Introducción a la astronomía esférica y a la mecánica celeste

Christian Nitschelm

Octubre de 2020

1. Introducción a la trigonometría esférica

1.1. Generalidades sobre el triángulo esférico

En la superficie de una esfera de radio R (generalmente igual a 1) y de centro O, podemos definir dos puntos A y B no diametralmente opuestos. Por estos dos puntos, podemos construir un círculo máximo único (entonces un círculo de la esfera cuyo centro y radio sean O y R, que será la intersección entre la esfera y un plano del espacio pasando por O, A y B) y uno solo. Existe entonces dos arcos de este círculo máximo, uno inferior a π, uno superior a π. En todo este trabajo, sino mención expresa, el arco usado será siempre lo que es inferior a π o a una mitad de circunferencia de círculo.

1.1.1. Triángulos esféricos

Consideramos tres puntos A, B y C de una esfera de radio R (generalmente igual a 1) y de centro O, de tal manera que ninguna par de puntos no sea diametralmente opuesta, y los juntamos dos por dos con arcos de círculo máximo. La figura obtenida está llamada triángulo esférico. Los puntos A, B y C están llamados los cúspides de este triángulo y los arcos de círculo máximo BC, CA y AB (inferiores a π) son los lados del mismo triángulo. Designaremos a, b y c las longitudes de estos arcos. Podemos decir que estos números son las mediciones en radianes de los arcos BC, CA y AB (en este orden).

Podemos construir las dos tangentes AD y AE a los arcos AB y AC, en los sentidos AB y AC. Las líneas semi-rectas AD y AE forman un ángulo ubicado entre 0 y π que es, por definición, el ángulo A del triángulo esférico. Podemos definir de manera análoga los ángulos B y C, expresados en radianes. Entonces, las seis cantidades a, b, c, A, B y C están llamadas los elementos del triángulo esférico y son todas incluidas entre 0 y π.

El objeto de la trigonometría esférica es la resolución de de los triángulos esféricos, entonces el cálculo de los valores de tres des estos elementos cuando los tres otros están conocidos.

Los dos teoremas de base de los triángulos esféricos son:

a) En un triángulo esférico, un lado cualquiera es más pequeño que la suma de los dos otros;

b) En un triángulo esférico, la suma de los tres lados es inferior a 2π (o a una circunferencia de círculo máximo).

Tenemos entonces las relaciones siguientes:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \\ a + b + c < 2\pi \end{cases} \tag{1}$$

Casos peculiares:

El triángulo esférico trirrectángulo tiene todos sus lados y sus ángulos iguales a $\frac{\pi}{2}$, mientras tanto los triángulos esféricos birrectángulos tienen dos ángulos y los dos lados opuestos iguales a $\frac{\pi}{2}$. Hay también otros casos especiales que vamos a estudiar más tarde durante este curso (triángulos esféricos rectángulos, rectiláteros, isósceles, equiláteros).

1.1.2. Triángulos polares

Llamamos polos de un círculo máximo de una esfera los puntos de encuentro de la esfera y del diámetro de la esfera perpendicular al plano conteniendo este círculo máximo.

Sea ABC un triángulo esférico. Podemos definir el punto A', polo del círculo máximo conteniendo el arco BC, localizado en el mismo hemisferio que el punto A. De la misma manera, podemos definir los polos B' y C', polos de los grandes círculos conteniendo los arcos CA y AB, localizados en los mismos hemisferios que los puntos B y C. Por definición, el triángulo esférico $A'B'C'$ es el triángulo polar del triángulo ABC. Un razonamiento simple muestra inmediatamente que el triángulo esférico ABC es igualmente el triángulo polar del triángulo $A'B'C'$. De manera más sencilla, se dice entonces que los dos triángulos esféricos ABC y $A'B'C'$ son polares.

Podemos concluir que, siendo dados dos triángulos esféricos ABC y $A'B'C'$, los lados de cada uno son los suplementos de los ángulos del otro.

$$\begin{cases} a' = \pi - A \quad b' = \pi - B \quad c' = \pi - C \\ A' = \pi - a \quad B' = \pi - b \quad C' = \pi - c \end{cases} \tag{2}$$

Podemos entonces aplicar las desigualdades (1) a los lados del triángulo $A'B'C'$.

Tenemos:

$$\begin{cases} (\pi - A) < (\pi - B) + (\pi - C) \\ (\pi - B) < (\pi - C) + (\pi - A) \\ (\pi - C) < (\pi - A) + (\pi - B) \\ (\pi - A) + (\pi - B) + (\pi - C) < 2\pi \end{cases}$$

y, finalmente:

$$\begin{cases} \pi + A > B + C \\ \pi + B > C + A \\ \pi + C > A + B \\ A + B + C > \pi \end{cases} \tag{3}$$

Tenemos por fin los dos teoremas siguientes:

a) En un triángulo esférico, un ángulo cualquiera aumentado de π es más grande que la suma de los dos otros;

b) En un triángulo esférico, la suma de los tres ángulos es superior a π.

1.1.3. Principio de dualidad

Supongamos que se puede establecer una relación entre los elementos de un triángulo esférico cualquiera:

$$f(a, b, c, A, B, C) = 0 \tag{4}$$

Podemos aplicar esta relación a los elementos de triángulo polar:

$$f(a', b', c', A', B', C') = 0$$

o, incluyendo las fórmulas (2):

$$f(\pi - A, \pi - B, \pi - C, \pi - a, \pi - b, \pi - c) = 0 \tag{5}$$

Entonces, a cada relación (4) entre los elementos de un triángulo esférico corresponde una otra relación (5), que se puede deducir de la primera sustituyendo los lados por los suplementos de los ángulos y los ángulos por los suplementos de los lados. Es en eso que consista el principio de dualidad, que se puede a menudo aplicar.

1.1.4. Perímetro

Se llama perímetro de un triángulo esférico la suma de sus lados. Por razón de comodidad en los cálculos posteriores, se usa la notación $2p$ para nombrarlo. Tenemos entonces:

$$2p = a + b + c \tag{6}$$

1.1.5. Exceso esférico

Se llama exceso esférico de un triángulo esférico la suma de sus ángulos disminuida de π, o $A+B+C-\pi$ (los ángulos están siempre expresados en radianes). Este exceso esférico está siempre positivo, según (3). Se usa la notación $2E$ para nombrarlo. Tenemos:

$$2E = A + B + C - \pi \tag{7}$$

1.1.6. Superficie de un triángulo esférico

Se puede demostrar que la superficie de un triángulo esférico este dada por la fórmula:

$$S = \frac{\frac{\pi R^2}{2}(A + B + C - \pi)}{\frac{\pi}{2}} = 2ER^2$$

$\frac{\pi R^2}{2}$ siendo la superficie del triángulo esférico trirrectángulo localizado sobre una esfera de radio R. En el caso de un radio R igual a 1, tenemos la relación muy simple $S = 2E$. Podemos concluir que, cuando el radio de la esfera es igual a 1, el exceso esférico es igual a la medición de la superficie del triángulo esférico, la unidad de superficie siendo la superficie del triángulo esférico trirrectángulo.

1.1.7. Relaciones de trigonometría plana

Recordamos aquí las fórmulas clásicas de la trigonometría plana:

$$\begin{cases} tg\, a = \frac{sin\, a}{cos\, a} \\ \\ cotg\, a = \frac{\cos\, a}{\sin\, a} = \frac{1}{tg\, a} \\ \\ \cos^2\, a + \sin^2\, a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin\, a\, \cos\, b + \cos\, a\, \sin\, b \\ \sin(a-b) = \sin\, a\, \cos\, b - \cos\, a\, \sin\, b \\ \cos(a+b) = \cos\, a\, \cos\, b - \sin\, a\, \sin\, b \\ \cos(a-b) = \cos\, a\, \cos\, b + \sin\, a\, \sin\, b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\,2\,a = 2\,\sin\,a\,\cos\,a \\ \cos\,2\,a = \cos^2\,a - \sin^2\,a = 2\,\cos^2\,a - 1 = 1 - 2\,\sin^2\,a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\,a\,\cos\,b = \frac{1}{2}\,(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\ \cos\,a\,\sin\,b = \frac{1}{2}\,(\sin(a+b) - \sin(a-b)) \\ \cos\,a\,\cos\,b = \frac{1}{2}\,(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin\,a\,\sin\,b = \frac{1}{2}\,(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\,u + \sin\,v = 2\,\sin\,\frac{u+v}{2}\,\cos\,\frac{u-v}{2} \\ \\ \sin\,u - \sin\,v = 2\,\cos\,\frac{u+v}{2}\,\sin\,\frac{u-v}{2} \\ \\ \cos\,u + \cos\,v = 2\,\cos\,\frac{u+v}{2}\,\cos\,\frac{u-v}{2} \\ \\ \cos\,u - \cos\,v = -2\,\sin\,\frac{u+v}{2}\,\sin\,\frac{u-v}{2} = 2\,\sin\,\frac{u+v}{2}\,\sin\,\frac{v-u}{2} \end{cases}$$

1.2. Relaciones entre los elementos de un triángulo esférico

1.2.1. Fórmula fundamental de la trigonometría esférica

Podemos proyectar los puntos B y C sobre el radio OA, obteniendo los puntos H y K. Podemos entonces escribir las dos relaciones vectoriales:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} \\ \\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KC} \end{cases}$$

Calculamos ahora el producto escalar de los dos vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$:

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{KC}$$

Pero, tenemos de manera evidente (y por definición de las funciones trigonométricas, $\overrightarrow{OH}$ y $\overrightarrow{OK}$ siendo colineales a $\overrightarrow{OA}$, mientras tanto $\overrightarrow{HB}$ y $\overrightarrow{KC}$ son perpendiculares a $\overrightarrow{OA}$):

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \overline{OB}.\overline{OC}\,\cos(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) \ = \cos\,a \\ \\ \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK} = \overline{OH}.\overline{OK}\,\cos(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OK}) = \cos\,b\,\cos\,c \\ \\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{OK} = \overline{HB}.\overline{OK}\,\cos(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{OK}) = 0 \\ \\ \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{KC} = \overline{OH}.\overline{KC}\,\cos(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{KC}) = 0 \\ \\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{KC} = \overline{HB}.\overline{KC}\,\cos(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{KC}) = \sin\,b\,\sin\,c\,\cos\,A \end{cases}$$

Estamos obteniendo, entonces, la fórmula siguiente, llamada fórmula fundamental de la trigonometría esférica: $\cos\,a = \cos\,b\,\cos\,c + \sin\,b\,\sin\,c\,\cos\,A$.

Con permutaciones circulares entre las letras a, b, c y A, B, C, estamos obteniendo el primer grupo de relaciones entre los elementos de un triángulo esférico (sistema I):

$$\begin{cases} \cos\,a = \cos\,b\,\cos\,c + \sin\,b\,\sin\,c\,\cos\,A \\ \cos\,b = \cos\,c\,\cos\,a + \sin\,c\,\sin\,a\,\cos\,B \\ \cos\,c = \cos\,a\,\cos\,b + \sin\,a\,\sin\,b\,\cos\,C \end{cases} \tag{8}$$

Aplicando el principio de dualidad (ecuaciones (4) y (5)) a las fórmulas (8), obtenemos el segundo grupo de relaciones entre los elementos de un triángulo esférico (sistema I^{bis}):

$$\begin{cases} \cos\ A = -\cos\ B\ \cos\ C + \sin\ B\ \sin\ C\ \cos\ a \\ \cos\ B = -\cos\ C\ \cos\ A + \sin\ C\ \sin\ A\ \cos\ b \\ \cos\ C = -\cos\ A\ \cos\ B + \sin\ A\ \sin\ B\ \cos\ c \end{cases} \tag{9}$$

1.2.2. Analogía de los senos (I)

A partir de la primera de las fórmulas (8), podemos deducir:

$$\cos\ A = \frac{\cos\ a - \cos\ b\ \cos\ c}{\sin\ b\ \sin\ c}$$

Lo que podemos transformar en:

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{\sin^2\ b\ \sin^2\ c - (\cos\ a - \cos\ b\ \cos\ c)^2}{\sin^2\ b\ \sin^2\ c}$$

Podemos escribir esta fórmula de otra manera:

$$\sin^2 A = \frac{(\sin\ b\ \sin\ c + \cos\ a - \cos\ b\ \cos\ c)(\sin\ b\ \sin\ c - \cos\ a + \cos\ b\ \cos\ c)}{\sin^2\ b\ \sin^2\ c}$$

o, todavía:

$$\sin^2 A = \frac{(\cos\ a - \cos(b+c))(\cos(b-c) - \cos\ a)}{\sin^2\ b\ \sin^2\ c}$$

Podemos aquí aplicar la fórmula bien conocida $\cos\ u - \cos\ v = -2\ \sin(\frac{u+v}{2})\ \sin(\frac{u-v}{2})$:

$$\sin^2 A = \frac{4\ \sin(\frac{a+b+c}{2})\ \sin(\frac{b+c-a}{2})\ \sin(\frac{a+b-c}{2})\ \sin(\frac{c+a-b}{2})}{\sin^2\ b\ \sin^2\ c}$$

Usando la fórmula (6), podemos escribir:

$$\begin{cases} a+b+c = 2p \\ b+c-a = 2p-2a \\ c+a-b = 2p-2b \\ a+b-c = 2p-2c \end{cases} => \begin{cases} \frac{a+b+c}{2} = p \\ \frac{b+c-a}{2} = p-a \\ \frac{c+a-b}{2} = p-b \\ \frac{a+b-c}{2} = p-c \end{cases}$$

Entonces, el valor de $\sin^2 A$ toma ahora la forma:

$$\sin^2 A = \frac{4\ \sin\ p\ \sin(p-a)\ \sin(p-b)\ \sin(p-c)}{\sin^2\ b\ \sin^2\ c}$$

lo que da, después de la división por $\sin^2\ a$:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2\ a} = \frac{4\ \sin\ p\ \sin(p-a)\ \sin(p-b)\ \sin(p-c)}{\sin^2\ a\ \sin^2\ b\ \sin^2\ c}$$

Se puede ver inmediatamente que el segundo miembro de esta ecuación es simétrico con respecto a a, b, c. De la misma manera, podemos calcular $\frac{\sin^2 B}{\sin^2\ b}$ y $\frac{\sin^2 C}{\sin^2\ c}$ a partir de la segunda y de la tercera de las relaciones (8) y podemos mostrar que se encuentra el mismo valor como resultado. Tenemos entonces:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c} = \frac{4 \sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

Como los ángulos y los lados del triángulo esférico están incluidos entre 0 y π, podemos extraer la raíz cuadrada de cada miembro y obtener la analogía de los senos (sistema II):

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = 2\,\frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}}{\sin a \sin b \sin c}$$

El sistema II se puede también escribir de la manera siguiente:

$$\begin{cases} \sin a \sin B = \sin b \sin A \\ \sin b \sin C = \sin c \sin B \\ \sin c \sin A = \sin a \sin C \end{cases}$$

Por otra parte, podemos escribir:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{2m}{\sin a \sin b \sin c} \tag{10}$$

llamando m la cantidad $\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}$. De manera más simple, podemos escribir las tres igualdades siguientes:

$$\begin{cases} \sin A = \frac{2m}{\sin b \sin c} \\ \\ \sin B = \frac{2m}{\sin c \sin a} \\ \\ \sin C = \frac{2m}{\sin a \sin b} \end{cases} \tag{11}$$

Se puede mostrar que la cantidad m puede estar definida de dos maneras diferentes (el lector podrá verificar sólo la segunda debido al cálculo anterior):

$$\begin{cases} m = \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)} \\ \\ 2m = \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c} \end{cases}$$

Por supuesto, podemos de nuevo aplicar el principio de dualidad a nuestras fórmulas (ver el capítulo 1.2.3.). Entonces, $a+b+c = 2p$ se transforma en $\pi - A + \pi - B + \pi - C = 3\pi - (A+B+C) = 2\pi - 2E$, debido a la ecuación (7). Podemos entonces ver que p se transforma en $\pi - E$, $p-a$ en $A-E$, $p-b$ en $B-E$ y $p-c$ en $C-E$. La cantidad m se cambia entonces en M, cantidad definida por las dos relaciones siguientes:

$$\begin{cases} M = \sqrt{\sin E \sin(A-E) \sin(B-E) \sin(C-E)} \\ \\ 2M = \sqrt{1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C} \end{cases}$$

Las relaciones (10) y (11) se vuelven a ser:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \frac{2M}{\sin A \sin B \sin C}$$

$$\begin{cases} \sin\, a = \frac{2M}{\sin\, B\, \sin\, C} \\ \\ \sin\, b = \frac{2M}{\sin\, C\, \sin\, A} \\ \\ \sin\, c = \frac{2M}{\sin\, A\, \sin\, B} \end{cases}$$

Posamos:

$$\lambda = \frac{\sin\, A}{\sin\, a} = \frac{\sin\, B}{\sin\, b} = \frac{\sin\, C}{\sin\, c}$$

Tenemos:

$$\lambda = \frac{2m}{\sin\, a\, \sin\, b\, \sin\, c} \qquad\qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{2M}{\sin\, A\, \sin\, B\, \sin\, C}$$

Dividiendo miembro por miembro, obtenemos:

$$\lambda^2 = \frac{m}{M}\frac{\sin\, A}{\sin\, a}\frac{\sin\, B}{\sin\, b}\frac{\sin\, C}{\sin\, c} = \frac{m}{M}\lambda^3$$

Después de simplificar, conseguimos el resultado muy simple, $\lambda = \frac{M}{m}$. Podemos escribir:

$$\frac{\sin\, A}{\sin\, a} = \frac{\sin\, B}{\sin\, b} = \frac{\sin\, C}{\sin\, c} = \frac{M}{m}$$

1.2.3. Analogía de los senos (II)

A partir de la primera de las fórmulas (9), podemos deducir:

$$\cos\, a = \frac{\cos\, A + \cos\, B\, \cos\, C}{\sin\, B\, \sin\, C}$$

Lo que podemos transformar en:

$$\sin^2\, a = 1 - \cos^2 a = \frac{\sin^2\, B\, \sin^2\, C - (\cos\, A + \cos\, B\, \cos\, C)^2}{\sin^2 B\, \sin^2 C}$$

Podemos escribir esta fórmula de otra manera:

$$\sin^2\, a = \frac{(\sin\, B\, \sin\, C - \cos\, A - \cos\, B\, \cos\, C)(\sin\, B\, \sin\, C + \cos\, A + \cos\, B\, \cos\, C)}{\sin^2 B\, \sin^2 C}$$

o, todavía:

$$\sin^2\, a = \frac{-(\cos\, A + \cos(B+C))(cos\, A + \cos(B-C))}{\sin^2 B\, \sin^2 C}$$

Podemos aquí aplicar la fórmula bien conocida $\cos\, u + \cos\, v = 2\, \cos(\frac{u+v}{2})\, \cos(\frac{u-v}{2})$:

$$\sin^2\, a = \frac{-4\, \cos(\frac{A+B+C}{2})\, \cos(\frac{A-B-C}{2})\, \cos(\frac{A+B-C}{2})\, \cos(\frac{A-B+C}{2})}{\sin^2 B\, \sin^2 C}$$

Usando la fórmula (7), podemos escribir:

$$\begin{cases} A+B+C = 2E+\pi \\ B+C-A = 2E-2A+\pi \\ C+A-B = 2E-2B+\pi \\ A+B-C = 2E-2C+\pi \end{cases} => \begin{cases} \frac{A+B+C}{2} = E + \frac{\pi}{2} \\ \frac{B+C-A}{2} = E - A + \frac{\pi}{2} \\ \frac{C+A-B}{2} = E - B + \frac{\pi}{2} \\ \frac{A+B-C}{2} = E - C + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Entonces, el valor de $\sin^2 a$ toma ahora la forma:

$$\sin^2 a = \frac{-4 \cos(E + \frac{\pi}{2}) \cos(E - A + \frac{\pi}{2}) \cos(E - B + \frac{\pi}{2}) \cos(E - C + \frac{\pi}{2})}{\sin^2 B \sin^2 C}$$

lo que se puede transformar inmediatamente en:

$$\sin^2 a = \frac{-4 \sin E \sin(E - A) \sin(E - B) \sin(E - C)}{\sin^2 B \sin^2 C}$$

$$\sin^2 a = \frac{4 \sin E \sin(A - E) \sin(B - E) \sin(C - E)}{\sin^2 B \sin^2 C}$$

Podemos ahora dividir por $\sin^2 A$:

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 A} = \frac{4 \sin E \sin(A - E) \sin(B - E) \sin(C - E)}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}$$

De nuevo, se puede ver inmediatamente que el segundo miembro de esta ecuación es simétrico con respecto a A, B, C. De la misma manera, podemos calcular $\frac{\sin^2 b}{\sin^2 B}$ y $\frac{\sin^2 c}{\sin^2 C}$ a partir de la segunda y de la tercera de las relaciones (8) y podemos mostrar que se encuentra el mismo valor como resultado. Tenemos entonces:

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 b}{\sin^2 B} = \frac{\sin^2 c}{\sin^2 C} = \frac{4 \sin E \sin(A - E) \sin(B - E) \sin(C - E)}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}$$

Como los ángulos y los lados del triángulo esférico están incluidos entre 0 y π, podemos extraer la raíz cuadrada de cada miembro y obtener la analogía de los senos (sistema II):

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = 2 \, \frac{\sqrt{\sin E \sin(A - E) \sin(B - E) \sin(C - E)}}{\sin A \sin B \sin C}$$

Eso nos da una segunda demostración de la analogía de los senos y, así, del sistema II:

$$\begin{cases} \sin a \sin B = \sin b \sin A \\ \sin b \sin C = \sin c \sin B \\ \sin c \sin A = \sin a \sin C \end{cases}$$

1.2.4. Otras relaciones clásicas en el triángulo esférico

Se puede establecer las fórmulas de los cinco elementos, entre los tres lados a, b, c y dos ángulos $(A; B)$, $(B; C)$ o $(C; A)$ (sistema III). Según el sistema I, tenemos:

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \end{cases}$$

multiplicando la primera ecuación por $\cos c$ y la segunda por 1, y, después, sumando las dos, podemos obtener la relación siguiente:

$$\cos a \cos c + \cos b = \cos c \cos a + \cos b \cos^2 c + \sin b \sin c \cos c \cos A + \sin c \sin a \cos B$$

Tenemos entonces:

$$\cos b \,(1 - \cos^2 c) = \sin b \sin c \cos c \cos A + \sin c \sin a \cos B$$

$$\cos b \sin^2 c = \sin c\,(\sin b \cos c \cos A + \sin a \cos B)$$

$$\cos b \sin c = \sin b \cos c \cos A + \sin a \cos B$$

Para finalmente obtener una relación del sistema III:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

sistema III:

$$\begin{cases} \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \\ \sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \\ \sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \\ \sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C \\ \sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C \end{cases} \tag{12}$$

El uso del triángulo polar y del principio de dualidad permite encontrar las relaciones entre dos lados $(a;\, b)$, $(b;\, c)$ o $(c;\, a)$ y tres ángulos A, B, C.

sistema III^{bis}:

$$\begin{cases} \sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \\ \sin A \cos c = \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \\ \sin B \cos c = \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b \\ \sin B \cos a = \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b \\ \sin C \cos a = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c \\ \sin C \cos b = \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c \end{cases} \tag{13}$$

Por otra parte, podemos demostrar las seis relaciones de cuatro elementos, entre dos lados, el ángulo incluido entre los dos, y el ángulo opuesto a uno de los dos.

Según el sistema I, tenemos:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Podemos eliminar el lado c dentro de esta ecuación, usando los sistemas I y II:

$$\begin{cases} \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \\ \sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A} \end{cases}$$

Entonces, podemos escribir:

$$\cos a = \cos b\,(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin b \cos A\,\frac{\sin a \sin C}{\sin A}$$

$$\cos a\,(1 - \cos^2 b) = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin a \sin b\, cotg\, A \sin C$$

$$\cos a \sin^2 b = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin a \sin b\, cotg\, A \sin C$$

Podemos dividir por $\sin a \sin b$ esta ultima ecuación:

$$cotg\, a \sin b = \cos b \cos C + \sin C\, cotg\, A$$

Para finalmente obtener una relación del sistema IV:

$$\cos\, b\, \cos\, C = \sin\, b\, cotg\, a - \sin\, C\, cotg\, A$$

sistema IV:

$$\begin{cases} \cos\, a\, \cos\, B = \sin\, a\, cotg\, c - \sin\, B\, cotg\, C \\ \cos\, a\, \cos\, C = \sin\, a\, cotg\, b - \sin\, C\, cotg\, B \\ \cos\, b\, \cos\, C = \sin\, b\, cotg\, a - \sin\, C\, cotg\, A \\ \cos\, b\, \cos\, A = \sin\, b\, cotg\, c - \sin\, A\, cotg\, C \\ \cos\, c\, \cos\, A = \sin\, c\, cotg\, b - \sin\, A\, cotg\, B \\ \cos\, c\, \cos\, B = \sin\, c\, cotg\, a - \sin\, B\, cotg\, A \end{cases} \tag{14}$$

Con el principio de dualidad, cada una de estas fórmulas se transforma en una otra del mismo grupo (14) de relaciones, lo que el lector podría verificar por el cálculo.

Finalmente, podemos establecer las fórmulas de Cagnoli con los tres lados y los tres ángulos (sistema V) que pueden servir por ciertos cálculos peculiares:

Utilisando las propiedades de los triángulos polares:

$$\sin\, a\, \sin\, c + \cos\, a\, \cos\, c\, \cos\, B = \sin(\pi - A)\, \sin(\pi - C) + \cos(\pi - A)\, \cos(\pi - C)\, \cos(\pi - b)$$

Lo que permite escribir directamente:

$$\sin\, a\, \sin\, c + \cos\, a\, \cos\, c\, \cos\, B = \sin\, A\, \sin\, C - \cos\, A\, \cos\, C\, \cos\, b$$

Sistema V (fórmulas de Cagnoli):

$$\begin{cases} \sin\, a\, \sin\, c + \cos\, a\, \cos\, c\, \cos\, B = \sin\, A\, \sin\, C - \cos\, A\, \cos\, C\, \cos\, b \\ \sin\, b\, \sin\, a + \cos\, b\, \cos\, a\, \cos\, C = \sin\, B\, \sin\, A - \cos\, B\, \cos\, A\, \cos\, c \\ \sin\, c\, \sin\, b + \cos\, c\, \cos\, b\, \cos\, A = \sin\, C\, \sin\, B - \cos\, C\, \cos\, B\, \cos\, a \end{cases}$$

1.2.5. Fórmulas de Borda (ángulo medio en función de los lados)

Debido a la las fórmulas (8), sabemos que:

$$\cos\, A = \frac{\cos\, a - \cos\, b\, \cos\, c}{\sin\, b\, \sin\, c}$$

Podemos deducir de manera evidente que:

$$2\, \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos\, A = \frac{\sin\, b\, \sin\, c + \cos\, a - \cos\, b\, \cos\, c}{\sin\, b\, \sin\, c}$$

o, entonces:

$$2\, \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos\, a - \cos(b + c)}{\sin\, b\, \sin\, c} = \frac{2\, \sin\, \frac{a+b+c}{2}\, \sin\, \frac{b+c-a}{2}}{\sin\, b\, \sin\, c}$$

y, finalmente:

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin\, p\, \sin(p - a)}{\sin\, b\, \sin\, c}$$

Como el segundo miembro es positivo, podemos extraer la raíz cuadrada positiva, el ángulo $\frac{A}{2}$ siendo incluido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\,p\,\sin(p-a)}{\sin\,b\,\sin\,c}} \tag{15}$$

De la misma manera, tenemos:

$$2\,\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos\,A=\frac{\sin\,b\,\sin\,c-\cos\,a+\cos\,b\,\cos\,c}{\sin\,b\,\sin\,c}$$

o, entonces:

$$2\,\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\cos(b-c)-\cos\,a}{\sin\,b\,\sin\,c}=\frac{2\,\sin\,\frac{a+b-c}{2}\,\sin\,\frac{a-b+c}{2}}{\sin\,b\,\sin\,c}$$

y, de la misma manera:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sin(p-b)\,\sin(p-c)}{\sin\,b\,\sin\,c}$$

Finalmente:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\,\sin(p-c)}{\sin\,b\,\sin\,c}} \tag{16}$$

Podemos dividir esta última relación (16) por la relación (15). Obtenemos entonces:

$$tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\,\sin(p-c)}{\sin\,p\,\sin(p-a)}}$$

Tenemos entonces tres nuevos grupos de fórmulas, el último grupo siendo llamado fórmulas de Borda:

$$\begin{cases}\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\,p\,\sin(p-a)}{\sin\,b\,\sin\,c}}\\[2ex] \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin\,p\,\sin(p-b)}{\sin\,c\,\sin\,a}}\\[2ex] \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin\,p\,\sin(p-c)}{\sin\,a\,\sin\,b}}\end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases}\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\,\sin(p-c)}{\sin\,b\,\sin\,c}}\\[2ex] \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\,\sin(p-a)}{\sin\,c\,\sin\,a}}\\[2ex] \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\,\sin(p-b)}{\sin\,a\,\sin\,b}}\end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases}tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\,\sin(p-c)}{\sin\,p\,\sin(p-a)}}\\[2ex] tg\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\,\sin(p-a)}{\sin\,p\,\sin(p-b)}}\\[2ex] tg\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\,\sin(p-b)}{\sin\,p\,\sin(p-c)}}\end{cases} \tag{19}$$

Podemos ahora aplicar el principio de dualidad a estos tres grupos de relaciones (17), (18) y (19). Obtenemos entonces tres grupos suplementarios de fórmulas:

$$\begin{cases} \sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin E\ \sin(A-E)}{\sin B\ \sin C}} \\ \sin\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin E\ \sin(B-E)}{\sin C\ \sin A}} \\ \sin\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin E\ \sin(C-E)}{\sin A\ \sin B}} \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B-E)\ \sin(C-E)}{\sin B\ \sin C}} \\ \cos\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin(C-E)\ \sin(A-E)}{\sin C\ \sin A}} \\ \cos\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin(A-E)\ \sin(B-E)}{\sin A\ \sin B}} \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} tg\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin E\ \sin(A-E)}{\sin(B-E)\ \sin(C-E)}} \\ tg\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin E\ \sin(B-E)}{\sin(C-E)\ \sin(A-E)}} \\ tg\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin E\ \sin(C-E)}{\sin(A-E)\ \sin(B-E)}} \end{cases} \tag{22}$$

Todas las cantidades al interior de las raíces son positivas.

1.2.6. Fórmulas de Delambre

Sabemos que:

$$\sin\frac{A+B}{2} = \sin\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\ \cos\frac{A}{2}$$

Utilizando las fórmulas (17) y (18), podemos escribir:

$$\sin\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\ \sin(p-c)\ \sin p\ \sin(p-b)}{\sin b\ \sin c\ \sin c\ \sin a}}$$

$$\sin\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2} = \frac{\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\ \sin(p-c)}{\sin b\ \sin a}} = \frac{\sin(p-b)}{\sin c}\ \cos\frac{C}{2}$$

y también:

$$\sin\frac{B}{2}\ \cos\frac{A}{2} = \frac{\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\ \sin(p-c)}{\sin b\ \sin a}} = \frac{\sin(p-a)}{\sin c}\ \cos\frac{C}{2}$$

Podemos entonces deducir de estas dos últimas fórmulas que:

$$\sin\frac{A+B}{2} = \frac{\sin(p-b)+\sin(p-a)}{\sin c}\ \cos\frac{C}{2} = \frac{2\ \sin\frac{2p-a-b}{2}\ \cos\frac{a-b}{2}}{\sin c}\ \cos\frac{C}{2}$$

$$=> \sin\frac{A+B}{2} = \frac{2\ \sin\frac{c}{2}\ \cos\frac{a-b}{2}}{2\ \sin\frac{c}{2}\ \cos\frac{c}{2}}\ \cos\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\ \cos\frac{C}{2}$$

Y, separando los ángulos y los lados:

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

De manera análoga, tenemos:

$$\sin\frac{A-B}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\sin(p-b)-\sin(p-a)}{\sin\, c}\cos\frac{C}{2}$$

$$=> \sin\frac{A-B}{2} = \frac{2\,\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{2p-a-b}{2}}{\sin\, c}\cos\frac{C}{2} = \frac{2\,\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{c}{2}}{2\,\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2}$$

Y, separando los ángulos y los lados:

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$$

Por otra parte, sabemos que:

$$\cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

Utilizando las fórmulas (17) y (18), podemos escribir:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin\, p\,\sin(p-a)\,\sin\, p\,\sin(p-b)}{\sin\, b\,\sin\, c\,\sin\, c\,\sin\, a}}$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \frac{\sin\, p}{\sin\, c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\,\sin(p-b)}{\sin\, a\,\sin\, b}} = \frac{\sin\, p}{\sin\, c}\sin\frac{C}{2}$$

y también:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\,\sin(p-c)\,\sin(p-c)\,\sin(p-a)}{\sin\, b\,\sin\, c\,\sin\, c\,\sin\, a}}$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{\sin(p-c)}{\sin\, c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\,\sin(p-b)}{\sin\, a\,\sin\, b}} = \frac{\sin(p-c)}{\sin\, c}\sin\frac{C}{2}$$

Podemos entonces deducir de estas dos últimas fórmulas que:

$$\cos\frac{A+B}{2} = \frac{\sin\, p - \sin(p-c)}{\sin\, c}\sin\frac{C}{2} = \frac{2\,\sin\frac{c}{2}\cos\frac{2p-c}{2}}{\sin\, c}\sin\frac{C}{2}$$

$$=> \cos\frac{A+B}{2} = \frac{2\,\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{\sin\, c}\sin\frac{C}{2} = \frac{2\,\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{2\,\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}$$

Y, separando los ángulos y los lados:

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

De manera análoga, tenemos:

$$\cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{A}{2}\,\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\,\sin\frac{B}{2} = \frac{\sin\,p + \sin(p-c)}{\sin\,c}\,\sin\frac{C}{2}$$

$$=> \cos\frac{A-B}{2} = \frac{2\,\sin\frac{2p-c}{2}\,\cos\frac{c}{2}}{\sin\,c}\,\sin\frac{C}{2} = \frac{2\,\sin\frac{a+b}{2}\,\cos\frac{c}{2}}{2\,\sin\frac{c}{2}\,\cos\frac{c}{2}}\,\sin\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\,\sin\frac{C}{2}$$

Y, separando los ángulos y los lados:

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$$

Obtenemos ahora las cuatro fórmulas de Delambre por los ángulos A y B:

$$\begin{cases} \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \\ \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \\ \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \\ \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \end{cases}$$

Cualquier de estas fórmulas puede dar dos otras por permutación circular de las letras A, B, C y a, b, c. Entonces, tenemos las 12 fórmulas de Delambre:

$$\begin{cases} \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} & \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}} & \frac{\sin\frac{C+A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{\cos\frac{c-a}{2}}{\cos\frac{b}{2}} \\ \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} & \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}} & \frac{\sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{\sin\frac{c-a}{2}}{\sin\frac{b}{2}} \\ \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} & \frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}} & \frac{\cos\frac{C+A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{\cos\frac{c+a}{2}}{\cos\frac{b}{2}} \\ \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} & \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}} & \frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{\sin\frac{c+a}{2}}{\sin\frac{b}{2}} \end{cases} \quad (23)$$

Usando el principio de dualidad, la primera de las relaciones (23) se transforma en la cuarta y reciprocidad, mientras tanto la segunda y la tercera no están modificadas. No se obtiene ninguna fórmula nueva.

1.2.7. Analogías de Neper

Dividiendo la primera fórmula de Delambre por la tercera, la segunda por la cuarta, la cuarta por la tercera y la segunda por la primera, obtenemos las cuatro relaciones siguientes, llamadas analogías de Neper por los ángulos A y B:

$$\begin{cases} \dfrac{tg\frac{A+B}{2}}{cotg\frac{C}{2}} = \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \\ \dfrac{tg\frac{A-B}{2}}{cotg\frac{C}{2}} = \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \\ \dfrac{tg\frac{a+b}{2}}{tg\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \\ \dfrac{tg\frac{a-b}{2}}{tg\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} \end{cases}$$

Cualquier de estas fórmulas puede dar dos otras por permutación circular de las letras A, B, C y a, b, c. Entonces, tenemos las 12 analogías de Neper:

$$\begin{cases} \dfrac{tg\frac{A+B}{2}}{cotg\frac{C}{2}} = \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} & \dfrac{tg\frac{B+C}{2}}{cotg\frac{A}{2}} = \dfrac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}} & \dfrac{tg\frac{C+A}{2}}{cotg\frac{B}{2}} = \dfrac{\cos\frac{c-a}{2}}{\cos\frac{c+a}{2}} \\ \dfrac{tg\frac{A-B}{2}}{cotg\frac{C}{2}} = \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} & \dfrac{tg\frac{B-C}{2}}{cotg\frac{A}{2}} = \dfrac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}} & \dfrac{tg\frac{C-A}{2}}{cotg\frac{B}{2}} = \dfrac{\sin\frac{c-a}{2}}{\sin\frac{c+a}{2}} \\ \dfrac{tg\frac{a+b}{2}}{tg\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} & \dfrac{tg\frac{b+c}{2}}{tg\frac{a}{2}} = \dfrac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} & \dfrac{tg\frac{c+a}{2}}{tg\frac{b}{2}} = \dfrac{\cos\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{C+A}{2}} \\ \dfrac{tg\frac{a-b}{2}}{tg\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} & \dfrac{tg\frac{b-c}{2}}{tg\frac{a}{2}} = \dfrac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}} & \dfrac{tg\frac{c-a}{2}}{tg\frac{b}{2}} = \dfrac{\sin\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{C+A}{2}} \end{cases} \tag{24}$$

1.2.8. Fórmula de Simón L'Huillier

Se puede establecer una fórmula que otorgue el cuarto del exceso esférico $2E$ y que puede servir a la verificación de los elementos de un triángulo esférico. La definición del exceso esférico ($2E = A + B + C - \pi$) permite escribir la relación siguiente:

$$\cos E = \sin\frac{A+B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}$$

A esta etapa del calculo, podemos utilizar dos de las fórmulas de Delambre demostradas anteriormente, $\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}\,\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$ y $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}\,\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$, y, entonces, escribir:

$$\cos E = \frac{1}{cos\frac{a}{2}}\left[\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2}\right]$$

Y podemos transformar nuestro resultado en:

$$\cos E = \frac{1}{2\,cos\frac{a}{2}}\left[(1-\cos A)\cos\frac{b+c}{2} + (1+\cos A)\cos\frac{b-c}{2}\right]$$

Finalmente, un calculo simple permite obtener:

$$\cos E = \frac{4\,\cos^2\frac{b}{2}\,\cos^2\frac{c}{2} + \sin\,b\,\sin\,c\,\cos\,A}{4\,cos\frac{a}{2}\,cos\frac{b}{2}\,cos\frac{c}{2}}$$

No obstante, el sistema I nos dice que:

$$\sin\,b\,\sin\,c\,\cos\,A = \cos\,a - \cos\,b\,\cos\,c = 2\left[cos^2\frac{a}{2} + cos^2\frac{b}{2} + cos^2\frac{c}{2} - 1 - 2\,cos^2\frac{b}{2}\,cos^2\frac{c}{2}\right]$$

Podemos, entonces, sustituir y obtener:

$$\cos E = \frac{cos^2\frac{a}{2} + cos^2\frac{b}{2} + cos^2\frac{c}{2} - 1}{2\,cos\frac{a}{2}\,cos\frac{b}{2}\,cos\frac{c}{2}}$$

Está entonces ahora posible de deducir el cuadrado de la tangente de $\frac{(2E)}{4} = \frac{E}{2}$:

$$tg^2\frac{E}{2} = \frac{1-\cos E}{1+\cos E} = \frac{2\,cos\frac{a}{2}\,cos\frac{b}{2}\,cos\frac{c}{2} - cos^2\frac{a}{2} - cos^2\frac{b}{2} - cos^2\frac{c}{2} + 1}{2\,cos\frac{a}{2}\,cos\frac{b}{2}\,cos\frac{c}{2} + cos^2\frac{a}{2} + cos^2\frac{b}{2} + cos^2\frac{c}{2} - 1}$$

Sin embargo, debido a lo que vimos anteriormente, podemos establecer que:

$$\sin^2 A = 4\,sin^2\frac{A}{2}cos^2\frac{A}{2} = (1-\cos A)(1+\cos A)$$

$$\sin^2 A = \left[\frac{\sin\,b\,\sin\,c - \cos\,a + \cos\,b\,\cos\,c}{\sin\,b\,\sin\,c}\right]\left[\frac{\sin\,b\,\sin\,c + \cos\,a - \cos\,b\,\cos\,c}{\sin\,b\,\sin\,c}\right]$$

$$\sin^2 A = \left[\frac{\sin^2\,b\,\sin^2\,c - \cos^2\,a + 2\,\cos\,a\,\cos\,b\,\cos\,c - \cos^2\,b\,\cos^2\,c}{\sin^2\,b\,\sin^2\,c}\right]$$

$$\sin^2 A = \left[\frac{(1-\cos^2\,b)(1-\cos^2\,c) - \cos^2\,a + 2\,\cos\,a\,\cos\,b\,\cos\,c - \cos^2\,b\,\cos^2\,c}{\sin^2\,b\,\sin^2\,c}\right]$$

$$\sin^2 A = \left[\frac{1-\cos^2\,b - \cos^2\,c + cos^2 b\,\cos^2\,c - \cos^2\,a + 2\,\cos\,a\,\cos\,b\,\cos\,c - \cos^2\,b\,\cos^2\,c}{\sin^2\,b\,\sin^2\,c}\right]$$

$$\sin^2 A = \left[\frac{1-\cos^2\,a - \cos^2\,b - \cos^2\,c + 2\,\cos\,a\,\cos\,b\,\cos\,c}{\sin^2\,b\,\sin^2\,c}\right]$$

Mientras tanto la demostración de la analogía de los senos nos mostró (1.2.2.) que:

$$\sin^2 A = \frac{4\,\sin\,p\,\sin(p-a)\,\sin(p-b)\,\sin(p-c)}{\sin^2\,b\,\sin^2\,c}$$

Podemos entonces escribir que:

$$2\,\cos\,a\,\cos\,b\,\cos\,c - \cos^2\,a - \cos^2\,b - \cos^2\,c + 1 = 4\,\sin\,p\,\sin(p-a)\,\sin(p-b)\,\sin(p-c)$$

Y, finalmente, pasando a la mitad de los lados:

$$2\,\cos\frac{a}{2}\,\cos\frac{b}{2}\,\cos\frac{c}{2} - \cos^2\frac{a}{2} - \cos^2\frac{b}{2} - \cos^2\frac{c}{2} + 1 = 4\,\sin\frac{p}{2}\,\sin\frac{p-a}{2}\,\sin\frac{p-b}{2}\,\sin\frac{p-c}{2}$$

Por otra parte, de la misma manera, se puede demostrar igualmente que:

$$2\,\cos\frac{a}{2}\,\cos\frac{b}{2}\,\cos\frac{c}{2} + \cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2} - 1 = 4\,\cos\frac{p}{2}\,\cos\frac{p-a}{2}\,\cos\frac{p-b}{2}\,\cos\frac{p-c}{2}$$

Podemos deducir de todo eso la fórmula de Simón L'Huillier:

$$tg^2\frac{E}{2} = tg\frac{p}{2}\,tg\frac{p-a}{2}\,tg\frac{p-b}{2}\,tg\frac{p-c}{2}$$

1.3. Triángulos esféricos rectángulos, rectiláteros, isósceles, equiláteros

1.3.1. El triángulo esférico rectángulo

Existen tres tipos de triángulos esféricos rectángulos, el triángulo esférico trirrectángulo ($A = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{2}$ y $a = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$, $c = \frac{\pi}{2}$), el triángulo esférico birrectángulo ($A = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\pi}{2}$, $C \neq \frac{\pi}{2}$ y $a = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$, $c \neq \frac{\pi}{2}$) y el triángulo esférico (mono)rectángulo ($A = \frac{\pi}{2}$, $B \neq \frac{\pi}{2}$, $C \neq \frac{\pi}{2}$ y $a \neq \frac{\pi}{2}$, $b \neq \frac{\pi}{2}$, $c \neq \frac{\pi}{2}$), que vamos a llamar triángulo esférico rectángulo a lo largo de este curso. Vamos a estudiar este último caso, con sistemáticamente el ángulo recto en A. El lado opuesto a se llama la hipotenusa, mientras tanto b y c son los dos lados del ángulo recto. Los ángulos B y C están llamados ángulos oblicuos. Podemos sustituir A por su valor $\frac{\pi}{2}$ en las ecuaciones (8), (9) y (10) y obtener:

$$\begin{cases} \cos\, a = \cos\, b\, \cos\, c \\ \cos\, a = \mathit{cotg}\, B\, \mathit{cotg}\, C \\ \cos\, B = \cos\, b\, \sin\, C \\ \cos\, C = \cos\, c\, \sin\, B \\ \sin\, b = \sin\, B\, \sin\, a \\ \sin\, c = \sin\, C\, \sin\, a \end{cases} \tag{25}$$

A partir de combinaciones de estas fórmulas o de las ecuaciones (22), podemos deducir un otro grupo de cuatro fórmulas que se puede usar dentro de ciertas circunstancias:

$$\begin{cases} \mathit{tg}\, b = \cos\, C\; \mathit{tg}\, a \\ \mathit{tg}\, c = \cos\, B\; \mathit{tg}\, a \\ \mathit{tg}\, b = \sin\, c\; \mathit{tg}\, B \\ \mathit{tg}\, c = \sin\, b\; \mathit{tg}\, C \end{cases} \tag{26}$$

Tenemos entonces diez relaciones entre los elementos de un triángulo esférico rectángulo.

1.3.2. El triángulo esférico rectilátero

Llamamos triángulo esférico rectilátero un triángulo esférico que tiene un lado igual a $\frac{\pi}{2}$. Por razón de simetría, podemos imponer que este lado se llama siempre a. un cálculo muy simple muestra que el triángulo polar de un triángulo esférico rectilátero es un triángulo esférico rectángulo. La resolución de un tal triángulo será entonces muy fácil por pasaje al triángulo polar y vuelta. Las ecuaciones (8), (9) y (10) dan el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \cos\, A = -\cos\, B\, \cos\, C \\ \cos\, A = -\mathit{cotg}\, b\, \mathit{cotg}\, c \\ \cos\, b = \cos\, B\, \sin\, c \\ \cos\, c = \cos\, C\, \sin\, b \\ \sin\, B = \sin\, A\, \sin\, b \\ \sin\, C = \sin\, A\, \sin\, c \end{cases} \tag{27}$$

A partir de combinaciones de estas fórmulas o de las ecuaciones (22), podemos también deducir un otro grupo de cuatro fórmulas que se debe usar dentro de ciertas circunstancias:

$$\begin{cases} \mathit{tg}\, B = -\cos\, c\; \mathit{tg}\, A \\ \mathit{tg}\, C = -\cos\, b\; \mathit{tg}\, A \\ \mathit{tg}\, B = \sin\, C\; \mathit{tg}\, b \\ \mathit{tg}\, C = \sin\, B\; \mathit{tg}\, c \end{cases} \tag{28}$$

Tenemos entonces diez relaciones entre los elementos de un triángulo esférico rectilátero.

1.3.3. El triángulo esférico isósceles

Llamamos triángulo esférico isósceles un triángulo esférico que tiene dos ángulos iguales y, entonces, los dos lados opuestos iguales. El triángulo esférico birrectángulo es un caso peculiar de este tipo. Vamos a suponer que los valores de los ángulos B y C son iguales, y entonces los lados b y c son también iguales. Las ecuaciones (8), (9) y (10) dan:

$$\begin{cases} \cos\, a = \cos^2\, b + \sin^2\, b\, \cos\, A \\ \cos\, A = -\cos^2\, B + \sin^2\, B\, \cos\, a \\ \sin\, a\, \sin\, B = \sin\, b\, \sin\, A \\ \cos\, b = \cos\, b\, \cos\, a + \sin\, b\, \sin\, a\, \cos\, B \\ \cos\, B = -\cos\, B\, \cos\, A + \sin\, B\, \sin\, A\, \cos\, b \end{cases}$$

Las dos últimas fórmulas pueden estar transformadas:

$$\begin{cases} (1 - \cos\, a)\, \cos\, b = \sin\, b\, \sin\, a\, \cos\, B \\ (1 + \cos\, A)\, \cos\, B = \sin\, B\, \sin\, A\, \cos\, b \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} (1 - 1 + 2\, \sin^2 \frac{a}{2})\, \cos\, b = 2\, \sin\, \frac{a}{2}\, \cos\, \frac{a}{2}\, \sin\, b\, \cos\, B \\ (1 + 2\, \cos^2 \frac{A}{2} - 1)\, \cos\, B = 2\, \sin\, \frac{A}{2}\, \cos\, \frac{A}{2}\, \sin\, B\, \cos\, b \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} \sin\, \frac{a}{2}\, \cos\, b = \sin\, b\, \cos\, \frac{a}{2}\, \cos\, B \\ \cos\, \frac{A}{2}\, \cos\, B = \sin\, B\, \sin\, \frac{A}{2}\, \cos\, b \end{cases} => \begin{cases} tg\frac{a}{2} = tg\, b\, \cos\, B \\ cotg\frac{A}{2} = tg\, B\, \cos\, b \end{cases}$$

Estas fórmulas permiten resolver los problemas con triángulos esféricos isósceles.

1.3.4. El triángulo esférico equilátero

Llamamos triángulo esférico equilátero un triángulo esférico que tiene sus tres ángulos A, B y C iguales y sus tres lados a, b y c iguales. Las ecuaciones (10) pierden todo interés, mientras tanto las ecuaciones (8) y (9) dan:

$$\begin{cases} \cos\, a = \cos^2\, a + \sin^2\, a\, \cos\, A \\ \cos\, A = -\cos^2\, A + \sin^2\, A\, \cos\, a \end{cases} => \begin{cases} \cos\, A = cotg\, a\, tg\frac{a}{2} \\ \cos\, a = cotg\, A\, cotg\frac{A}{2} \end{cases}$$

Por otra parte, podemos escribir estas dos fórmulas de otra manera:

$$\begin{cases} \cos\, a - \cos^2\, a = \sin^2\, a\, \cos\, A \\ \cos\, A + \cos^2\, A = \sin^2\, A\, \cos\, a \end{cases} => \begin{cases} \cos\, a\, (1 - \cos\, a) = (1 - \cos^2\, a)\, \cos\, A \\ \cos\, A\, (1 + \cos\, A) = (1 - \cos^2\, A)\, \cos\, a \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} \cos\, a = (1 + \cos\, a)\, \cos\, A \\ \cos\, A = (1 - \cos\, A)\, \cos\, a \end{cases} => \begin{cases} \frac{1}{\cos\, A} = 1 + \frac{1}{\cos\, a} \\ \frac{1}{\cos\, a} = \frac{1}{\cos\, A} - 1 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones dan entonces la misma relación $\frac{1}{\cos\, A} = 1 + \frac{1}{\cos\, a}$ entre el valor del ángulo A y el lado a. Por otra parte, sabemos que, en cualquier triángulo esférico, la inigualdad $A + B + C > \pi$, dada en (3), está verificada. El el caso de un triángulo esférico equilátero, tenemos entonces $3\, A > \pi$, o, finalmente, $A > \frac{\pi}{3}$.

1.4. El grupo de Gauss

Dentro de un referencial directo O, x, y, z del espacio, podemos construir un triángulo esférico ABC siguiendo nuestras convenciones anteriores, de manera tal que el punto B está ubicado sobre el eje Oz y que el punto A está ubicado en el plano xOz, de tal manera que la abscisa del punto A sea negativa (si C' es la proyección de C sobre el plano xOy, el ángulo $x\widehat{OC}'$ será igual a $\pi - B$). Además, disponemos el eje Oy al lado del plano xOz donde se ubica el punto C. Las coordenadas del punto C están entonces:

$$\begin{cases} x = -\sin a \cos B \\ y = \sin a \sin B \\ z = \cos a \end{cases}$$

Hagamos girar el referencial de coordenadas de un ángulo c alrededor de Oy, de tal manera que el punto A va a estar incluido en el eje Oz'.

Las coordenadas de C del nuevo sistema son:

$$\begin{cases} x' = \sin b \cos A \\ y' = \sin b \sin A \\ z' = \cos b \end{cases}$$

Los dos sistemas de coordenadas satisfacen a las relaciones siguientes:

$$\begin{cases} x = x' \cos c - z' \sin c \\ y = y' \\ z = z' \cos c + x' \sin c \end{cases}$$

Podemos entonces incluir los dos primeros grupos de relaciones en estas últimas fórmulas. Obtenemos las relaciones siguientes, que contienen solamente los elementos del triángulo esférico:

$$\begin{cases} \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \sin B = \sin b \sin A \\ \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \end{cases}$$

Estas relaciones, llamadas grupo de Gauss, expresan un cambio de coordenadas por rotación de los ejes alrededor de uno de ellos y permiten resolver todos los problemas de esta naturaleza. Todas las relaciones del primer orden (que incluyen solamente los lados y los ángulos enteros) des sistemas I, I^{bis}, II, III, III^{bis} y IV pueden estar deducidas del grupo de Gauss o de sus permutaciones.

1.5. Resolución de los triángulos esféricos

Podemos calcular tres elementos de un triángulo esférico cuyos tres otros están conocidos. Indicamos aquí brevemente la naturaleza de las soluciones de los diferentes casos que pueden presentarse. Cuando un problema astronómico necesita la resolución de un triángulo, sabemos que estará posible de encontrar por lo menos una solución. Cuando posee más que una, los datos concretos permiten descartar la (o las) que no conviene(n).

Es bastante evidente de ver que hay seis combinaciones diferentes de tres elementos: tres lados, tres ángulos, dos lados y el ángulo localizado entre ellos, dos ángulos y el lado común, dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, o dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos. Los casos más frecuentes en astronomía son los donde conocemos dos o tres lados.

En el caso de los triángulos esféricos especiales (rectángulos, rectiláteros, isósceles, equiláteros), las fórmulas a utilizar son peculiares, debido a la propiedad especial de cada triángulo esférico. Estos casos especiales serán estudiados en un capítulo posterior.

1.5.1. Primer caso: Datos a, b, c; Incógnitas: A, B, C

Primera solución: Las fórmulas del sistema I (8) dan inmediatamente la solución del problema y pueden ser escritas de dos formas diferentes:

$$\begin{cases} \cos\,A = \frac{\cos\,a - \cos\,b\,\cos\,c}{\sin\,b\,\sin\,c} = \frac{2\,\cos\,a - \cos(b+c) - \cos(b-c)}{\cos(b-c) - \cos(b+c)} \\ \cos\,B = \frac{\cos\,b - \cos\,c\,\cos\,a}{\sin\,c\,\sin\,a} = \frac{2\,\cos\,b - \cos(c+a) - \cos(c-a)}{\cos(c-a) - \cos(c+a)} \\ \cos\,C = \frac{\cos\,c - \cos\,a\,\cos\,b}{\sin\,a\,\sin\,b} = \frac{2\,\cos\,c - \cos(a+b) - \cos(a-b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)} \end{cases} \tag{29}$$

Segunda solución: Las fórmulas de Borda (19) dan inmediatamente, también, la solución del problema, especialmente en caso de uso de tablas de logaritmos:

$$\begin{cases} tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\,\sin(p-c)}{\sin\,p\,\sin(p-a)}} \\ tg\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-c)\,\sin(p-a)}{\sin\,p\,\sin(p-b)}} \\ tg\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\,\sin(p-b)}{\sin\,p\,\sin(p-c)}} \end{cases}$$

Tercera solución: Fórmulas de la tangente del semi arco:

Debido a la las fórmulas (8), sabemos que:

$$\cos\,A = \frac{\cos\,a - \cos\,b\,\cos\,c}{\sin\,b\,\sin\,c}$$

Lo que da:

$$\begin{cases} 1 - \cos\,A = 1 - \frac{\cos\,a - \cos\,b\,\cos\,c}{\sin\,b\,\sin\,c} = \frac{\sin\,b\,\sin\,c - \cos\,a + \cos\,b\,\cos\,c}{\sin\,b\,\sin\,c} = \frac{\cos(b-c) - \cos\,a}{\sin\,b\,\sin\,c} \\ 1 + \cos\,A = 1 + \frac{\cos\,a - \cos\,b\,\cos\,c}{\sin\,b\,\sin\,c} = \frac{\sin\,b\,\sin\,c + \cos\,a - \cos\,b\,\cos\,c}{\sin\,b\,\sin\,c} = \frac{\cos\,a - \cos(b+c)}{\sin\,b\,\sin\,c} \end{cases}$$

Podemos dividir la primera expresión por la segunda:

$$tg^2\,\frac{A}{2} = \frac{2\,\sin^2\frac{A}{2}}{2\,\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{1 - \cos\,A}{1 + \cos\,A} = \frac{\cos(b-c) - \cos\,a}{\cos\,a - \cos(b+c)}$$

Y, finalmente, sabiendo que $tg^2\,\frac{A}{2}$ es siempre positivo y haciendo las permutaciones:

$$\begin{cases} tg\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\cos(b-c) - \cos\,a}{\cos\,a - \cos(b+c)}} \\ tg\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\cos(c-a) - \cos\,b}{\cos\,b - \cos(c+a)}} \\ tg\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\cos(a-b) - \cos\,c}{\cos\,c - \cos(a+b)}} \end{cases}$$

1.5.2. Segundo caso: Datos A, B, C; Incógnitas: a, b, c

Primera solución: Las fórmulas del sistema I^{bis} (9) dan la solución de este caso:

$$\begin{cases} \cos\, a = \frac{\cos\, A+\cos\, B\, \cos\, C}{\sin\, B\, \sin\, C} \\ \\ \cos\, b = \frac{\cos\, B+\cos\, C\, \cos\, A}{\sin\, C\, \sin\, A} \\ \\ \cos\, c = \frac{\cos\, C+\cos\, A\, \cos\, B}{\sin\, A\, \sin\, B} \end{cases}$$

Segunda solución: Las fórmulas (22) dan inmediatamente, también, la solución:

$$\begin{cases} tg\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\, E\, \sin(A-E)}{\sin(B-E)\, \sin(C-E)}} \\ tg\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin\, E\, \sin(B-E)}{\sin(C-E)\, \sin(A-E)}} \\ tg\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin\, E\, \sin(C-E)}{\sin(A-E)\, \sin(B-E)}} \end{cases}$$

1.5.3. Tercer caso: Datos b, c, A; Incógnitas: a, B, C

Primera solución: Podemos utilizar el grupo de Gauss en el caso de la determinación inicial de los valores del tercer lado a y de uno (B) de los dos ángulos desconocidos:

$$\begin{cases} \sin\, a\, \sin\, B = \sin\, b\, \sin\, A \\ \sin\, a\, \cos\, B = \cos\, b\, \sin\, c - \sin\, b\, \cos\, c\, \cos\, A \\ \cos\, a = \cos\, b\, \cos\, c + \sin\, b\, \sin\, c\, \cos\, A \end{cases}$$

Después de este cálculo que nos da los valores de a y B, podemos encontrar, finalmente, el valor del segundo ángulo C a partir de la analogía de los senos:

$$\sin\, C = \frac{\sin\, A}{\sin\, a}\, \sin\, c = \frac{\sin\, B}{\sin\, b}\, \sin\, c$$

Segunda solución: Las analogías de Neper nos permiten encontrar los valores de las tres incógnitas: a, B, C. Debido a su uso, obtenemos al principio $\frac{B+C}{2}$, $\frac{B-C}{2}$, y después B y C por adición y sustracción, y finalmente a debido al uso de dos expresiones diferentes, lo que permite una verificación de los resultados:

$$\begin{cases} tg\frac{B-C}{2} = cotg\frac{A}{2}\, \frac{\sin\, \frac{b-c}{2}}{\sin\, \frac{b+c}{2}} \\ \\ tg\frac{B+C}{2} = cotg\frac{A}{2}\, \frac{\cos\, \frac{b-c}{2}}{\cos\, \frac{b+c}{2}} \\ \\ tg\frac{a}{2} = tg\frac{b-c}{2}\, \frac{\sin\, \frac{B+C}{2}}{\sin\, \frac{B-C}{2}} \\ \\ tg\frac{a}{2} = tg\frac{b+c}{2}\, \frac{\cos\, \frac{B+C}{2}}{\cos\, \frac{B-C}{2}} \end{cases}$$

1.5.4. Cuarto caso: Datos a, B, C; Incógnitas: b, c, A

Primera solución: Caso muy similar al último. Podemos utilizar el principio de dualidad con el grupo de Gauss para la determinación de los valores de b y de A:

$$\begin{cases} \sin\, b\, \sin\, A = \sin\, a\, \sin\, B \\ \sin\, b\, \cos\, A = \sin\, C\, \cos\, B + \sin\, B\, \cos\, C\, \cos\, a \\ \cos\, A = -\cos\, B\, \cos\, C + \sin\, B\, \sin\, C\, \cos\, a \end{cases}$$

Después de este cálculo que nos da los valores de b y A, podemos encontrar, finalmente, el valor del segundo ángulo c a partir de la analogía de los senos:

$$\sin\, c = \frac{\sin\, a}{\sin\, A}\, \sin\, C = \frac{\sin\, b}{\sin\, B}\, \sin\, C$$

Segunda solución: De nuevo, las analogías de Neper nos permiten encontrar los valores de las tres incógnitas: b, c, A. Debido a su uso, obtenemos al principio $\frac{b+c}{2}$, $\frac{b-c}{2}$, y después b y c por adición y sustracción, y finalmente A debido al uso de dos expresiones diferentes, lo que permite una verificación de los resultados:

$$\begin{cases} tg\frac{b-c}{2} = tg\frac{a}{2}\, \frac{\sin\, \frac{B-C}{2}}{\sin\, \frac{B+C}{2}} \\ \\ tg\frac{b+c}{2} = tg\frac{a}{2}\, \frac{\cos\, \frac{B-C}{2}}{\cos\, \frac{B+C}{2}} \\ \\ tg\frac{A}{2} = cotg\frac{B-C}{2}\, \frac{\sin\, \frac{b-c}{2}}{\sin\, \frac{b+c}{2}} \\ \\ tg\frac{A}{2} = cotg\frac{B+C}{2}\, \frac{\cos\, \frac{b-c}{2}}{\cos\, \frac{b+c}{2}} \end{cases}$$

1.5.5. Quinto caso: Datos a, b, A; Incógnitas: c, B, C

Primera solución: La analogía de los senos da inmediatamente la relación siguiente:

$$\sin\, B = \frac{\sin\, A}{\sin\, a}\, \sin\, b$$

Cuando el problema es posible, dos soluciones se presentan, con dos valores suplementarios del ángulo B. Podemos siempre distinguir la buena solución que conviene a cada problema. Después, conociendo B, las analogías de Neper sirven para determinar c y C sin ninguna ambigüedad, con una verificación doble:

$$\begin{cases} tg\frac{c}{2} = tg\frac{a-b}{2}\, \frac{\sin\, \frac{A+B}{2}}{\sin\, \frac{A-B}{2}} = tg\frac{a+b}{2}\, \frac{\cos\, \frac{A+B}{2}}{\cos\, \frac{A-B}{2}} \\ \\ tg\frac{C}{2} = cotg\frac{A-B}{2}\, \frac{\sin\, \frac{a-b}{2}}{\sin\, \frac{a+b}{2}} = cotg\frac{A+B}{2}\, \frac{\cos\, \frac{a-b}{2}}{\cos\, \frac{a+b}{2}} \end{cases}$$

Segunda solución: Podemos obtener directamente el ángulo C sin calcular el ángulo B al principio. Los sistemas IV y I nos dan:

$$\begin{cases} \cos\, b\, \cos\, C = cotg\, a\, \sin\, b - \sin\, C\, cotg\, A \\ \cos\, a = \cos\, b\, \cos\, c + \sin\, b\, \sin\, c\, \cos\, A \end{cases}$$

Podemos definir M y N de la manera siguiente:

$$\begin{cases} tg\, M = \cos\, b\, tg\, A \\ tg\, N = \cos\, A\, tg\, b \end{cases}$$

Con esta definición, ambos ecuaciones se escriben:

$$\begin{cases} \sin(M+C) = tg\, b\, cotg\, a \, \sin\, M \\ \\ \cos(c-N) = \frac{\cos\, a\, \cos\, N}{\sin\, b} \end{cases}$$

Estas fórmulas no funcionan mejor que las de la primera solución cuando el ángulo B está demasiado cercano de un ángulo recto (90°). En efecto, podemos mostrar que, en este caso, $\sin(M+C)$ y $\cos(c-N)$ son vecinos de la unidad. La indeterminación numérica es esencial y no puede ser levantada de cualquier manera por el cálculo.

1.5.6. Sexto caso: Datos a, A, B; Incógnitas: b, c, C

Única solución: De la misma manera que por lo que concierne el quinto caso, la analogía de los senos da inmediatamente la relación siguiente:

$$\sin\, b = \frac{\sin\, a}{\sin\, A} \sin\, B$$

Cuando el problema es posible, dos soluciones se presentan, con dos valores suplementarios del lado b. Podemos siempre distinguir la buena solución que conviene a cada problema. Después, conociendo b, las analogías de Neper sirven para determinar c y C sin ninguna ambigüedad, con una verificación doble:

$$\begin{cases} tg\frac{c}{2} = tg\frac{a-b}{2} \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}} = tg\frac{a+b}{2} \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} \\ tg\frac{C}{2} = cotg\frac{A-B}{2} \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} = cotg\frac{A+B}{2} \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \end{cases}$$

2. Astronomía esférica

La astronomía esférica tiene como principal objeto el estudio de las posiciones aparentes de los astros, lo que implica que esta disciplina es la ciencia de los movimientos celestes.

El estudio cinemático del Universo puede estar hecho con respecto a un sistema de referencia definido cualquiera. Cuando cambiamos el sistema de referencia, hay que cambiar también las termas de descripción cinemática del mundo, las dos descripciones siendo válidas, con tal que usan con respecto a sistemas bien definidos.

2.1. Coordenadas diferenciales

Cuando los elementos de un triángulo esférico son variables, podemos obtener relaciones entre sus incrementos infinitamente pequeños, diferenciando las relaciones fundamentales establecidas anteriormente. Como no es común que hacer variar todos los elementos de manera simultánea, no se necesita de escribir las relaciones diferenciales las más generales. Vamos a exponer aquí el caso lo más común en astronomía, en la ocurrencia las relaciones entre las coordenadas de dos puntos vecinos de la esfera y cuya importancia es considerable en práctica. Podemos definir entonces dos puntos A y B tales que el cuadrado del arco AB sea despreciable. Las coordenadas polares del punto A siendo ψ y θ, podemos escribir $\psi + \Delta\psi$ y $\theta + \Delta\theta$ las coordenadas del punto B. Los ángulos $\Delta\psi$ y $\Delta\theta$ son las coordenadas diferenciales de B con respecto a A. El ángulo $\Delta\theta$ es siempre pequeño, con cualquier posición del punto A, mientras tanto el ángulo $\Delta\psi$ queda generalmente pequeño, sino cuando el punto A está localizado demasiado cercano del polo P de coordenadas.

Podemos introducir una nueva notación para describir la posición del punto B con respecto al punto A, con $r = AB$ y $\omega = \widehat{PAB}$. El ángulo ω está llamado el ángulo de posición de B con respecto a A. Su medición se hace desde 0° hasta 360°, en el sentido trigonométrico por un observador localizado en el centro de la esfera, la dirección origen siendo la del polo positivo de coordenadas.

Supongamos que tenemos dos ejes de coordenadas rectangulares cruzándose en el punto A, en el plano tangente a la esfera en este punto. El eje Ax es paralelo al plano fundamental y dirigido en el sentido positivo, lo más generalmente directo, y el eje Ay es perpendicular a Ax y dirigido hacia arriba. Como supongamos que el cuadrado de r pudiese ser desaliño, la distancia del punto B al plano de los ejes es igualmente despreciable, y podemos definir la posición del punto B debido a sus coordenadas $x = r \sin \omega$ e $y = r \cos \omega$. Podemos entonces considerar x e y, o también r y ω como coordenadas diferenciales planas de B con respecto a A. Tienen el gran interés de poder ser directamente mensurables con un sistema micrométrico. Vamos a mostrar como podemos deducir las coordenadas diferenciales esféricas $\Delta\psi$ y $\Delta\theta$. Hay muchas aplicaciones de este cálculo en astronomía, especialmente la medición de la posición de un astro móvil (planeta, asteroide, cometa), o de una estrella (o un objeto no estelar, como una galaxia, por ejemplo) de coordenadas desconocidas, con respecto a una estrella fija de coordenadas conocidas (en un catálogo, por ejemplo).

Al principio, podemos establecer la relación general que da la diferencia de dos lados de un triángulo esférico cualquiera. Los sistemas II y III^{bis} dan las relaciones siguientes:

$$\begin{cases} \cos b \sin A = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \\ \sin b \sin A = \sin a \sin B \end{cases}$$

Podemos multiplicar la primera relación por $\sin a$ y la segunda por $-\cos a$, y añadirlas:

$$\sin A \sin(a - b) = \sin a \cos B \sin C - \sin a \cos a \sin B\,(1 - \cos C)$$

Lo que podemos escribir de la manera siguiente:

$$\sin(a - b) = \sin c\,(\cos B - \cos a \sin B\,tg\frac{C}{2}) \tag{30}$$

Por lo que concierne el triángulo esférico PAB, podemos usar la relación siguiente del sistema IV, con $a = \frac{\pi}{2} - \theta$, $b = \frac{\pi}{2} - (\theta + \Delta\theta)$, $c = r$, $B = \omega$ y $C = \Delta\psi$:

$$\cos a \cos B = \sin a\,cotg\,c - \sin B\,cotg\,C => \sin \theta \cos \omega = \cos \theta\,cotg\,r - \sin \omega\,cotg\,\Delta\psi$$

Con la misma convención por los lados y los ángulos, la relación (30) nos permite determinar $\Delta\theta$, con $a - b = (\frac{\pi}{2} - \theta) - (\frac{\pi}{2} - (\theta + \Delta\theta)) = \Delta\theta$. Tenemos:

$$\begin{cases} tg\,\Delta\psi = \frac{\sin r \sin \omega}{\cos r \cos \theta - \sin r \cos \omega \sin \theta} \\ \\ \sin \Delta\theta = \sin r\,(\cos \omega - \sin \omega \sin \theta\,tg\frac{\Delta\psi}{2})) \end{cases} \tag{31}$$

Las relaciones (31) son rigorosas y pueden ser aplicadas a dos puntos cualquiera de la esfera, aun si su distancia no es pequeña, lo que significa aun si su cuadrado no es despreciable. Pero, cuando podemos desatender el cuadrado de r, se puede sustituir:

$$\begin{cases} \sin r \sin \omega \\ \sin r \cos \omega \\ \cos r \end{cases} \quad por \quad \begin{cases} x = r \sin \omega \\ y = r \cos \omega \\ 1 \end{cases}$$

Esta sustitución nos permite escribir ahora:

$$\begin{cases} \cos\,\theta\, tg\,\Delta\psi = \frac{x}{1-y\,tg\,\theta} \\ \\ \sin\,\Delta\theta = y - x\,\sin\,\theta\, tg\frac{\Delta\psi}{2} \end{cases} \tag{32}$$

Las fórmulas (32) se pueden aplicar solamente cuando el cuadrado de r es despreciable, con una posición cualquiera del punto A en la esfera, y especialmente alrededor de los polos de coordenadas. Podemos también necesitar de resolver el problema inverso, en la esencia, calcular x e y cuando $\Delta\psi$ y $\Delta\theta$ están conocidos. Es entonces suficiente de resolver las ecuaciones (32) con respecto a las nuevas incógnitas x e y. Encontremos fácilmente que:

$$\begin{cases} x = \cos\,\theta\, tg\,\Delta\psi\, \frac{1-tg\,\theta\,\sin\,\Delta\theta}{1+\sin^2\,\theta\, tg\,\Delta\psi\, tg\frac{\Delta\psi}{2}} \\ \\ y = \frac{\sin\,\Delta\theta+\sin\,\theta\,\cos\,\theta\, tg\,\Delta\psi\, tg\frac{\Delta\psi}{2}}{1+\sin^2\,\theta\, tg\,\Delta\psi\, tg\frac{\Delta\psi}{2}} \end{cases} \tag{33}$$

En estas últimas fórmulas, es posible de sustituir los denominadores por la unidad, sino en el caso donde $\Delta\psi$ no es un ángulo pequeño, lo que puede existir solamente en la vecindad de un polo. Además, en las fórmulas (32) y (33), podemos confundir $\sin\,\Delta\theta$ con $\Delta\theta$ con la única suposición que r será pequeño, lo que era nuestra hipótesis de inicio.

Finalmente, si el punto A no se ubica demasiado cercano de un polo, el ángulo $\Delta\psi$ quedando ciertamente pequeño, los termas del segundo orden con respecto a x, y, $\Delta\psi$ y $\Delta\theta$ son todos despreciables, y las fórmulas (32) se pueden reducir a expresiones muy simples, de un uso muy frecuente en astronomía esférica:

$$\begin{cases} \cos\,\theta\,\Delta\psi = x = r\,\sin\,\omega \\ \Delta\theta = y = r\,\cos\,\omega \end{cases}$$

2.2. Sistemas de coordenadas astronómicas

Desde Copérnico, el movimiento diurno está interpretado como una consecuencia del movimiento de rotación de la Tierra. Podemos estudiarlo como un movimiento relativo del conjunto de las estrellas con respecto a referenciales locales inmóviles por un observador terrestre, lo que permite introducir las coordenadas locales. Pero es también conveniente de referenciar las direcciones de las estrellas a un sistema de coordenadas en lo cual sean relacionadas de manera invariable, lo que permite introducir las coordenadas celestes ecuatoriales. Para describir el movimiento diurno de la bóveda celeste, y entonces de las estrellas, basta que describir el movimiento del sistema de referencia ecuatorial con respecto al sistema local. Por eso, se debe introducir el tiempo sideral y la latitud del lugar. Por otra parte, para referenciar un sistema local de un lugar con respecto a otro, debemos definir las longitudes, lo que desemboca sobre el estudio del geoide.

2.2.1. Coordenadas geográficas: λ y φ

La forma de la Tierra no es exactamente esférica, pero es más cercana de un elipsoide de revolución alrededor de su eje polar. La superficie de los océanos, que materializa este forma, tiene el apellido de geoide. Por convención internacional, se usa el elipsoide de referencia adoptado en geodesia que no difiere mucho del geoide, con las características siguientes (radio ecuatorial a, radio polar b, aplanamiento e:

$$\begin{cases} a = 6378137m \\ b = 6356752m \\ e = \frac{1}{298.247} \end{cases}$$

Como, en un lugar cualquiera, el ecuador celeste es paralelo al ecuador de este elipsoide (en movimiento de rotación alrededor de su eje de simetría), la latitud geográfica o astronómica de un lugar A es el ángulo φ que hace la normal al elipsoide con el plano del ecuador (entre $-90°$ por el polo sur y $90°$ por el polo norte). En efecto, la superficie de los océanos forma una superficie de nivel de pesadez, y la vertical en cada punto se está confundiendo con la normal al geoide. Se da el apellido de latitud geocéntrica al ángulo φ' que hace el segmento OA, juntando el centro de la Tierra O con el lugar A, con el plano del ecuador (también entre $-90°$ y $90°$). Introduciendo la anomalía (o latitud excéntrica) u, la pendiente de la normal tiene la expresión:

$$tg\,\varphi = \frac{a}{b}\,tg\,u$$

Mientras tanto el radio vector está dado por la relación:

$$tg\,\varphi' = \frac{b}{a}\,tg\,u$$

La latitud geocéntrica está conectada, entonces, con la latitud astronómica por la relación:

$$tg\,\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\,tg\,\varphi$$

La longitud geográfica o astronómica λ mide el ángulo $\widehat{G'OA'}$, el punto G' siendo la intersección entre el círculo ecuador terrestre y el meridiano terrestre pasando por el lugar origen G, en la ocurrencia el Observatorio de Greenwich en Inglaterra adoptado como meridiano internacional por la conferencia de Washington en 1884, y el punto A' siendo la intersección entre el círculo ecuador terrestre y el meridiano terrestre pasando por el lugar A. La longitud geográfica se mide entre $0°$ y $180°$ (por los marineros) o entre $0h$ y $12h$ (por los astrónomos) positivamente hacia el oeste y negativamente hacia el este (pero se puede encontrar la convención opuesta, usada por los geógrafos).

La determinación de las longitudes ha sido un gran problema de la astronomía durante los siglos XVII y XVIII y ha sido solucionado con el desarrollo de los cronómetros de marina. A nuestra época, el sistema GPS (Global Positioning System) de medición de las longitudes y de las latitudes se hace con la determinación de las posiciones instantáneas muy precisas de varios satélites artificiales al mismo momento.

2.2.2. Primer sistema local de referencia: Coordenadas locales: a, h o z

En cada lugar, existe una dirección privilegiada que podemos determinar con una alta precisión y que podemos pensar cómo siendo invariable, la vertical o dirección de la pesadez, o también la dirección de la normal a la superficie libre de un líquido homogéneo en equilibrio en el lugar considerado. El punto director Z de la vertical está llamado el cenit. El círculo máximo H que materializa el plano tangente a la superficie libre de un líquido homogéneo en equilibrio es el horizonte, y tiene como polo el cenit. El punto N de la esfera diametralmente opuesto al cenit es el nadir. Horizonte, cenit y nadir son elementos de la esfera local. Así, en cualquier lugar de la superficie de la Tierra, hay solamente una parte de la esfera celeste visible, la parte entre el horizonte y el cenit.

Una dirección cualquiera pudiendo ser referenciada con alta precisión a estos elementos, parece muy natural de elegir el horizonte como plano fundamental de un sistema de coordenadas locales. Debemos entonces dar un origen S, punto invariable arbitrariamente elegido en este plano (más precisamente en la intersección de la esfera celeste y del plano del horizonte) y determinado de manera precisa con respecto a las referencias locales. Los ángulos son contados positivamente en el sentido retrógrado a lo largo del horizonte.

Llamamos O el centro de la esfera local, lo que corresponde a la posición del observador, y A el punto director de una dirección. El semi círculo ZAN es el círculo vertical del punto A y corta el horizonte en el punto A'. El ángulo $a = \widehat{SOA'}$ es el acimut (o azimut) del punto A y está contado entre $0°$ y $360°$ a partir de una dirección privilegiada de la esfera celeste, generalmente la dirección del Sur o, a veces, la del Norte. El ángulo $h = \widehat{A'OA}$ es la altura del punto A, contada positivamente hacia el cenit y negativamente hacia el nadir, y entonces entre $-90°$ y $90°$. Se usa a menudo su complementario, el ángulo cenital o distancia cenital $z = \widehat{ZOA}$, que está contado entre $0°$ y $180°$. El acimut a y la altura h (o la distancia cenital z) son las coordenadas horizontales (o locales) del punta A.

El círculo chico que tiene Z como polo y que pasa por el punto A es el círculo de altura o el almucantarat del punto A. Los círculos verticales y los círculos de altura son las líneas de coordenadas del sistema local de las coordenadas horizontales.

En razón del movimiento diurno, las coordenadas horizontales de una estrella son ambas variables según leyes bastante complicadas. Como las observaciones de astronomía de posición dan las coordenadas locales, será necesario, a menudo, de convertirlas en otros tipos de coordenadas, lo que vamos a estudiar un poco después en este curso.

2.2.3. Segundo sistema local de referencia: Coordenadas horarias: H, δ

Se llama meridiano astronómico el plano vertical $NPZS$ que contiene el eje polar, el cenit. Las direcciones del Norte (N) y del Sur (S) son incluidas en este plano, lo cual pertenece a la esfera local. Los puntos N y S son actualmente las intersecciones del meridiano y del horizonte, mientras tanto el punto S está definido como el origen de los ángulos de acimutes en el primer sistema local (pero, a veces, se usa también el punto N como tal). El semi plano vertical ZE normal al meridiano y dirigido hacia el Este es el primer vertical, mientras tanto su prolongación ZW en la dirección del Oeste es el segundo vertical. La altura del polo norte (ángulo $\varphi = \widehat{NOP}$) es la latitud astronómica o geográfica del lugar de observación. En el hemisferio norte, el polo norte siendo encima del horizonte, este ángulo φ es positivo (entre $0°$ y $90°$), mientras tanto, en el hemisferio sur, el polo norte siendo debajo del horizonte, este ángulo φ es negativo (entre $-90°$ y $0°$).

El ecuador celeste es el círculo máximo que tiene como polo el polo celeste. En primera aproximación, es un elemento invariable de la esfera local. El ángulo entre la vertical OZ y el ecuador celeste es igual a la latitud φ del lugar. Adoptamos el ecuador como plano fundamental de un nuevo sistema local de coordenadas. Podemos definir el punto M como la intersección del ecuador celeste y del meridiano y el punto A un punto cualquiera de la esfera celeste. Podemos entonces definir el círculo horario del punto A como siendo el círculo PAP' pasando por ambos polos y por el punto A. Este círculo horario cruza el ecuador celeste en el punto A'. El arco MA', que se mide en el sentido retrógrado (para crecer con el tiempo), es el ángulo entre el círculo horario y el semi plano meridiano sur. Está llamado el ángulo horario H del punto A. Se debe notar aquí que este ángulo horario H se mide de manera tradicional en horas, minutos de horas y segundos de horas, entre $0h$ y $24h$, y definitivamente no en grados. Podemos considerar como un facto de observación que el ángulo horario H crece de manera uniforme con respecto al tiempo (escala corta).

El círculo pequeño de polo P que pasa por A es el paralelo celeste de este punto. La distancia $\delta = \widehat{A'OA}$ es la declinación del punto A. Se mide positivamente hacia el polo celeste norte y negativamente hacia el polo celeste sur, y entonces entre $-90°$ y $90°$. Como el movimiento diurno hace describir a una estrella su paralelo celeste, su declinación es invariable (en primera aproximación). Ángulo horario y declinación son las coordenadas horarias del punto A y forman el segundo sistema local de referencia.

Las coordenadas horarias permiten describir el movimiento diurno de manera mucha más conveniente que las coordenadas horizontales, porque sus variaciones con respecto al tiempo siguen leyes muchas más simples. No obstante, sus determinaciones directas no son posibles, sino en el caso particular del momento del pasaje del astro al meridiano.

En este caso (y solamente en este caso), tenemos $H = 0h$ y (por ambos hemisferios):

$$\begin{cases} \delta = \varphi + h - 90° & (si\ \delta < \varphi) \\ \delta = \varphi - h + 90° & (si\ \delta > \varphi) \end{cases}$$

2.2.4. Fórmulas de cambio de coordenadas locales

Usando el triángulo esférico de posición PZA del punto A, un cálculo de trigonometría esférica nos da los cambios de coordenadas entre las coordenadas horizontales y las coordenadas horarias. La longitud y la latitud del lugar están anotadas λ y φ. Anotamos también a el acimut, z el ángulo cenital, α la ascensión recta, δ la declinación y H el ángulo horario. Usando los lados $PZ = 90° - \varphi$, $ZA = z$ y $PA = 90° - \delta$, y los ángulos $\widehat{PZA} = 180° - a$ y $\widehat{ZPA} = H$ en el triángulo de posición, tenemos entonces las relaciones siguientes:

Conversión de las coordenadas horizontales hacia las coordenadas horarias:

$$\begin{cases} \sin\delta = \sin\varphi\cos z - \cos\varphi\sin z\cos a \\ \cos\delta\sin H = \sin z\sin a \\ \cos\delta\cos H = \cos\varphi\cos z + \sin\varphi\sin z\cos a \end{cases} \tag{34}$$

Conversión de las coordenadas horarias hacia las coordenadas horizontales:

$$\begin{cases} \cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H \\ \sin z\sin a = \cos\delta\sin H \\ \sin z\cos a = -\cos\varphi\sin\delta + \sin\varphi\cos\delta\cos H \end{cases} \tag{35}$$

2.2.5. Sistema de referencia en la esfera de las estrellas fijas: Coordenadas ecuatoriales: α, δ

El movimiento diurno puede ser representado como un movimiento de la esfera de las estrellas fijas con respecto a la esfera local. Entonces, se necesita de disponer de un nuevo sistema de referencia asociado a la esfera de las estrellas fijas. Solamente un tal sistema permitirá una descripción geométrica del cielo estrellado y de las constelaciones, cada estrella poseyendo coordenadas invariables (en primera aproximación) con respecto a un tal sistema. El plano fundamental de este nuevo sistema es el ecuador celeste. El origen de los ángulos en este plano es un cierto punto llamado punto vernal o punto γ, que vamos a considerar como siendo fijo en primera aproximación. Este punto está definido como siendo la posición aparente del Sol a momento del equinoccio de marzo, en su movimiento hacia el norte y cuando cruza el ecuador celeste.

La ascensión recta de un punto A de la esfera de las estrellas fijas está definida como siendo el ángulo $\alpha = \gamma\widehat{OA'}$ que hace el círculo horario de este punto con lo del punto vernal. Se mide en el sentido directo, lo que significa en el sentido opuesto a lo del movimiento diurno. Debido a este convenio, los astros pasan por un círculo horario determinado de la esfera local, y peculiarmente al meridiano, en el orden de las ascensiones rectas crecientes. Como por el ángulo horario H, la ascensión recta α se mide de manera tradicional en horas, minutos de horas y segundos de horas, entre $0h$ y $24h$. La segunda de las coordenadas ecuatoriales es la distancia angular $\delta = \widehat{A'OA}$ del punto A al ecuador y está llamada declinación, ya definida como una de las coordenadas horarias.

Ascensión recta y declinación siendo independientes del movimiento diurno, estas coordenadas pueden variar solamente si el plano fundamental y/o el punto γ son móviles. Es entonces legitimo considerar cómo siendo invariables estos dos elementos durante algunas horas o algunos días (aun si son variables a más largas escalas de tiempo)

2.2.6. Relaciones entre coordenadas ecuatoriales y horarias: Tiempo sideral

Supongamos los polos celestes determinados al mismo tiempo en la esfera local y en la esfera de las estrellas fijas. La posición relativa de ambas esferas, lo que significa el aspecto del cielo estrellado por el observador terrestre, no depende más que de un parámetro. Por razones históricas y por un convenio internacional, se usa como parámetro el ángulo horario del punto γ, a lo cual se da el apellido de tiempo sideral TS (ST en inglés).

De manera evidente, el ángulo horario H de un punto de la esfera está asociado a su ascensión recta α por la relación algébrica fundamental:

$$H = TS - \alpha$$

Un caso peculiar llega cuando el astro cruza el plano del meridiano, cuando tenemos $H = 0h$ o $H = 12h$. El astro está entonces al meridiano, al pasaje superior si $H = 0h$, al pasaje inferior si $H = 12h$. Al pasaje superior, tenemos siempre:

$$TS = \alpha \quad (H = 0h)$$

Tenemos entonces una nueva definición del tiempo sideral, la cual es la ascensión recta de los astros al pasaje superior en el meridiano al instante considerado. Eso implica que las observaciones del pasaje al meridiano pueden dar el tiempo sideral, con la condición que las ascensiones rectas han sido determinadas previamente.

2.2.7. Sistema de referencia en la esfera de las estrellas fijas: Coordenadas eclípticas: l y b

El centro del Sol está describiendo un círculo máximo en la esfera de las estrellas fijas. Su órbita relativa es entonces plana y localizada en un plano que contiene la Tierra. Se da el apellido de eclíptico a este plano y al círculo máximo correspondiente. Como la Luna y los planetas mayores no se alejan mucho del eclíptico, se da el apellido de zodiaco a una zona limitada por dos círculos paralelos localizados a $\pm 8°30'$ del eclíptico. El nodo ascendente del eclíptico es lo de los dos puntos de intersección con el ecuador cuando el Sol pasa del hemisferio sur al hemisferio norte, alrededor del 21 de marzo. Esta fecha corresponde al equinoccio de primavera por el hemisferio norte y al equinoccio de otoño por el hemisferio sur. Este punto de intersección se llama el punto vernal o punto γ, ya considerado, o el equinoccio de marzo. Este punto γ sirve de origen a las ascensiones rectas y tiene como coordenadas ecuatoriales $\alpha = 0h$ y $\delta = 0°$. Su ángulo horario está constituyendo el tiempo sideral. Para fijar completamente la posición del eclíptico, se debe dar su oblicuidad, lo que significa su inclinación con respecto al ecuador celeste. Tiene como valor aproximativo $\varepsilon = 23°26'$.

De manera mucho más precisa, la oblicuidad del eclíptico tiene como valor:

$$\varepsilon = 84381.448 - 46.84024\,T - 59\,10^{-5}\,T^2 + 1.813\,10^{-3}\,T^3 \tag{36}$$

En esta ecuación, ε está medido en arcos de segundos, T siendo el tiempo en siglos julianos (entonces, 36525 días) desde la época J2000.0 (que ocurrió el primer de enero del 2000, a las 12:00 horas, igual a JD 2451545.0). Esta fórmula es solamente valida sobre un cierto rango de tiempo (más o menos durante 4000 años) alrededor del año 2000.

Desde la Antigüedad clásica, por lo menos, se usa un sistema de coordenadas eclípticas, longitud eclíptica (o celeste) l (entre 0° y 360° contada en el sentido directo) y latitud eclíptica (o celeste) b (entre $-90°$ y $90°$), con origen el punto γ ($l = 0°$; $b = 0°$).

2.2.8. Fórmulas de cambio de coordenadas ecuatoriales y eclípticas

Considerando el triángulo esférico PQA (Q siendo el polo del círculo eclíptico) y anotando que el triángulo esférico $PQ\gamma$ es birrectángulo en Q y en P, un cálculo de trigonometría esférica nos da los cambios de coordenadas entre las coordenadas ecuatoriales y las coordenadas eclípticas. La oblicuidad del eclíptico está llamada ε. Anotamos también α la ascensión recta, δ la declinación, l la longitud eclíptica y b la latitud eclíptica. Usando los lados $PQ = \varepsilon$, $QA = 90° - b$ y $PA = 90° - \delta$, y los ángulos $\widehat{PQA} = 90° - l$ y $\widehat{QPA} = 90° + \alpha$ en el triángulo PQA, tenemos entonces las relaciones siguientes:

Conversión de las coordenadas ecuatoriales hacia las coordenadas eclípticas:

$$\begin{cases} \sin\, b = \cos\,\varepsilon\, \sin\,\delta - \sin\,\varepsilon\, \cos\,\delta\, \sin\,\alpha \\ \cos\, b\, \cos\, l = \cos\,\delta\, \cos\,\alpha \\ \cos\, b\, \sin\, l = \sin\,\varepsilon\, \sin\,\delta + \cos\,\varepsilon\, \cos\,\delta\, \sin\,\alpha \end{cases} \tag{37}$$

Conversión de las coordenadas eclípticas hacia las coordenadas ecuatoriales:

$$\begin{cases} \sin\,\delta = \cos\,\varepsilon\, \sin\, b + \sin\,\varepsilon\, \cos\, b\, \sin\, l \\ \cos\,\delta\, \cos\,\alpha = \cos\, b\, \cos\, l \\ \cos\,\delta\, \sin\,\alpha = -\sin\,\varepsilon\, \sin\, b + \cos\,\varepsilon\, \cos\, b\, \sin\, l \end{cases} \tag{38}$$

2.2.9. Sistema II de coordenadas galácticas: l_{II}, b_{II}

Por lo que concierne la Vía Láctea y el ecuador galáctico, los astrónomos usan el sistema II de coordenadas galácticas l_{II} y b_{II} definido de la manera siguiente:

Convención (International Astronomical Union):

Polo norte galáctico ($b_{II} = 90°$): Centro de la Galaxia ($l_{II} = 0°$, $b_{II} = 0°$):

$$\begin{cases} \alpha = 12h\,51m\,26.28s \\ \delta = +27°\,07'\,41.7" \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 17h\,45m\,37.20s \\ \delta = -28°\,56'\,10.2" \end{cases}$$

Nodo ascendente (Ascending node) = punto de intersección del ecuador galáctico y ecuador celeste:

$$\begin{cases} \alpha_0 = 18h\,51m\,26.28s = 282°\,51'\,34.2" \\ l_0 = 32°\,55'\,54.9"\ \mathit{al\,este\,de}\,(l_{II} = 0°,\, b_{II} = 0°) \end{cases}$$

Conversión de las coordenadas ecuatoriales hacia las coordenadas galácticas:

$$\begin{cases} \cos\, b_{II}\, \cos(l_{II} - l_0) = \cos\,\delta\, \cos(\alpha - \alpha_0) \\ \cos\, b_{II}\, \sin(l_{II} - l_0) = \cos\,\delta\, \sin(\alpha - \alpha_0)\, \cos\, i_{gal} + \sin\,\delta\, \sin\, i_{gal} \\ \sin\, b_{II} = \sin\,\delta\, \cos\, i_{gal} - \cos\,\delta\, \sin(\alpha - \alpha_0)\, \sin\, i_{gal} \end{cases} \tag{39}$$

Conversión de las coordenadas galácticas hacia las coordenadas ecuatoriales

$$\begin{cases} \cos\delta\,\cos(\alpha-\alpha_0) = \cos b_{II}\,\cos(l_{II}-l_0) \\ \cos\delta\,\sin(\alpha-\alpha_0) = \cos b_{II}\,\sin(l_{II}-l_0)\,\cos i_{gal} - \sin b_{II}\,\sin i_{gal} \\ \sin\delta = \cos b_{II}\,\sin(l_{II}-l_0)\,\sin i_{gal} + \sin b_{II}\,\cos i_{gal} \end{cases} \tag{40}$$

con los valores siguientes por los tres parámetros l_0, α_0 y i_{gal}:

$$\begin{cases} l_0 = 32^\circ\,55'\,54.9" \\ \alpha_0 = 282^\circ 51' 34.2" \\ i_{gal} = 62^\circ 52' 18.3" \end{cases}$$

(época J2000.0 = referencia Hipparcos)

2.3. Refracción atmosférica; Airmass

2.3.1. Refracción atmosférica

La descripción de la refracción atmosférica dada aquí viene de un artículo de Lawrence H. Auer y E. Myles Standish, *The Astrophysical Journal*, 119, 2472-2474 (**May 2000**).

Por una atmósfera simétrica esférica, la refracción atmosférica R está dada por:

$$R = \int_0^{\ln(n_0)} tg\,\psi\, d(\ln(n))$$

subyugada a la relación de invariancia:

$$nr\,\sin\psi = n_0 r_0\,\sin\psi_0$$

n siendo el índice de refracción a la distancia r del centro de la Tierra, y ψ el ángulo entre el rayo luminoso incidente y el radio vector. El índice 0 está refiriendo a los valores al nivel del observador, y $\psi_0 = z$ es el ángulo cenital aparente visto desde el lugar de observación. Por diferenciación de la relación de invariancia, tenemos:

$$\sin\psi\, d(nr) + nr\,\cos\psi\, d\psi = 0$$

Lo que nos da:

$$tg\,\psi\,\frac{d(nr)}{nr} = tg\,\psi\, d(\ln(nr)) = -d\psi$$

Y finalmente:

$$tg\,\psi = -\frac{d\psi}{d(\ln(nr))}$$

Voviendo al calculo de refracción atmosférica R y sustituyendo $tg\,\psi$, tenemos:

$$R = -\int_0^{\psi_0} \frac{d(\ln(n))}{d(\ln(nr))}\, d\psi = -\int_0^{\psi_0} \frac{\frac{d(\ln(n))}{d(\ln(r))}}{1+\frac{d(\ln(n))}{d(\ln(r))}}\, d\psi$$

Como el índice de refracción n y el ángulo ψ dependen de la distancia al centro de la Tierra r ($n = n(r)$ y $\psi = \psi(r)$), la integración de esta última ecuación no se puede hacer de manera simple (se debe conocer las funciones $n(r)$ y $\frac{d(\ln(n))}{d(\ln(r))}$), pero a través de aproximaciones sucesivas en r, y entonces de manera empírica:

$$r_{i+1} = r_i - F(r_i)/F_r(r_i)$$

donde:

$$\begin{cases} F(r) = nr - \frac{n_0 r_0 \sin\psi_0}{\sin\psi} \\ \\ F_r(r) = \frac{dn}{dr}r + n \end{cases}$$

En el caso de una atmósfera compuesta de capas separadas, por ejemplo de una troposfera y de una estratosfera, se debe hacer el calculo de integración en cada región.

Podemos entonces introducir un modelo realista de la atmósfera terrestre en dos capas, Troposfera y Estratosfera, en la ocurrencia el modelo politrópico a trozos. En este modelo, la densidad de la atmósfera está descrita por un polítropo de índice k en la Troposfera y por un otro polítropo de índice ∞ (entonces isotermal) en la Estratosfera. Las dos partes están conectadas con la presunción de la continuidad de la temperatura y de la densidad en la Tropopausa, límite entre las dos capas atmosféricas, definido por su altura h_B encima de la superficie del mar. Este modelo tiene las ventajas de dar un tratamiento simple y de permitir ajustes según las condiciones de presión y de temperatura del lugar (lo cual está caracterizado por su altitud h encima del nivel del mar, con $h = r - r_\oplus$). El índice de refracción n está relacionado con la densidad ρ a través de la relación de Gladstone-Date:

$$n = 1 + \alpha\rho$$

donde la densidad vale 1 en la condiciones estándares de presión y de temperatura (273.15 K y 760 mmHg). Las relaciones que dan la densidad con respecto a la altura h encima de la superficie del mar se pueden escribir, por la Troposfera ($h < h_B$):

$$\begin{cases} \rho(r) = \rho_w \left[1 + \beta_w(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}_w})\right]^k \\ \\ T(r) = T_w \left[1 + \beta_w(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}_w})\right] \end{cases}$$

y por la Estratosfera ($h > h_B$):

$$\begin{cases} \rho(r) = \rho_w \, exp\left[\gamma_w(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}_w})\right] \\ \\ T(r) = T_w \end{cases}$$

Mientras tanto la escala de este modelo está ajustado con respecto a los valores observados de la temperatura T_w y de la presión p_w a una altura h_w, los parámetros de ambas relaciones están dados por (ver la tabla 1 por los valores de las constantes):

$$\begin{cases} \rho_w = \frac{p_w}{760}\frac{273.15}{T_w} \\ \\ \beta_w = \frac{g r_\oplus}{\Re T_w(1+k)} \\ \\ \gamma_w = \frac{g r_\oplus}{\Re T_w} \\ \\ \bar{r} = \frac{r_\oplus + h}{r_\oplus} \\ \\ \bar{r}_w = \frac{r_\oplus + h_w}{r_\oplus} \end{cases}$$

Table 1: Constantes físicas.

Símbolo	*Definición*	*Valor*
α	*Parámetro de Gladstone – Dale*	0.0029241[a]
$r_\oplus$	*Radio ecuatorial de la Tierra*	$6378390\,m$
g	*Constante de la gravitación*	$9.80655\,m\,s^{-2}$
$\Re$	*Constante de los gases perfectos*	$287.053\,m^2\,s^{-2}\,{}^oC^{-1}$
k	*Índice politrópico de la Troposfera*	5[a]
h_B	*Altura de la Tropopausa*[b]	$11019\,m$

[a] Sin unidad

[b] Variable según la latitud

Par garantizar la continuidad en la Tropopausa (r_B, T_B, ρ_B), podemos calcular:
a) Por la Troposfera ($h < h_B$):

$$\begin{cases} \rho_B = \rho_w \left[1 + \beta_w(\frac{1}{\bar{r}_B} - \frac{1}{\bar{r}_w})\right]^k \\ T_B = T_w \left[1 + \beta_w(\frac{1}{\bar{r}_B} - \frac{1}{\bar{r}_w})\right] \end{cases}$$

b) Por la Estratosfera ($h > h_B$):

$$\begin{cases} \rho_B = \rho_w \, exp \left[\gamma_w(\frac{1}{\bar{r}_B} - \frac{1}{\bar{r}_w})\right] \\ T_B = T_w \end{cases}$$

y ajustar los parámetros para tener esta continuidad en la Tropopausa.

Este método permite hacer un calculo numérico por varias alturas, por varios valores de la temperatura y de la presión, así que por diferentes valores del ángulo cenital. Los resultados están presentados en la tabla 2.

Algunas otras fórmulas dando la refracción atmosférica:

Según Bennett (1982), podemos expresar la refracción atmosférica de la manera siguiente, h_a siendo la altura angular aparente en grados y R siendo la refracción atmosférica en minutos de arco:

$$R = cotg\left[h_a + \frac{7.31}{h_a + 4.4}\right]$$

Esta fórmula da R con una precisión mejor que $0.07'$ entre 0^o y 90^o.

Según Sæmundsson (1986), podemos expresar la refracción atmosférica de la manera siguiente, h siendo la altura angular aparente en grados y R siendo la refracción atmosférica en minutos de arco:

$$R = 1.02\,cotg\left[h + \frac{10.3}{h + 5.11}\right]$$

Table 2: Refracción astrmosférica computada.

Ángulo cenital	$h_w = 0\,m$ $T_w = 273.15\,K$ $p_w = 760\,mmHg$ $h_0 = 0\,m$	$h_w = 0\,m$ $T_w = 273.15\,K$ $p_w = 780\,mmHg$ $h_0 = 0\,m$	$h_w = 0\,m$ $T_w = 303.15\,K$ $p_w = 760\,mmHg$ $h_0 = 0\,m$	$h_w = 0\,m$ $T_w = 273.15\,K$ $p_w = 760\,mmHg$ $h_0 = 2000\,m$	$h_w = 0\,m$ $T_w = 273.15\,K$ $p_w = 760\,mmHg$ $h_0 = 15000\,m$
(^{o})	”	”	”	”	”
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
15	16.14	16.56	14.54	13.05	2.30
30	34.77	35.68	31.32	28.10	4.97
45	60.17	61.76	54.20	48.64	8.60
60	103.99	106.73	93.65	84.07	14.87
75	221.49	227.33	199.15	179.09	31.73
80	330.52	339.25	296.52	267.34	47.46
85	614.56	630.96	546.76	497.75	89.20
86	732.77	752.42	649.25	593.86	106.99
87	899.23	923.52	791.88	729.38	132.53
88	1145.51	1176.89	999.39	930.14	171.49
89	1532.65	1575.47	1317.72	1245.89	235.77
90	2189.42	2253.01	1838.65	1780.59	353.36
91				2777.33	600.62
92					1187.87
93					2316.43

Esta fórmula está consistente a mejor que $0.1'$ con la fórmula de Bennet. Ambas fórmulas asumen una presión atmosférica de 101.0 kPa y una temperatura de 10^oC. Por diferentes presiones P y temperaturas T, la refracción calculada a partir de estas fórmulas deben estar multiplicadas por $\frac{P}{101.0}\frac{283}{273+T}$ (Meeus 1991).

2.3.2. Airmass

En astronomía, la airmass es la longitud del camino óptico a travs de la atmósfera de la Tierra de un rayo luminoso desde una fuente celeste. Cuando cruzando a travs de la atmósfera, la luz está atenuada por dispersión y absorción; un espesor más grande de atmósfera cruzada da una atenuación más importante. Como consecuencia, los cuerpos celestes cerca del horizonte parecen menos brillantes que cuando se ubican cerca del zenit. La atenuación, conocida como extinción atmosfrica, está descrita cuantitativamente por la ley de Beer-Lambert-Bouguer.

Ley de Beer-Lambert-Bouguer en la atmósfera:

$$I = I_0 exp\left[-m(\tau_a + \tau_g + \tau_{NO_2} + \tau_w + \tau_{O_3} + \tau_r)\right]$$

Donde cada τ_x es el espesor óptico correspondiente a la fuente x de absorción o de dispersión:

a está refiriendo a los aerosoles (que absorban y dispersan;)

g está refiriendo a los gases uniformemente mezclados (principalmente el dióxido de carbón (CO_2) y el oxígeno molecular (O_2) que solamente absorban);

NO_2 es el dióxido de nitrógeno, principalmente producido por la contaminación urbana (solamente en absorción);

w es la absorción del vapor de agua;

O_3 es el ozono (solamente en absorción);

r es la dispersión Rayleigh producida por el oxígeno molecular (O_2) y el nitrógeno (N_2) (la dispersión Rayleigh es responsable del color azul del cielo).

La palabra "airmass" está normalmente refiriendo a la airmass relativa, la longitud del camino óptico relativa a su valor al zenit medido desde el nivel del mar, y entonces, por definición, la airmass al nivel del mar al zenit es 1. La airmass está creciendo con el ángulo entre la fuente luminosa y el zenit está creciendo, alcanzando un valor alrededor de 38 al horizonte. Teóricamente, la airmass puede valer menos de 1 a una altitud superior a la del nivel del mar. No obstante, la mayoría de las fórmulas por la airmass no están incluyendo los efectos de la altura, y los ajustamientos deben estar hechos usualmente de otra manera.

Como lo vimos anteriormente, la refracción atmosfrica es la razón que obliga la luz de seguir un camino óptico un poco más largo que el trayecto geomtrico, y la airmass debe tomar en cuenta este camino óptico más largo. Adicionalmente, la refracción es la razón que hacer que un cuerpo celeste aparece más alto encima del horizonte que lo que realmente es. Al horizonte, la diferencia entre el ángulo cenital real y el ángulo cenital aparente es aproximadamente de 35 minutos de arco. La mayoría de las fórmulas son basadas en el ángulo cenital aparente, pero algunas son basadas en el ángulo cenital real, y es siempre importante de verificar que el valor correcto está usado, especialmente cerca del horizonte.

Atmósfera plana paralela (z = distancia cenital aparente):

$$X = \sec\, z \quad (con\ z = 90^o - h)$$

Young & Irvine (1967), donde z_t es la distancia cenital real:

$$X = \sec\, z_t\,(1 - 0.0012\, \sec^2\, z_t - 1)$$

Hardie (1962) introdujo un polinomio en sec $z - 1$:

$$X = \sec\, z - 0.0018167(\sec\, z - 1) - 0.002875(\sec\, z - 1)^2 - 0.0008083(\sec\, z - 1)^3$$

Según Rozenberg (1966), se puede usar la fórmula siguiente:

$$X = \frac{1}{\cos\, z + 0.025\, e^{-11\, \cos\, z}}$$

Kasten & Young (1989) dan una fórmula un poco más complicada:

$$X = \frac{1}{\cos\, z + 0.50572\,(96.07995 - z)^{-1.6364}}$$

Young (1994) está usando la distancia cenital real z_t:

$$X = \frac{1.002432\, \cos^2\, z_t + 0.148386\, \cos\, z_t + 0.0096467}{\cos^3\, z_t + 0.149864\, \cos^2\, z_t + 0.0102963\, \cos\, z_t + 0.000303978}$$

Pickering (2002) está usando la altura aparente $h = 90^o - z$:

$$X = \frac{1}{\sin(h + \frac{244}{165+47\, h^{1.1}})}$$

Las cuatro últimas fórmulas dan resultados bien coherentes, con una buena precisión, aun por z alrededor de 90^o (entonces un poco encima del horizonte, con h alrededor de 0^o).

2.4. Salida y puesta de los astros

Debido al movimiento diurno (y también, pero de una manera casi despreciable, a los otros movimientos de la Tierra, especialmente su movimiento de revolución alrededor del Sol, y a los movimientos de los astros "móviles"), los astros (estrellas, planetas, Luna, Sol, etc.) parecen girar lentamente alrededor del observador. De manera más precisa, podemos observar que los astros parecen girar circularmente alrededor del polo visible encima del horizonte (polo norte en el hemisferio norte y polo sur en el hemisferio sur). Sino por un observador precisamente localizado en el ecuador terrestre, se puede observar dos tipos de astros (por lo que concierne sus movimientos y visibilidad), los astros circumpolares, siempre visibles encima del horizonte, y los astros que tienen salida y puesta, no siempre visibles encima del horizonte. Un observador localizado precisamente en el círculo ecuador puede observar solamente este último caso, ambos polos celestes siendo localizados justo en el horizonte, diametralmente opuestos, hacia el norte geográfico y hacia el sur geográfico, mientras tanto los astros parecen girar verticalmente entre estos dos puntos (en este caso peculiar, el eje polar de la Tierra está horizontal, mientras tanto, desde cualquier otro punto de la Tierra fuera del círculo ecuador, el eje polar está inclinado, con un polo visible, encima del horizonte, y el otro invisible, debajo del horizonte).

Salida y puesta de un astro en un lugar dado:

Para calcular el instante de la salida o de la puesta de un astro de coordenadas ecuatoriales α y δ (aproximativas en el caso de un astro móvil) conocidas al momento del fenómeno considerado, podemos calcular al principio el ángulo horario H al momento de la salida o de la puesta por la fórmula (considerando el triángulo esférico PZA, donde P es el polo visible encima del horizonte, Z es el zenit y A es el astro):

$$\cos H = \frac{\sin h_0 - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

donde φ es la latitud del lugar y h_0 un ángulo pequeño que vamos a definir un poco después. El tiempo sideral aproximativo de la salida está entonces:

$$TS = \alpha - H$$

y lo de la puesta:

$$TS = \alpha + H$$

A partir del tiempo sideral TS, podemos calcular después el instante del fenómeno en tiempo universal TU (con $k_{ratio} = 1.0027379$):

$$TU = \frac{1}{k_{ratio}} \left(TS - TS_{Greenwich}[0^h TU] + \lambda\right)$$

donde $TS_{Greenwich}[0^h TU]$ es el tiempo sideral de Greenwich a 0h Tiempo Universal y λ la longitud del lugar donde se observa la salida o la puesta del astro considerado.

En el caso de un astro en desplazamiento rápido sobre la esfera celeste (es el caso del Sol, de algunos planetas y especialmente de la Luna), se debe entonces calcular coordenadas ecuatoriales α y δ más precisas por el instante encontrado con una interpolación de las tablas de posiciones y calcular de nuevo H y después TS, usando las fórmulas anteriores, lo que da el instante del fenómeno en tiempo universal TU . Por lo que concierne la Luna, se debe a veces hacer una iteración suplementaria, incluso más.

Por lo que concierne h_0, su expresión general es la siguiente:

$$h_0 = P - R - \frac{1}{2}\, d - \eta_1 + \eta_2$$

P es la paralaje del astro. Este ángulo de paralaje es despreciable por todos los astros, sino en el caso de la Luna, astro por la cual $P = 57'$.

R es la refracción al horizonte. La teoría de la refracción de Radau da el valor $R = 36'36"$, pero se puede usar el valor $R = 34'$ adoptado dentro de las Efemérides Náuticas del Bureau des Longitudes (Francia) y dentro de otras publicaciones internacionales.

$\frac{1}{2}\, d$ es el semi-diámetro aparente del astro. Se debe introducirlo dentro de esta fórmula cuando se calcula la salida y la puesta del borde superior del Sol y de la Luna y no la salida y la puesta del centro del astro. Clásicamente, se usa $\frac{1}{2}\, d = 16'$ tanto por el Sol que por la Luna, aun si este último parámetro es un poco variable alrededor de este valor.

En el caso de un observador ubicado a una altura A encima del nivel del mar, se debe introducir el ángulo $\eta_1 = \frac{a_T}{a_T+A}$ en h_0, donde a_T es el radio de la Tierra. Se elige $a_T = 6378140\,m$. Se puede utilizar la fórmula aproximada:

$$\eta_1 = 1'56" \sqrt{A}$$

A siendo exprimido en metros.

En el caso de la búsqueda de la salida o de la puesta de un astro en un lugar cuyo horizonte está limitado par colinas o montañas de altura D ubicadas a la distancia l del observador, se debe agregar el ángulo η_2 a h_0, de tal manera que:

$$tg(\eta_2) = \frac{D}{l}$$

No se debe buscar a obtener los instantes de la salida o de la puesta de los astros con una precisión superior a un minuto de tiempo, el valor exacto de la refracción al horizonte al momento del fenómeno siendo demasiado mal conocido.

3. Mecánica celeste: Ecuaciones del movimiento

3.1. Introducción

Supongamos (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un triedro orto-normado directo elegido de tal manera que al instante t, el plano (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) es el plano instantáneo del movimiento, que contiene el radio vector y el vector velocidad.

Supongamos A un punto material de masa m en movimiento alrededor del punto fijo O y experimentando una aceleración central $\vec{\gamma}$. El radio vector del movimiento está dado por la ecuación (41), $\vec{n}$ siendo el vector unitario radial y $\vec{\tau}$ el vector unitario directamente normal en el plano instantáneo del movimiento (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

$$\overrightarrow{OA} = r\vec{n} \tag{41}$$

La velocidad del punto A al instante t será entonces dada por la ecuación (42), θ siendo el ángulo (O, $\vec{i}$, $\vec{n}$), ángulo medido dentro de plano (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d(r\vec{n})}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{n} + r\frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{n} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\tau} \tag{42}$$

Según la ley de la gravitación universal, la fuerza $\vec{F}$ es central y colineal a la aceleración $\vec{\gamma}$, el factor de proporcionalidad siendo la masa del cuerpo A. La masa del cuerpo O está notada M, mientras tanto G designa la constante de la gravitación universal.

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{n} \tag{43}$$

Podemos calcular el momento cinético, o momento angular, del sistema con respecto a un eje instantáneo pasando por el punto O y ortogonal tanto al radio vector como al vector velocidad.

$$\vec{L}_{A/O} = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{V} = \vec{r} \wedge m\vec{V} \tag{44}$$

El cálculo de la diferencial del momento cinético con respecto al tiempo permite observar su evolución temporal.

$$\frac{d\vec{L}_{A/O}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{V} + \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{V} \wedge m\vec{V} + \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{r} \wedge \vec{\gamma} = \vec{0} \tag{45}$$

El momento cinético es constante y queda siempre colineal al vector $\vec{k}$.

$$\vec{L}_{A/O} = mrV\vec{n} \wedge \vec{\tau} = L_{A/O}\vec{k} \tag{46}$$

El radio vector $\vec{r}$ y la velocidad $\vec{V}$, quedando en permanencia ortogonales al momento cinético, están siempre contenidos en el plano fijo (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). La trayectoria de A queda así constantemente incluida en este plano.

Debemos anotar aquí que la marcación (A, $\vec{n}$, $\vec{\tau}$, $\vec{k}$) forma un triedro orto-normado directo en movimiento en el plano (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) y que las diferenciales de ambos vectores unitarios en movimiento están dadas por:

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{\tau} \tag{47 - a}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{n} \tag{47 - b}$$

3.2. Constante de las áreas

Podemos calcular el valor de la aceleración por diferenciación de la velocidad, sin olvidar que esta aceleración es radial.

$$\vec{\gamma} = \gamma\vec{n} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \Big(\frac{d^2r}{dt^2} - r\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2\Big)\vec{n} + \Big(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\Big)\vec{\tau} \tag{48}$$

La componente de la aceleración sobre el vector directamente normal es así siempre nula, lo que permite escribir las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2 = \gamma \tag{49 - a}$$

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \tag{49 - b}$$

Podemos escribir la ecuación $(49 - b)$ según la manera siguiente:

$$\frac{2(\frac{dr}{dt})}{r} + \frac{(\frac{d^2\theta}{dt^2})}{(\frac{d\theta}{dt})} = 0 \tag{50}$$

Esta ecuación es integrable con respecto al tiempo. Podemos obtener, anotando por comodidad $\ln(C)$ la constante de integración:

$$2\ln(r) + \ln\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big) = \ln(C) \tag{51 - a}$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C \qquad (51-b)$$

Con un paso al exponencial, podemos encontrar la ley de las áreas descubierta por Kepler, C siendo llamada constante de las áreas. La segunda ley de Kepler dice en efecto que el área barrido por el radio vector es proporcional al tiempo, puesto que:

$$dS = \frac{1}{2}r\,r d\theta = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}dt$$

Y, entonces:

$$\Delta S = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\Delta t = \frac{1}{2}C\Delta t \qquad (52)$$

Podemos entonces deducir dos valores de la componente radial de la aceleración, por utilización de las ecuaciones (43), $(49-a)$ y (52):

$$\gamma = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \qquad (53)$$

Lo que permite finalmente escribir la ecuación (54):

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{GM}{r^2} - \frac{C^2}{r^3} = 0 \qquad (54)$$

3.3. Ecuaciones del movimiento

3.3.1. Radio vector

Es posible integrar la ecuación (54) anotando que:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\Big(\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\Big)\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\Big(\frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\Big)\frac{C}{r^2} = \Big[-\frac{2}{r^3}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\Big]\frac{C^2}{r^2} \qquad (55)$$

La ecuación (54) se escribe entonces de la manera siguiente:

$$-\frac{2C^2}{r^5}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + \frac{C^2}{r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{GM}{r^2} - \frac{C^2}{r^3} = 0 \qquad (56)$$

Planteamos $u = \frac{1}{r}$, lo que significa $r = \frac{1}{u}$. Por diferenciaciones sucesivas, podemos obtener:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} \qquad (57-a)$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{2}{u^3}\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} \qquad (57-b)$$

Lo que, por la ecuación (56), da la forma siguiente:

$$C^2u\Big[-2u^4\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2\frac{1}{u^4} + u^3\Big(\frac{2}{u^3}\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}\Big) + \frac{GM}{C^2}u - u^2\Big] = 0 \qquad (58)$$

Por simplificación, la ecuación (58) se reduce finalmente a:

$$C^2u^2\Big(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{GM}{C^2}\Big) = 0 \tag{59}$$

Las soluciones son entonces de dos tipos diferentes: $u = 0$, el objeto A siendo al infinito, o planteando que la constante de integración toma el valor $\frac{GM}{C^2}e$, e siendo llamada la excentricidad.

$$u = \frac{GM}{C^2}(1 + e\cos(\theta - \theta_0)) \tag{60}$$

El radio vector tiene entonces por ecuación, planteando $p = \frac{C^2}{GM}$, p siendo llamado el parámetro de la cónica y $\nu = \theta - \theta_0$, ν siendo llamada la anomalía verdadera.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \tag{61}$$

Encontramos aquí la ecuación de una cónica de excentricidad e, un círculo si $e = 0$, un elipse si $0 < e < 1$, una parábola si $e = 1$ o una hipérbola si $e > 1$, e siendo siempre positivo o nulo. En el caso de una excentricidad inferior a uno, encontramos la primera ley de Kepler.

3.3.2. Velocidad

Miramos ahora si es posible de conseguir una ecuación correcta por la velocidad. Anotamos al principio que:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \tag{62}$$

La ecuación (51) daba el vector velocidad. Su normalización da entonces:

$$V = \Big[\Big(\frac{dr}{dt}\Big)^2 + r^2\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} = \Big[\Big(\frac{dr}{dt}\Big)^2 + \frac{C^2}{r^2}\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{63}$$

Sin embargo, podemos anotar que es posible de establecer que:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{e}{p}\sin\nu\frac{d\nu}{dt} = -\frac{eC}{pr^2}\sin\nu \tag{64-a}$$

Lo que da la diferencial de la norma del radio vector con respecto al tiempo:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{eC}{p}\sin\nu \tag{64-b}$$

De un otro punto de vista, tenemos igualmente la relación:

$$r\frac{d\nu}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r} = \frac{C}{p}(1 + e\cos\nu) \tag{64-c}$$

Por sustitución, conseguimos finalmente el valor de V:

$$V=\Big[\frac{e^2C^2}{p^2}\sin^2\nu+\frac{C^2}{p^2}(1+\cos\nu)^2\Big]^{\frac{1}{2}}=\frac{C}{p}\sqrt{1+2e\cos\nu+e^2} \qquad (65)$$

3.3.3. Conservación de la energía

La ecuación (61) puede también ser determinada por utilización de la ley de conservación de la energía. En efecto, según esta ley, podemos escribir que la suma de las energías cinética y potencial tiene conservación con respecto al tiempo:

$$E_c+E_p=Constante \qquad (66-a)$$

Esta conservación de la energía se escribe, planteando que $F=|\vec{F}|=\frac{GmM}{r^2}$:

$$\frac{1}{2}mV^2+\int Fdr=\frac{1}{2}mV^2-\frac{GmM}{r}=Constante \qquad (66-b)$$

Por utilización de las ecuaciones (63) y $(51-b)$, sabemos ya que:

$$V^2=\Big[\Big(\frac{dr}{dt}\Big)^2+r^2\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2\Big]=\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2\Big[\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2+r^2\Big]=\frac{C^2}{r^4}\Big[\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2+r^2\Big] \qquad (67)$$

Sustituyendo el valor de V^2 en la ecuación $(66-b)$, obtenemos:

$$\frac{1}{r^4}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2+\frac{1}{r^2}-\frac{2GM}{rC^2}-\frac{h}{C^2}=0 \qquad (68)$$

Hemos planteado más arriba que la relación de la constante de las ecuaciones $(66-a)$ y $(66-b)$ dividida por la masa m del cuerpo A es igual a h. Planteamos también que:

$$u=\frac{1}{r}-\frac{GM}{C^2} \qquad (69-a)$$

Por diferenciación, comprobamos igualmente que:

$$\frac{du}{d\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \qquad (69-b)$$

Por desarrollo del cuadrado de u y por sustitución, la ecuación (68) se vuelve:

$$\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2+u^2=\frac{G^2M^2}{C^4}+\frac{h}{C^2}=q^2 \qquad (70)$$

El parámetro q^2 debe ser positivo o nulo en todos los casos para que la ecuación (70) tenga un sentido. Por separación e integración, obtenemos sucesivamente:

$$\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2=q^2-u^2 \qquad (71-a)$$

$$\frac{du}{d\theta}=\pm\sqrt{q^2-u^2} \qquad (71-b)$$

$$\frac{du}{\sqrt{q^2-u^2}}=\pm d\theta \qquad (71-c)$$

$$\arccos\frac{u}{q} = \pm(\theta - \theta_0) \qquad (71-d)$$

$$u = q\cos(\theta - \theta_0) \qquad (71-e)$$

De vuelta al radio vector y a los parámetros iniciales, obtenemos finalmente:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{rC^2}\Big(1 + \sqrt{1 + \frac{C^2 h}{G^2 M^2}}\cos(\theta - \theta_0)\Big) \qquad (72)$$

El parámetro q^2 siendo positivo, podemos plantear que $1 + \frac{C^2 h}{G^2 M^2} = e^2$, que $\frac{C^2}{GM} = p$ y que $\theta - \theta_0 = \nu$, e, p y ν teniendo el mismo significado que antes. Podemos entonces encontrar de nuevo la ecuación de una cónica y así la primera ley de Kepler.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \qquad (73)$$

3.3.4. Caso del movimiento elíptico

La ecuación anterior (73) nos da, al periastro y al apoastro:

$$\begin{cases} r_p = \frac{p}{1+e} \\ r_a = \frac{p}{1-e} \end{cases}$$

Por construcción geométrica del elipse, sabemos que:

$$r_p + r_a = 2\,a$$

Podemos entonces calcular esta suma:

$$r_p + r_a = p\Big(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\Big) = p\Big(\frac{1-e+1+e}{(1+e)(1-e)}\Big) = \frac{2\,p}{1-e^2} = 2\,a$$

Y podemos deducir de todo eso que:

$$p = a\,(1 - e^2) <=> a = \frac{p}{1-e^2}$$

En el caso de un movimiento elíptico, la excentricidad es inferior a uno. El semieje mayor del elipse está entonces dado por $a = \frac{p}{1-e^2}$ y su semieje menor por $b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$. La distancia entre uno de los focos y el centro del elipse se escribe $c = ae$. La ley general del movimiento elíptico se escribe por el radio vector y la velocidad:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\nu} \qquad (74-a)$$

$$V = \frac{C}{a(1-e^2)}\sqrt{1 + 2e\cos\nu + e^2} \qquad (74-b)$$

Al periastro, la anomalía verdadera toma su valor nulo, la distancia al centro del movimiento es mínima y la velocidad es máxima. Al apoastro, la anomalía verdadera tiene por valor ciento ochenta grados, la distancia al centro del movimiento es máxima y la velocidad es mínima.

Periastro	$\nu = 0°$	$r_p = a(1-e)$	$V_p = \frac{C}{a(1-e)}$
Apoastro	$\nu = 180°$	$r_a = a(1+e)$	$V_a = \frac{C}{a(1+e)}$

Podemos fácilmente deducir el valor del cuadrado de la constante de las áreas de lo que precede, especialmente de la definición del parámetro p:

$$C^2 = GMp = GMa(1-e^2) \tag{75}$$

Sin embargo, según la segunda ley de Kepler, el área total del elipse barrido por el radio vector está conocida como siendo:

$$A_{elipse} = \frac{1}{2}CT = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2} \tag{76}$$

Planteamos $n = \frac{2\pi}{T}$. n está designado el movimiento mediano sideral. Podemos inmediatamente deducir un valor del cuadrado de la constante de las áreas que es entonces posible de igualar con lo cual dada por la ecuación (75):

$$C^2 = n^2a^4(1-e^2) = \frac{4\pi^2}{T^2}a^4(1-e^2) = GMa(1-e^2) \tag{77}$$

Lo que da por fin las dos relaciones siguientes:

$$n^2a^3 = GM \tag{78 - a}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \tag{78 - b}$$

Podemos inmediatamente reconocer en la ecuación $(78-b)$ la tercera ley de Kepler.

3.3.5. Ley del movimiento elíptico: ecuación de Kepler

Siempre en el caso del movimiento elíptico, o en el movimiento circular que es un caso peculiar del primero, probamos encontrar la ley del movimiento, lo que significa una relación entre la anomalía verdadera o el radio vector y el tiempo, ya conociendo las relaciones entre el radio vector, la velocidad y la anomalía verdadera.

El círculo principal de un elipse está definido matemáticamente como el círculo de mismo centro que el elipse y de radio igual al semieje mayor. Usando $\odot$ el centro del movimiento, generalmente el Sol, P el cuerpo en movimiento, generalmente un planeta, P_p el periastro y P_a el apoastro, Ξ el centro del elipse y P' el punto del círculo principal que tiene P como proyección sobre el elipse con respecto al eje mayor. Podemos reconocer el radio vector r como siendo $\odot$P, el semieje mayor como siendo ΞP_p y la anomalía verdadera como siendo el ángulo $P_p\odot$P. Podemos introducir la anomalía excéntrica υ como siendo el ángulo $P_p\Xi$P'. Los dos ejes $(\Xi, \vec{i})$, variable x, y $(\Xi, \vec{j})$, variable y, están definidos por el primero sobre el eje ΞP_p y el segundo directamente ortogonal en el plano del movimiento.

En la marcación $(\Xi, \vec{i}, \vec{j})$, las coordenadas cartesianas de P son:

$$\begin{cases} x = a\cos\upsilon \\ y = a\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon \end{cases} \qquad (79-a)$$

En la marcación $(\odot, \vec{i}, \vec{j})$, tendremos así las relaciones siguientes:

$$\begin{cases} r\cos\nu = x - ae = a(\cos\upsilon - e) \\ r\sin\nu = y = a\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon \end{cases} \qquad (79-b)$$

Estas relaciones permiten expresar el radio vector y la anomalía verdadera con respecto a la anomalía excéntrica según el sistema siguiente de ecuaciones:

$$\begin{cases} r = a(1 - e\cos\upsilon) \\ \cos\nu = \frac{\cos\upsilon - e}{1 - e\cos\upsilon} \\ \sin\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon}{1-e\cos\upsilon} \end{cases} => \begin{cases} \sin^2\frac{\nu}{2} = \frac{(1+e)(1-\cos\upsilon)}{2(1-e\cos\upsilon)} \\ \cos^2\frac{\nu}{2} = \frac{(1-e)(1+\cos\upsilon)}{2(1-e\cos\upsilon)} \end{cases} \qquad (80)$$

Este último sistema de ecuaciones permite encontrar la relación entre la anomalía verdadera y la anomalía excéntrica:

$$tg\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{\upsilon}{2} \qquad (81)$$

Anotamos t_0 el instante del paseo al perihelio. Podemos calcular el área barrido al instante t desde el último paseo al perihelio del objeto P. Es igual al área del sector elíptico ΞP_pP menos el área del triángulo $\Xi\odot$P, pero es también igual, según la ley de las áreas, a la mitad del producto de la constante de las áreas por el tiempo necesario por el cuerpo para ir desde P_p hasta P:

$$S_{barrido} = \frac{b}{a}\pi a^2\frac{\upsilon}{2\pi} - \frac{1}{2}aeb\sin\upsilon = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}(\upsilon - e\sin\upsilon) = \frac{1}{2}C(t-t_0) \qquad (82)$$

Por utilización de las ecuaciones (76) y (82), conseguimos finalmente:

$$\frac{S_{barrido}}{A_{elipse}} = \frac{\frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}(\upsilon - e\sin\upsilon)}{\pi a^2\sqrt{1-e^2}} = \frac{\frac{1}{2}C(t-t_0)}{\frac{1}{2}CT} \qquad (83)$$

Podemos deducir inmediatamente la ecuación siguiente, llamada ecuación de Kepler:

$$\upsilon - e\sin\upsilon = \frac{2\pi}{T}(t-t_0) = n(t-t_0) = M \qquad (84)$$

La cantidad M está llamada la anomalía mediana. Es igual, como podemos verlo arriba, al producto del movimiento mediano por el tiempo que necesita el cuerpo P para ir desde el periastro hasta su posición al instante t. En un cierto instante, necesitamos entonces resolver la ecuación de Kepler por aproximación, conociendo la anomalía mediana, lo que da la anomalía excéntrica. Después, gracias a las ecuaciones (80) y (81), podemos deducir la anomalía verdadera y el radio vector...

3.4. Movimiento aparente del Sol

El movimiento de la Tierra alrededor del Sol y el movimiento aparente del Sol pueden estudiarse indiferentemente. Vamos a estudiar ahora el movimiento aparente del Sol alrededor de un observador geocéntrico. La duración de revolución es de 365.242199 días, lo que da un movimiento mediano de 0.9856473 grados por día. El semieje mayor de la órbita terrestre es igual a 149.5979 millones de kilómetros. Lo planteamos igual a una unidad astronómica. La excentricidad de la órbita terrestre tiene como valor 0.01673 (órbita débilmente elíptica).

Podemos calcular la longitud eclíptica geocéntrica y la ascensión recta del Sol, anotando que la diferencia entre la longitud eclíptica geocéntrica del Sol y la longitud eclíptica heliocéntrica de la Tierra es igual a 180° y el valor débil de la excentricidad. Por utilización del sistema de ecuaciones (80), podemos deducir que:

$$\sin(\nu - \upsilon) = \sin \nu \, \cos \upsilon - \cos \nu \, \sin \upsilon \tag{85 - a}$$

$$\sin(\nu - \upsilon) = \frac{1}{1 - e \cos \upsilon}\Big(e \sin \upsilon - (1 - \sqrt{1 - e^2}) \sin \upsilon \, \cos \upsilon\Big) \tag{85 - b}$$

La excentricidad siendo débil y el elipse siendo cercano de su círculo principal, es muy realista de quedar solamente los términos de primer orden en e dando el desarrollo limitado de la última función y de escribir:

$$\nu - \upsilon \simeq \sin(\nu - \upsilon) \simeq e \sin \upsilon \tag{85 - c}$$

La utilización de la ecuación de Kepler permite entonces de escribir al primer orden que:

$$\nu \simeq \upsilon + e \sin \upsilon = (\upsilon - e \sin \upsilon) + 2e \sin \upsilon$$

$$\nu \simeq M + 2e \sin\, M = n(t - t_0) + 2e \sin[n(t - t_0)] \tag{86}$$

El terma $2e \sin\, M$ se llama la ecuación del centro. Podemos definir dentro el plano del eclíptico la dirección del eje mayor de la órbita aparente del Sol por la longitud del perigeo $\omega_\odot$. La longitud del Sol a un instante t está dada por:

$$l_\odot = \omega_\odot + \nu \simeq \omega_\odot + M + 2e \sin\, M = \omega_\odot + n(t - t_0) + 2e \sin[n(t - t_0)] \tag{87}$$

Podemos calcular ahora la ascensión recta del Sol. La latitud eclíptica del Sol siendo nula y la oblicuidad del eclíptico siendo anotada ε, conseguimos (ver el anexo):

$$tg\alpha_\odot = tg\, l_\odot \, \cos \varepsilon \tag{88 - a}$$

Por un desarrollo limitado adecuado, podemos entonces deducir:

$$\alpha_\odot \simeq l_\odot - tg^2\frac{\varepsilon}{2} \sin 2l_\odot \simeq \omega_\odot + M + 2e \sin\, M - tg^2\frac{\varepsilon}{2} \sin[2(\omega_\odot + M)] \tag{88 - b}$$

Finalmente, conseguimos un valor aproximado por la ascensión recta dada con:

$$\alpha_\odot \simeq \omega_\odot + n(t - t_0) + 2e \sin[n(t - t_0)] - tg^2\frac{\varepsilon}{2} \sin\Big[2\Big(\omega_\odot + n(t - t_0)\Big)\Big] \tag{88 - c}$$

El terma donde aparece el cuadrado de la tangente de la mitad de la oblicuidad está llamada reducción al ecuador. La suma de la ecuación del centro y de la reducción al ecuador está llamada ecuación del tiempo. Se escribe de la manera siguiente:

$$E_{tiempo} = 2e\sin[n(t-t_0)] - tg^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\Big[2\Big(\omega_\odot + n(t-t_0)\Big)\Big] \tag{89}$$

El ángulo horario de un astro a un instante t en un cierto lugar está definido como siendo la diferencia entre el tiempo sideral local y la ascensión recta del astro. En el último caso, podemos escribir la ecuación siguiente:

$$H_\odot = TS_{local} - \alpha_\odot = TS_{local} - \omega_\odot - n(t-t_0) - E_{tiempo} \tag{90}$$

Por un otro lado, el tiempo sideral local puede escribirse de la manera siguiente, anotando $TS_{Greenwich}[0^hTU]$ el tiempo sideral de Greenwich a cero hora Tiempo Universal, k_{ratio}, la relación entre el tiempo sideral y el tiempo medio, de valor 1.0027379, con $TU = t + Constante$, y λ, la longitud terrestre del lugar de observación contada positivamente, en horas, hacia el Oeste:

$$TS_{local} = TS_{Greenwich}[0^hTU] + k_{ratio}TU - \lambda = TS_0 + k_{ratio}t \tag{91}$$

Eso permite escribir la relación siguiente:

$$H_\odot = TS_0 - (\omega_\odot - nt_0) + (k_{ratio} - n)t - E_{tiempo} \tag{92}$$

La cantidad $H_m = H_\odot + E_{tiempo}$ se llama el tiempo solar medio. Anotando que $k_{ratio} = 1 + n = 1 + 0.0027379$, con un movimiento mediano expresado como k_{ratio} en ciclos por día, y eligiendo como origen temporal un cierto mediodía mediano, obtenemos sencillamente $H_m = t$. Al momento cuando $H_m = 0$, tendremos $H_\odot = -E_{tiempo}$. El tiempo solar medio adelanta o retrasa entonces sobre el tiempo solar verdadero. La diferencia entre el tiempo sideral y el tiempo solar medio es la ascensión recta, proporcional al tiempo absoluto t, de un móvil ficticio llamado Sol medio.

$$TS_{local} - H_m = \alpha_m = (\omega_\odot - nt_0) + nt \tag{93}$$

4. Movimiento alrededor de un punto fijo; precesión de los equinoccios

4.1. Ecuaciones de Euler

Un sólido S en movimiento alrededor de un punto fijo O tiene tres grados de libertad. El estudio del movimiento necesita entonces tres ecuaciones que provee el teorema del momento cinético en el punto = donde se ejercen acciones de contacto desconocidas. Pero, en el caso de una conexión perfecta, el momento en O de las acciones de contacto es nulo, lo que implica que el momento de las fuerzas exteriores se reduce a los de las fuerzas conocidas $\overrightarrow{M}_O$. Designamos $\vec{L}_O$ el momento cinético de S con respecto al referencial $\Re$ en el punto de fijación 0 aceptado como origen de $\Re$. Viene:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{M}_O$$

En el caso de un movimiento alrededor del centro de masa C en el referencial $\Re^*$ del centro de masa, el teorema del momento cinético en C se escribe:

$$\frac{d\vec{L}_C^*}{dt} = \overrightarrow{M}_C$$

Asociamos al sólido S el referencial principal de inercia $\Re' = Ox'y'z'$. Si $\vec{\omega}_{S/\Re}$ es la velocidad angular de S con respecto a $\Re$, tenemos:

$$\vec{L}_{O/\Re} = [I]_O \, \vec{\omega}_{S/\Re}$$

En la base de $\Re'$, el operador de inercia $[I]_O$ y la velocidad angular $\vec{\omega}_{S/\Re}$ se escriben respectivamente, lo que permite calcular el momento cinético $\vec{L}_{O/\Re}$ en la misma base:

$$[I]_O \quad \underset{\Re'}{} \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{\omega}_{S/\Re} \quad \underset{\Re'}{} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad \vec{L}_{O/\Re} \quad \underset{\Re'}{} \begin{pmatrix} I_1\,\omega_1 \\ I_2\,\omega_2 \\ I_3\,\omega_3 \end{pmatrix}$$

Tomando en cuenta la composición de las derivaciones:

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\Re'} + \vec{\omega}_{S/\Re} \wedge \vec{L}_O = \overrightarrow{M}_O$$

Esta relación se puede expresar de la manera siguiente:

$$\underset{\Re'}{} \begin{pmatrix} I_1\,\dot{\omega}_1 \\ I_2\,\dot{\omega}_2 \\ I_3\,\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \underset{\Re'}{} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \wedge \underset{\Re'}{} \begin{pmatrix} I_1\,\omega_1 \\ I_2\,\omega_2 \\ I_3\,\omega_3 \end{pmatrix} = \underset{\Re'}{} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$$

Podemos entonces deducir las tres ecuaciones de Euler:

$$\begin{cases} I_1\,\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2\,\omega_3 = M_1 \\ I_2\,\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_3\,\omega_1 = M_2 \\ I_3\,\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_1\,\omega_2 = M_3 \end{cases}$$

En estas ecuaciones, $\overrightarrow{M}_O$ y $\vec{\omega}_S$ aparecen por sus componentes en la base de $\Re'$ conectada al sólido. Así estas ecuaciones son generalmente difíciles a explotar. No obstante, en el caso peculiar del movimiento de Poinsot, vamos a ver que se puede usarlas.

4.2. Movimiento de Poinsot

4.2.1. Definición y propiedad fundamental

Llamamos movimiento de Poinsot el movimiento de un sólido alrededor de un punto fijo O tal que en este punto 0 el momento $\overrightarrow{M}_O$ de las fuerzas exteriores sea nulo.

Como $\overrightarrow{M}_O = \vec{0}$, $\vec{L}_O$ queda constante. Por otra parte, la potencia de las acciones en O, $\overrightarrow{M}_O.\vec{\omega}_{S/\Re}$ siendo nula, la energía cinética E_c queda constante. Por consecuencia, en un movimiento de Poinsot, el momento cinético y la energía cinética se conservan.

4.2.2. Velocidades de rotación estacionarias

Las ecuaciones de Euler permiten establecer que cualquier rotación de un sólido alrededor de un eje principal de inercia es estacionaria. En efecto, en este caso, las ecuaciones de Euler se escriben:

$$\begin{cases} I_1\,\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2\,\omega_3 = 0 \\ I_2\,\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_3\,\omega_1 = 0 \\ I_3\,\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_1\,\omega_2 = 0 \end{cases}$$

Al principio, podemos mostrar que, si ω está fijo con respecto a $\Re$, también lo está con respecto a S:

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{S} + \vec{\omega}_{S/\Re} \wedge \vec{\omega}_{S/\Re} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{S}$$

Algunos casos deben estar considerados a parte:

a) La matriz principal es cualquiera ($I_1 \neq I_2 \neq I_3$). Las tres soluciones siguientes por las cuales dos componentes de $\vec{\omega}_{S/\Re}$ son nulas satisfacen a las ecuaciones de Euler:

$$\begin{cases} \omega_1 = Constante \quad \omega_2 = 0 \quad \omega_3 = 0 \\ \omega_2 = Constante \quad \omega_3 = 0 \quad \omega_1 = 0 \\ \omega_3 = Constante \quad \omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 0 \end{cases}$$

El vector $\vec{\omega}_{S/\Re}$ está dirigido, entonces, hacia uno de los ejes principales.

b) La matriz principal es cilíndrica ($I_1 = I_2 \neq I_3$). En este caso de simetría cilíndrica, las dos soluciones siguientes satisfacen a las ecuaciones de Euler:

$$\begin{cases} \omega_1 = Constante \quad \omega_2 = Constante \quad \omega_3 = 0 \\ \omega_3 = Constante \quad \omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 0 \end{cases}$$

La rotación se hace entonces con velocidad angular constante, según el eje Oz' o según un eje perpendicular a Oz'.

c) La matriz principal es esférica ($I_1 = I_2 = I_3$). En este caso de simetría esférica donde todo eje es eje principal de inercia, toda velocidad rotacional es solución estacionaria de las ecuaciones de Euler.

4.2.3. Movimiento de Poinsot de un sólido con simetría material de revolución

El momento cinético en O, $\vec{L}_{O/\Re}$, siendo una constante vectorial, podemos escoger el eje Oz de $\Re$ como dirección de $\vec{L}_O$ para facilitar los cálculos. En este caso, tenemos $I_1 = I_2$.

a) Características del movimiento

La intersección Ou de los planos Oxy y $Ox'y'$ siendo llamada línea de los nodos, podemos ahora introducir los tres ángulos de Euler, en la ocurrencia $\psi = (Ox, Ou)$, llamado ángulo de precesión, $\theta = (Oz, Oz')$, llamado ángulo de nutación, y $\phi = (Ou, Ox')$, llamado ángulo de rotación propia, para determinar la posición de S representado por el referencial $\Re'$. El vector velocidad angular instantánea $\vec{\omega}_{S/\Re}$ se puede escribir:

$$\vec{\omega}_{S/\Re} = \dot{\psi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{e}_u + \dot{\phi}\,\vec{e}_{z'}$$

Podemos expresar $\vec{L}_{O/\Re}$ en la base intermediaria de la marcación de Resal $\Re_e = Ouwz'$.base es base principal de inercia debido a la simetría material de revolución: El operador de inercia $[I]_O$ tiene entonces la misma expresión en $\Re'$ y $\Re_e$. Por lo que concierne

$\vec{\omega}_{S/\Re}$ y $\vec{L}_{O/\Re}$, tienen las respectivas expresiones, con respecto a ψ, θ, ϕ:

$$\vec{\omega}_{S/\Re} = \underset{\Re_e}{} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\, \sin\theta \\ \dot{\psi}\, \cos\theta + \dot{\phi} \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{L}_{O/\Re} = \underset{\Re_e}{} \begin{pmatrix} I_1\, \dot{\theta} \\ I_1\, \dot{\psi}\, \sin\theta \\ I_3\, (\dot{\psi}\, \cos\theta + \dot{\phi}) \end{pmatrix}$$

Por otra parte, sabemos que $\vec{L}_{O/\Re}$ se puede escribir igualmente de la manera siguiente:

$$\vec{L}_{O/\Re} = L\, \sin\theta\, \vec{e}_w + L\, \cos\theta\, \vec{e}_{z'}$$

Podemos deducir, entonces, las tres ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\begin{cases} I_1\, \dot{\theta} = 0 \\ I_1\, \dot{\psi}\, \sin\theta = L\, \sin\theta \\ I_3\, (\dot{\psi}\, \cos\theta + \dot{\phi}) = L\, \cos\theta \end{cases}$$

Por consecuencia, con $0 < \theta < \pi$, podemos concluir que:

$$\begin{cases} \theta = Constante \\ \\ \dot{\psi} = \frac{L}{I_1} = Constante \\ \\ \dot{\phi} = (\frac{L}{I_3} - \dot{\psi})\cos\theta = (\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1})L\, \cos\theta = Constante \end{cases}$$

Finalmente, las características del movimiento de Poinsot son las siguientes: El ángulo de nutación θ y las velocidades angulares de precesión $\dot{\psi}$ (ψ siendo el ángulo de precesión) y de rotación propia $\dot{\phi}$ (ϕ siendo el ángulo de rotación propia) son estacionarios.

b) Consecuencias

(1) La norma de $\vec{\omega}_{S/\Re}$ es constante.

(2) Su componente $\omega_{z'}$ según Oz' es una constante. Eso impone que el vector $\vec{\omega}_{S/\Re}$ está describiendo un cono con la velocidad de rotación $-\dot{\phi}$ definida a partir del ángulo $(Ox', Ou = -\phi)$. Este cono relativo al referencial $\Re'$ unido al sólido S está llamado el *cono del sólido*. Su ángulo de cúspide α está conectado con el ángulo de nutación θ por la relación:

$$tg\alpha = \frac{\omega_w}{\omega_{z'}} = \frac{\dot{\psi}\, \sin\theta}{\dot{\psi}\, \cos\theta + \dot{\phi}} = \frac{L\, \sin\theta / I_1}{L\, \cos\theta / I_3} = \frac{I_3}{I_1} tg\theta$$

(3) Su componente ω_z según Oz es también una constante. Entonces, el vector $\vec{\omega}_{S/\Re}$ está describiendo dentro de $\Re$ un cono con la velocidad $\dot{\psi}$, definida a partir del ángulo $(Ox, Ou = \psi)$. Este cono está llamado el *cono de base*, siendo conectado con $\Re$.

Un análisis básico muestra inmediatamente que haya dos casos posibles, el caso $\alpha > \theta$ y el caso $\alpha < \theta$. Los dos conos son tangentes según el eje llevando $\vec{\omega}_{S/\Re}$. Este eje siendo un eje instantáneo de rotación, el cono del sólido enrolla sin deslizar sobre el cono de base, lo que induce el apellido de *cono rodante* que recibe a veces el cono del sólido.

c) Aplicación al movimiento de Poinsot de la Tierra

La Tierra puede ser asimilada a un sólido de revolución alrededor del eje polar, tal que $I_3 > I_1$ debido a la existencia del burlete ecuatorial de la Tierra. En primera aproximación, el momento de las acciones gravitacionales que se ejercen sobre la Tierra en su centro T es nulo. Entonces, el vector velocidad angular debería girar alrededor de Oz' con la velocidad angular $-\dot{\phi}$, según la teoría desarrollada anteriormente. Expresamos $\omega_{z'}$ en función de θ:

$$\omega_{z'} = \dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\phi} = \frac{L\,\cos\theta}{I_1} + \dot{\phi} = \frac{L\,\cos\theta}{I_3}$$

Lo que permite escribir la ecuación siguiente:

$$-\dot{\phi} = L\,\cos\theta\left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right) = \frac{L\,\cos\theta}{I_3}\left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right) = \omega_{z'}\left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right) \approx \frac{\omega_{z'}}{305}$$

porque, por lo que concierne la Tierra:

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} \approx \frac{1}{305}$$

Como el periodo de rotación alrededor de Oz' es de un día, el periodo de esta llamada "precesión libre" será de 305 días. Las observaciones muestran un fenómeno análogo de precesión de $\vec{\omega}_{S/\Re}$ alrededor de Oz' con un periodo de 400 días y una amplitud angular cercana de 15". La diferencia entre la teoría y las observaciones se pueden explicar a partir de las deformaciones de la Tierra con respecto a su rotación.

4.3. Movimiento de Lagrange y Poisson

4.3.1. Definición

Llamamos movimiento de Lagrange y Poisson el movimiento de un sólido homogéneo teniendo la simetría de revolución, móvil alrededor de un punto fijo O y sumiso a fuerzas cuyo momento en O está dirigido según la línea de los nodos Ou. Varios tipos de sólidos físicos (trompos, giróscopos de navegación, movimiento de la Tierra dentro del referencial del centro de masa, etc.) tienen un tal movimiento.

4.3.2. Ecuaciones del movimiento de un trompo simétrico en el campo de pesadez

El momento del peso $\overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{g}$ es colineal a la línea de los nodos Ou. El trompo en movimiento alrededor del punto fijo O posee tres grados de libertad que podemos tomar iguales a los tres ángulos de Euler. Debemos entonces encontrar tres ecuaciones escalares dentro de las cuales las únicas incógnitas sean ψ, θ y ϕ. Es eso que realice el teorema del momento cinético aplicado en O con respecto a $\Re$. Como la conexión esférica en O está supuesta perfecta, el momento de las acciones de contacto en este punto es nulo. Entonces:

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\Re} = \overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{g}$$

Es conveniente de expresar esta relación usando la marcación de Resal $\Re_e = Ouwz'$:

$$\vec{L}_O = [I]_O\,\vec{\omega}_{S/\Re} = {}_{\Re_e}\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}\ {}_{\Re_e}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\,\sin\theta \\ \dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\phi} \end{pmatrix} = {}_{\Re_e}\begin{pmatrix} I_1\,\dot{\theta} \\ I_1\,\dot{\psi}\,\sin\theta \\ I_3\,(\dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\phi}) \end{pmatrix}$$

El momento cinético $\vec{L}_O$ siendo expresado en la base de $\Re_e$, la derivación con respecto al tiempo, relativa a $\Re$, se obtiene tomando en cuenta la composición de las derivaciones:

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\Re_e} + \vec{\omega}_e \wedge \vec{L}_O = \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{g}$$

donde $\vec{\omega}_e = \dot{\theta}\,\vec{e}_u + \dot{\psi}\,\vec{e}_z$ es la velocidad angular de rotación de $\Re_e$ con respecto a $\Re$.

Por una parte, tenemos entonces:

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\Re} = {}_{\Re_e}\begin{pmatrix} I_1\,\ddot{\theta} \\ I_1\,(\ddot{\psi}\,\sin\theta + \dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta) \\ I_3\,\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\phi}) \end{pmatrix} + {}_{\Re_e}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\,\sin\theta \\ \dot{\psi}\,\cos\theta \end{pmatrix} \wedge {}_{\Re_e}\begin{pmatrix} I_1\,\dot{\theta} \\ I_1\,\dot{\psi}\,\sin\theta \\ I_3\,(\dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\phi}) \end{pmatrix}$$

Mientras tanto, por otra parte, tenemos (anotando $\overrightarrow{OC} = l\,\vec{k}'$):

$$\overrightarrow{OC} \wedge m\vec{g} = {}_{\Re_e}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge {}_{\Re_e}\begin{pmatrix} 0 \\ -mg\,\sin\theta \\ -mg\,\cos\theta \end{pmatrix}$$

Lo que llega al sistema de tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} I_1\,(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2\,\sin\theta\,\cos\theta) + I_3\,\dot{\psi}\,(\dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\phi})\,\sin\theta = mgl\,\sin\theta \\ I_1\,(\ddot{\psi}\,\sin\theta + 2\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\ \cos\theta) - I_3\,\dot{\theta}\,(\dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\phi}) = 0 \\ I_3\,\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\phi}) = 0 \end{cases} \tag{94}$$

La tercera ecuación está expresando la conservación de la componente del momento cinético según el eje de revolución del trompo:

$$L_{Oz'} = I_3\,(\dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\phi}) = I_3\,\omega_{z'} = Constante$$

La segunda ecuación está expresando la conservación de la componente del momento cinético según el eje vertical. En efecto, multiplicando esta ecuación por sin θ, conseguimos:

$$I_1\,(\ddot{\psi}\,\sin^2\theta + 2\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\sin\theta\,\cos\theta) - I_3\,\dot{\theta}\,(\dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\phi})\,\sin\theta = 0$$

$$I_1\,\frac{d(\dot{\psi}\,\sin^2\theta)}{dt} - I_3\,(\dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\phi})\,\dot{\theta}\,\sin\theta = I_1\,\frac{d(\dot{\psi}\,\sin^2\theta)}{dt} - L_{Oz'}\,\dot{\theta}\,\sin\theta = 0$$

Podemos integrar de manera muy fácil esta ecuación para obtener la componente L_{Oz} del momento cinético $\vec{L}_O$ en el referencial $\Re$:

$$L_{Oz} = I_1\,\dot{\psi}\,\sin^2\theta + L_{Oz'}\,\cos\theta = Constante$$

Esta última ecuación de conservación era predecible, el momento del peso siendo siempre perpendicular al eje Oz del referencial $\Re$.

Ambos resultados nos permiten encontrar los valores de $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$ con respecto al ángulo θ y las componentes del momento cinético según los ejes Oz y Oz':

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{L_{Oz} - L_{Oz'}\,\cos\theta}{I_1\,\sin^2\theta} \\ \\ \dot{\phi} = \frac{L_{Oz'}}{I_3} - \dot{\psi}\,\cos\theta \end{cases} \tag{95}$$

A partir de la primera y de la segunda ecuaciones (94), podemos obtener una otra relación integrada, debido al uso de la energía mecánica y sabiendo que las fuerzas que trabajen derivan de una energía potencial. En efecto, escribiendo el teorema de la energía mecánica $E_m = E_c + E_p = Constante$, podemos escribir:

$$\begin{cases} E_{c/\Re} = \frac{1}{2}\,\vec{L}_{O/\Re}\,.\,\vec{\omega}_{S/\Re} = \frac{1}{2}\,(I_1\,\dot{\theta}^2 + I_1\,\dot{\psi}^2\,\sin^2\theta + I_3\,(\dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\phi})^2) \\ \\ E_p = mgz_C = mgl\,\cos\theta \end{cases}$$

lo que permite escribir la relación siguiente, la ecuación del movimiento, tomando en cuento todo lo que hemos encontrado anteriormente:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,(I_1\,\dot{\theta}^2 + I_1\,\dot{\psi}^2\,\sin^2\theta + I_3\,(\dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\phi})^2) + mgl\,\cos\theta$$

Y, finalmente:

$$E_m = \frac{1}{2}\left[I_1\,\dot{\theta}^2 + \frac{(L_{Oz} - L_{Oz'}\,\cos\theta)^2}{I_1\,\sin^2\theta} + \frac{L_{Oz'}^2}{I_3}\right] + mgl\,\cos\theta = \frac{I_1\,\dot{\theta}^2}{2} + E_{p,ef}$$

llamando $E_{p,ef}$ la energía potencial efectiva:

$$E_{p,ef} = mgl\,\cos\theta + \frac{(L_{Oz} - L_{Oz'}\,\cos\theta)^2}{2\,I_1\,\sin^2\theta} + \frac{L_{Oz'}^2}{2\,I_3}$$

El problema es entonces de resolver la ecuación del movimiento $E_m = \frac{I_1\,\dot{\theta}^2}{2} + E_{p,ef}$ y de deducir de ella la variación de θ con respecto al tiempo. La incógnita θ siendo conocida, las ecuaciones (95) permiten establecer las velocidades angulares $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$.

4.3.3. Discusión

Trazamos el gráfico de $E_{p,ef}(\theta)$. La energía potencial efectiva toma valores infinitos por $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ y pasa por un mínimo E_0 por $0 < \theta < \pi$. Por otra parte, la energía mecánica debe siempre ser superior o igual a la energía potencial efectiva, como lo muestra de manera evidente la ecuación $\frac{I_1\,\dot{\theta}^2}{2} = E_m - E_{p,ef}$, lo que descarta los valores demasiados altos de $E_{p,ef}$, y, así, los valores de θ demasiados cercanos de 0 o de π.

a) $E_m > E_0$

El ángulo θ queda incluido entre dos valores extremos θ_1 y θ_2. Tres casos deben ser considerados según el signo de la velocidad de precesión $\dot{\psi}$.

(1) $\dot{\psi}$ queda el mismo signo: El punto C está describiendo una esfera de radio l, siguiendo su movimiento de precesión siempre en el mismo sentido y oscilando entre los paralelos θ_1 y θ_2.

(2) $\dot{\psi}$ cambia de signo y se está anulando por un valor de θ incluido entre θ_1 y θ_2: El punto C está oscilando entre los dos paralelos, haciendo bucles de retrogradación cuando la velocidad de precesión cambia de signo.

(3) $\dot{\psi}$ cambia de signo y se está anulando al mismo tiempo que $\dot{\theta}$: Al instante cuya condición está realizada, el punto C tiene una velocidad nula y la trayectoria presente puntos de media vuelta que deben ser ubicados sobre el paralelo correspondiente a la energía potencial máxima, según la ecuación de conservación de la energía mecánica.

b) $E_m = E_0$

En este caso, $\theta = \theta_0$ y $\dot{\theta} = 0$. El movimiento es estacionario en θ; $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$ son entonces constantes. El trompo estacionario sigue su movimiento de precesión y gira de manera uniforme alrededor de su eje. Los casos singulares $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ corresponden al trompo durmiente en posición alta o baja. Este movimiento con nutación constante ($\theta = \theta_0 \neq 0$) debe satisfacer la ecuación siguiente, que podemos deducir de los cálculos anteriores con $\dot{\theta} = 0$:

$$I_1 \, \dot{\psi}_0^2 \, \cos^2\theta_0 - L_{Oz'} \, \dot{\psi}_0 + mgl = 0$$

Las dos soluciones en $\dot{\psi}_0$ son:

$$\dot{\psi}_0 = \frac{1}{2\, I_1 \, \cos^2\theta_0} \left[L_{Oz'} \pm \sqrt{L_{Oz'}^2 - 4\, mgl \, I_1 \, \cos^2\theta_0} \right]$$

Así, por un valor determinado de la rotación propia, el movimiento con nutación constante admite generalmente dos velocidades de precesión uniforme, una lenta y una rápida. Es la precesión lenta que se puede obtener de la manera la más fácil.

4.3.4 Influencia de una fuerza de fricción

En todo lo que precede, tenemos la suposición de la existencia de una conexión perfecta, lo que significa que las fricciones tuvieron una influencia despreciable. No obstante, la experiencia muestra que es indispensable de tomarlas en cuenta si queremos explicar la desaceleración de la velocidad de rotación propia $\dot{\phi}$ et el aumento del ángulo de nutación θ. Este último cesa cuando el trompo alcanza su posición de equilibrio estable $\theta = \pi$, lo que corresponde a la orientación del momento cinético según la dirección y el sentido del campo de pesadez terrestre $\vec{g}$.

4.4. Aproximación giroscópica

Se dice que el movimiento de un sólido teniendo la simetría de revolución alrededor de un punto fijo está satisfaciendo a la aproximación giroscópica cuando su velocidad angular de rotación alrededor de su eje de revolución es muy grande al frente de las velocidades de precesión y de nutación. Esta aproximación, que podemos escribir $\vec{\omega}_{S/\Re} \approx \omega_{S/\Re}\vec{e}_{z'}$, tiene una gran importancia en mecánica, numerosos sistemas e instrumentos, especialmente el giróscopo y la Tierra, poseen un tal movimiento. Debido al uso de los ángulos de Euler, podemos exprimirla como: $\dot{\phi} \gg \dot{\theta}$ y $\dot{\phi} \gg \dot{\psi}$.

4.4.1. Ecuación diferencial del movimiento

En el caso de un objeto girando en un campo de pesadez, el teorema del momento cinético aplicado al sólido S, al punto de fijación O, da vectorialmente:

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right) = \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{g} = \frac{mgl}{L_O} \vec{L}_O \wedge \frac{\vec{g}}{g}$$

porque el momento cinético está casi llevado por el vector $\overrightarrow{OC}$.

4.4.2. Naturaleza del movimiento

A partir de esta ecuación vectorial, podemos deducir dos propiedades notables.

(1) Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $\vec{L}_O$, podemos ver que:

$$\vec{L}_O\,.\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)=\frac{1}{2}\frac{d\vec{L}_O^2}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dL_O^2}{dt}=\vec{L}_O\,.\frac{mgl}{L_O}\vec{L}_O\wedge\frac{\vec{g}}{g}=\frac{mgl}{L_O}\vec{L}_O\,.\left(\vec{L}_O\wedge\frac{\vec{g}}{g}\right)=0$$

Así, podemos ver fácilmente que $L_O = Constante$, lo que indica que, durante el movimiento, la norma L_O del momento cinético se conserva.

(2) Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $\vec{e}_z$, podemos ver que:

$$\vec{e}_z\,.\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)=\frac{d\left(\vec{e}_z\,.\vec{L}_O\right)}{dt}=\frac{dL_{Oz}}{dt}=\vec{e}_z\,.\left(\overrightarrow{OC}\wedge m\vec{g}\right)=0$$

Así, durante el movimiento, la proyección L_{Oz} del momento cinético según un eje vertical es constante. Resulta de eso que el momento cinético $\vec{L}_O$ está describiendo un cono de cumbre O, de eje Oz definido por el campo de pesadez y de semi ángulo θ_0. Podemos deducir de eso que el eje de rotación propia Oz' tiene un movimiento de precesión alrededor de la dirección del campo de pesadez.

Se debe ver que este movimiento de precesión supone que se puede desatender las fuerzas de fricción. En el caso contrario, la velocidad de rotación propia así que la velocidad de precesión se debilitan y el ángulo de nutación aumenta hasta el valor $\theta = \pi$ al equilibrio.

4.4.3. Velocidad angular de precesión

La ecuación vectorial anterior, característica del movimiento, se puede escribir:

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\Re}=\vec{\omega}_P\wedge\vec{L}_O=-\frac{ml\vec{g}}{L_O}\wedge\vec{L}_O=\frac{mgl}{L_O}\vec{e}_z\wedge\vec{L}_O\approx\frac{mgl}{I_3\dot{\phi}}\vec{e}_z\wedge\vec{L}_O$$

Esta ecuación muestra que el vector $\vec{L}_O$, de norma constante, gira con respecto a $\Re$ con una velocidad angular $\vec{\omega}_P$ llevada por la dirección del campo exterior. Esta velocidad $\vec{\omega}_P$ es la velocidad angular de precesión. Finalmente, podemos deducir:

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\Re}=L_O\,\sin\theta_0\,\dot{\psi}\,\vec{e}_u=mgl\,\sin\theta_0\,\vec{e}_u=\overrightarrow{OC}\wedge m\vec{g}$$

Y, entonces:

$$\dot{\psi}=\frac{mgl}{L_O}$$

4.4.4. Comportamiento paradójico, fuerza de fricción, estabilidad

Según el análisis anterior, el efecto de la pesadez es de desplazar el centro de masa en un plano horizontal. Este comportamiento del sólido en rotación debajo de la acción de una fuerza vertical difiere bastante, entonces, de su comportamiento en la ausencia de rotación, cuando, en este caso, el sólido tiene el movimiento de un péndulo pesado. Es por eso que el giróscopo a sido considerado a menudo como un objeto paradójico. Es posible de ver este aspecto paradójico cuando se ejerce una fuerza exterior vertical sobre el eje del trompo giroscópico: Se puede constatar, como con el peso, un desplazamiento horizontal del centro de masa. En el caso de una fuerza exterior horizontal, el eje se desplaza verticalmente.

Con la acción de una fuerza de fricción, la velocidad de rotación propia está diminuyendo y perdiendo su preponderancia. El comportamiento es entonces intermediario entre lo del trompo giroscópico y lo del péndulo pesado. El eje del giróscopo se orienta según el campo de pesadez mientras tanto precesionando alrededor del eje de rotación propia.

Una velocidad grande de rotación alrededor del eje de revolución confiere una gran estabilidad al sólido, porque, como lo vimos, el efecto de una fuerza vertical como el peso es de desplazar el centro de masa en un plan horizontal.

4.4.5. Interpretación de la precesión de los equinoccios

Vimos anteriormente que la Tierra gire alrededor del Sol en el plano del eclíptico (movimiento de revolución, de periodo un año), mientras tanto su movimiento de rotación (periodo 23 h 56 min 4 s) se efectúa en el plano ecuatorial terrestre, el primer plano siendo inclinado de un ángulo llamado oblicuidad del eclíptico, de valor $\varepsilon = 23°26'$ (ángulo lentamente variable, ver la ecuación (36)). Eso significa que el Sol, en su movimiento aparente alrededor de la Tierra, está cruzando el plano ecuatorial terrestre dos veces al año, una primera vez en el punto vernal γ al equinoccio de marzo (cuando va del sur al norte, al inicio de la primavera en el hemisferio norte y del otoño en el hemisferio sur) y una segunda vez en el punto γ' al equinoccio de septiembre (cuando va del norte al sur, al inicio de la primavera en el hemisferio sur y del otoño en el hemisferio norte).

La precesión de los equinoccios, descubierta por el astrónomo griego Hiparco durante el segundo siglo antes de nuestra era, debido al uso de observaciones más antiguas, es el movimiento lento del punto vernal γ a lo largo del círculo eclíptico en el sentido retrógrado, con un periodo de 25750 años. Este movimiento, que lleva el sistema entero de coordenadas ecuatoriales, tiene su origen en la esfericidad imperfecta de la Tierra.

Podemos establecer que el momento de las acciones gravitacionales ejercitadas por los otros cuerpos celestes (Luna, Sol, Venus, Júpiter, principalmente) sobre la Tierra no es nulo, porque la Tierra no tiene exactamente una forma esférica. La Tierra tiene realmente una forma esférica hinchada en la zona ecuatorial. Este momento tiene como expresión:

$$\vec{M}_T = -A\,\sin(2\theta)\,\vec{e}_u = -\frac{3}{4}\,G\,(I_3 - I_1)\left(\frac{M_S}{r_S^3} + \frac{M_L}{r_L^3} + \frac{M_V}{r_V^3} + \frac{M_J}{r_J^3} + ...\right)\sin(2\theta)\,\vec{e}_u$$

En esta fórmula, el símbolo G designa la constante de gravitación de Isaac Newton, cuyo valor es: $G = (6.673 \pm 0.010)10^{-11}\,m^3 kg^{-1} s^{-2}$. El calculo muestra que las contribuciones de los planetas Venus, Júpiter, ..., son despreciables con respecto a ambos contribuciones de la Luna y del Sol, aun cuando estos planetas se ubican lo más cercano posible de la Tierra. Por lo que concierne las contribuciones de la Luna y del Sol, el calculo da una influencia 2.184 veces más fuerte por la Luna que por el Sol ($\frac{M_L}{r_L^3} = 1.298\,10^{-3}\,kg\,m^{-3} = 2.184\,\frac{M_S}{r_S^3}$, con $\frac{M_S}{r_S^3} = 0.5944\,10^{-3}\,kg\,m^{-3}$), donde M es la masa del cuerpo celeste considerado (Luna o Sol) y r la distancia de su centro al centro de la Tierra. Por otra parte, la diferencia de los momentos de inercia $(I_3 - I_1)$ muestra que estas acciones gravitacionales estén relacionadas con el defecto de simetría de la Tierra.

Dentro del referencial geocéntrico $\Re_g$, el movimiento de la Tierra puede entonces ser considerado como un movimiento de Lagrange y Poisson en la aproximación giroscópica, su velocidad de rotación propia $\omega = \dot{\phi} \approx 7.29\,10^{-5}\,rad\,s^{-1}$ siendo muy grande con respecto a la velocidad de precesión $\omega_p = \dot{\psi} = 7.73\,10^{-12}\,rad\,s^{-1}$, mientras tanto su ángulo de nutación $\theta = \varepsilon$ (la oblicuidad del eclíptico) entre el eje de rotación de la Tierra con el eje perpendicular al plano del eclíptico es muy lentamente variable (ver la ecuación (36)), teniendo un valor $\theta_0 = \varepsilon = 23°26'$ casi constante.

Podemos entonces hacer una analogía con el trompo en la aproximación giroscópica y escribir la velocidad de precesión como:

$$\omega_p = \dot{\psi} = -\frac{A\,\sin(2\theta_0)}{I_3\,\dot{\phi}\,\sin\theta_0} = -\frac{3}{2}\,G\,\frac{I_3 - I_1}{I_3}\,\left(\frac{M_S}{r_S^3} + \frac{M_L}{r_L^3}\right)\,\frac{\cos\theta_0}{\dot{\phi}}$$

La tercera ley de Kepler (ecuación $(78-b)$) permite simplificar esta última expresión, con $\frac{GM}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T_a^2}$, mientras tanto $\dot{\phi} = \frac{2\pi}{T_d}$, T_a y T_d siendo respectivamente el periodo anual ($365.2422\,d = 31556926\,s$) y el periodo diario sideral ($23\,h\,56\,min\,4\,s = 86.164\,s$):

$$\omega_p = \dot{\psi} = -\frac{3}{2}\,\frac{I_3 - I_1}{I_3}\,\left(3.184\,G\,\frac{M_S}{r_S^3}\right)\,\frac{T_d\,\cos\theta_0}{2\pi} = -3\pi\,\frac{I_3 - I_1}{I_3}\,3.184\left(\frac{T_d}{T_a^2}\right)\,\cos\theta_0$$

$$\omega_p = \dot{\psi} = -7.785\,10^{-12} rad\,s^{-1}$$

Podemos fácilmente deducir el movimiento angular del punto vernal γ durante un año:

$$\dot{\psi}\,T_a = -3\pi\,\frac{I_3 - I_1}{I_3}\,3.184\left(\frac{T_d}{T_a}\right)\,\cos\theta_0 = -2.457\,10^{-4} rad = -50.68\text{”}$$

Donde el signo $-$ significa que el movimiento del punto vernal γ está hecho en el sentido retrógrado a lo largo del círculo eclíptico. Por otra parte, podemos establecer el valor del periodo del movimiento de precesión, lo que corresponde al tiempo necesario por el punto vernal γ para hacer una revolución entera a lo largo del círculo eclíptico.

$$T_p = \frac{2\pi}{\dot{\psi}} = \frac{2\pi}{\dot{\psi}\,T_a}\,T_a = 25575\,T_a = 255.75\,siglos$$

Se debe notar aquí que el valor real del periodo del movimiento de precesión es un poco más alto, 257.50 *siglos*, como lo dijimos antes. Esta diferencia viene de varios orígenes, las imprecisiones de cálculo, las otras perturbaciones (planetas), etc.

Así, durante dos mil años, el punto vernal γ está haciendo un movimiento de 28.15° en el sentido retrógrado, lo que corresponde a casi una parte de 30° (un duodécimo) del círculo eclíptico. Los astrónomos de la Antigüedad (y especialmente Hiparco y Tolomeo) dividieron el círculo eclíptico en 12 partes iguales de 30°, a partir del punto vernal γ, y nombraron cada parte (así cada signo zodiacal) con el apellido de la constelación localizada al frente. Esta división, ahora obsoleta, fue guardada por los astrónomos de la Edad Media y del Renacimiento, pero abandonada después, sino por los astrólogos.

Su problema mayor es claramente que los signos zodiacales, asociados a al punto vernal γ, se mueven lentamente en el sentido retrógrado con respecto a las constelaciones que sirvieron a bautizarlos, en la ocurrencia las constelaciones zodiacales Pisces, Cetus (la Ballena, constelación no usada), Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo, Libra, Scorpius, Ophiuchus (el Portador de Serpiente, constelación no usada), Sagittarius, Capricornius y Aquarius. Entonces, con 28.15°, los signos zodiacales no corresponden más a las constelaciones asociadas, pero se superponen, a nuestra época, a las siguientes en el sentido retrógrado, mientras tanto este desajuste va empeorando con el tiempo.

Por ejemplo, dos mil años atrás, el Sol estaba localizado en el primer grado del signo zodiacal de Aries el día del equinoccio de primavera por el hemisferio norte, el 21 de marzo, al frente de la constelación de Aries. A nuestra época, el Sol está localizado todavía en el primer grado del signo zodiacal de Aries el día del equinoccio de primavera por el hemisferio norte, el 20 de marzo, pero al frente de la constelación de Pisces, no muy lejano del limite de la constelación Aquarius. Así, hay un desajuste más y más grande entre los signos zodiacales y las constelaciones que sirvieron a nombrarlos. Esta constatación es uno de los numerosos argumentos para rechazar el discurso artrológico, discurso que no tiene nada de científico, cómo lo sabe muy probablemente el lector de este documento.

5. Bibliografía

Acker, A.: **1979**, *Initiation à l'astronomie*, 2ème édition, Masson, Paris.

Allen, C. W.: **1973**, *Astrophysical quantities*, 3rd edition, The Athone Press, University of London, United Kingdom.

Annuaire de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides: **2018**, *Éphémérides astronomiques pour 2019*, Masson, Paris.

Auer, L. H. & Standish, E. M.: **May 2000**, *Astronomical refraction: Computational method for all zenith angles*, The Astrophysical Journal, **119**, 2472-2474.

Bauer, G. N.: **2010**, *Plane and Spherical Trigonometry (Classic Reprint Series)*, Forgotten Books.

Casey, J.: **2010**, *A Treatise on Spherical Trigonometry, and Its Application to Geodesy and Astronomy, with Numerous Examples*, General Books.

Danjon, A.: **1959**, *Astronomie Générale*, 2ème édition, J. & R. Sennac, Paris.

Goldstein, H., Poole, C. P. & Safko, J. L.: **2001**, *Classical Mechanics*, 3rd edition, Addison Wesley.

Le grand Atlas Universalis de l'Astronomie, **1986**, Sous la direction de J. Audouze et G. Israël, 2ème édition, Encyclopaedia Universalis, Paris.

Nitschelm, C.: **hiver 1991-1992** (dernière mise à jour **octobre 2020**), *Mécanique céleste: Équations du mouvement*, http://www.astrosurf.com/nitschelm/Mecanique.pdf

Nitschelm, C.: **april de 2008** (última actualización **octubre de 2020**), *Mecánica celeste: Ecuaciones del movimiento*, http://www.astrosurf.com/nitschelm/Mecanica.pdf

Papelier, G.: **1947**, *Éléments de trigonométrie sphérique*, Librairie Vuibert, Paris.

Pérez, J.-P.: **1995**, *Mécanique, points matériels, solides, fluides*, 4ème édition, Masson, Paris, Milan, Barcelone.

Rösch, J.: **1969**, *Astronomie fondamentale*, Les cours de Sorbonne, 2ème édition, Centre de documentation universitaire, Paris.

6. Índice de los capítulos