visibilidad), los astros circumpolares, siempre visibles encima del horizonte, y los astros que tienen salida y puesta, no siempre visibles encima del horizonte. Un observador localizado precisamente en el círculo ecuador puede observar solamente este último caso, ambos polos celestes siendo localizados justo en el horizonte, diametralmente opuestos, hacia el norte geográfico y hacia el sur geográfico, mientras tanto los astros parecen girar verticalmente entre estos dos puntos (en este caso peculiar, el eje polar de la Tierra está horizontal, mientras tanto, desde cualquier otro punto de la Tierra afuera del círculo ecuador, el eje polar está inclinado, con un polo visible, encima del horizonte, y el otro invisible, abajo el horizonte).

Salida y puesta de un astro en un lugar dado:

Para calcular el instante de la salida o de la puesta de un astro de coordenadas ecuatoriales α y δ (aproximativas en el caso de un astro móvil) conocidas al momento del fenómeno considerado, podemos calcular al principio el ángulo horario H al momento de la salida o de la puesta por la fórmula (considerando el triángulo esférico PZA, donde P es el polo visible encima del horizonte, Z es el zenit y A es el astro):

$$\cos\, H = \frac{\sin\, h_0 - \sin\, \varphi\, \sin\, \delta}{\cos\, \varphi\, \cos\, \delta}$$

donde φ es la latitud del lugar y h_0 un ángulo pequeño que vamos a definir un poco después. El tiempo sideral aproximativo de la salida está entonces:

$$TS = \alpha - H$$

y lo de la puesta:

$$TS = \alpha + H$$

A partir del tiempo sideral TS, podemos calcular después el instante del fenómeno en tiempo universal TU (con $k_{ratio} = 1.0027379$):

$$TU = \frac{1}{k_{ratio}} \left(TS - TS_{Greenwich}[0^h TU] + \lambda\right)$$

donde $TS_{Greenwich}[0^h TU]$ es el tiempo sideral de Greenwich a 0h Tiempo Universal y λ la longitud del lugar donde se observa la salida o la puesta del astro considerado.

En el caso de un astro en desplazamiento rápido sobre la esfera celeste (es el caso del Sol, de algunos planetas y especialmente de la Luna), se debe entonces calcular coordenadas ecuatoriales α y δ más precisas por el instante encontrado con una interpolación de las tablas de posiciones y calcular de nuevo H y después TS, usando las fórmulas anteriores, lo que da el instante del fenómeno en tiempo universal TU . Por lo que concierne la Luna, se debe a veces hacer una iteración suplementaria, incluso más.

Por lo que concierne h_0, su expresión general es la siguiente:

$$h_0 = P - R - \frac{1}{2}\,d - \eta_1 + \eta_2$$

P es la paralaje del astro. Este ángulo de paralaje está despreciable por todos los astros sino por la Luna, por la cual $P = 57'$.

R es la refracción al horizonte. La teoría de la refracción de Radau da el valor $R =$ 36′36”, pero se puede usar el valor $R = 34'$ adoptado dentro de las Efemérides Náuticas del Bureau des Longitudes (Francia) y dentro de otras publicaciones internacionales.

$\frac{1}{2}\,d$ es el semi-diámetro aparente del astro. Se debe introducirlo dentro de esta fórmula cuando se calcula la salida y la puesta del borde superior del Sol y de la Luna y no la salida y la puesta del centro del astro. Clásicamente, se usa $\frac{1}{2}\,d = 16'$ tanto por el Sol que por la Luna, aún si este último parámetro es un poco variable alrededor de este valor.

En el caso de un observador ubicado a una altura A encima del nivel del mar, se debe introducir el ángulo $\eta_1 = \frac{a_T}{a_T + A}$ en h_0, donde a_T es el radio de la Tierra. Se elige $a_T = 6378140\,m$. Se puede utilizar la fórmula aproximada:

$$\eta_1 = 1'56" \sqrt{A}$$

A siendo exprimido en metros.

En el caso de la búsqueda de la salida o de la puesta de un astro en un lugar cuyo horizonte está limitado par colinas o montañas de altura D ubicadas a la distancia l del observador, se debe agregar el ángulo η_2 a h_0, de tal manera que:

$$tg(\eta_2) = \frac{D}{l}$$

No se debe buscar a obtener los instantes de la salida o de la puesta de los astros con una precisión superior a un minuto de tiempo, el valor exacto de la refracción al horizonte al momento del fenómeno siendo demasiado mal conocido.

17. Bibliografía

Allen, C. W.: **1973**, *Astrophysical quantities*, 3rd edition, The Athone Press, University of London, United Kingdom.

Annuaire de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides: **2018**, *Éphémérides astronomiques pour 2019*, Masson, Paris.

Auer, L. H. & Standish, E. M.: **May 2000**, *Astronomical refraction: Computational method for all zenith angles*, The Astrophysical Journal, **119**, 2472-2474.

Le grand Atlas Universalis de l'Astronomie, **1986**, Sous la direction de J. Audouze et G. Israël, 2ème édition, Encyclopaedia Universalis, Paris.

Nitschelm, C.: **april de 2008** (última actualización **octubre de 2020**), *Mecánica celeste: Ecuaciones del movimiento*, http://www.astrosurf.com/nitschelm/Mecanica.pdf

Nitschelm, C.: **marzo de 2011** (última actualización **octubre de 2020**), *Introducción a la astronomía esférica y a la mecánica celeste*, http://www.astrosurf.com/nitschelm/astronomia_esferica.pdf

Pérez, J.-P.: **1996**, *Óptique: Fondements et applications*, 5ème édition, Masson, Paris, Milan, Barcelone.

18. Índice de los capítulos

13.6.2. Autocolimación
14. Fotometría
14.1. Grandezas fotométricas
14.1.1. Flujo luminoso emitido por una fuente
14.1.2. Intensidad luminosa de una fuente
14.1.3. Iluminancia de una fuente
14.1.4. Iluminación o irradiancia
14.1.5. Extensión de una haz de luz
14.1.6. Atenuación del flujo luminoso
14.2. Conservación de la extensión y de la luminancia
14.2.1. Extensión de una haz de luz entrando en un sistema centrado
14.2.2. Conservación de la extensión óptica
14.2.3. Conservación de la luminancia
14.3. Aplicación al telescopio
14.3.1. Flujo luminoso colectado por un telescopio
14.3.2. Magnitud
14.4. Fuentes de radiación luminosa
14.4.1. Diferentes fuentes de radiación luminosa
14.4.2. Ampolleta incandescente; Cuerpo negro
14.4.3. Ampolleta a descarga
14.5. Detectores
14.5.1. Características de los detectores ópticos
14.5.2. La placa fotográfica
14.5.3. Detectores a efecto fotoeléctrico
15. La cámara fotográfica
15.1. Descripción de la cámara fotográfica
15.2. Características ópticas de un objetivo fotográfico
15.2.1. Elementos cardinales
15.2.2. Aumento transversal
15.2.3. Campo angular
15.2.4. Apertura; Número de apertura
15.3. Resolución
15.4. Enfoque
15.4.1. Profundidad de campo
15.4.2. Distancia hiperfocal
15.5. Iluminación del plano imagen
15.6. Principio de funcionamiento del teleobjetivo
16. Óptica geométrica en medio no homogéneo
16.1. Ecuación iconal
16.2. Ley fundamental de la óptica geométrica
16.3. Consecuencias
16.3.1. Propagación rectilineal en un medio homogéneo
16.3.2. Leyes de Snell-Descartes
16.4. Trayectoria de un rayo luminoso
16.5. Fibras ópticas
16.5.1. Fibras con salto de índice
16.5.2. Fibras con gradiente de índice
16.5.3. Atenuación de la luz dentro de una fibra óptica