Mecánica celeste: Ecuaciones del movimiento

Christian Nitschelm

Octubre de 2020

1. Introducción

Supongamos (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un triedro orto-normado directo elegido de tal manera que al instante t, el plano (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) es el plano instantáneo del movimiento, que contiene el radio vector y el vector velocidad.

Supongamos A un punto material de masa m en movimiento alrededor del punto fijo O y experimentando una aceleración central $\vec{\gamma}$. El radio vector del movimiento está dado por la ecuación (1), $\vec{n}$ siendo el vector unitario radial y $\vec{\tau}$ el vector unitario directamente normal en el plano instantáneo del movimiento (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

$$\overrightarrow{OA} = r\vec{n} \tag{1}$$

La velocidad del punto A al instante t será entonces dada por la ecuación (2), θ siendo el ángulo (O, $\vec{i}$, $\vec{n}$), ángulo medido dentro de plano (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d(r\vec{n})}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{n} + r\frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{n} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\tau} \tag{2}$$

Según la ley de la gravitación universal, la fuerza $\vec{F}$ es central y colineal a la aceleración $\vec{\gamma}$, el factor de proporcionalidad siendo la masa del cuerpo A. La masa del cuerpo O está anotada M, mientras tanto G designa la constante de la gravitación universal.

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{n} \tag{3}$$

Podemos calcular el momento cinético, o momento angular, del sistema con respecto a un eje instantáneo pasando por el punto O y ortogonal tanto al radio vector como al vector velocidad.

$$\vec{L}_{A/O} = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{V} = \vec{r} \wedge m\vec{V} \tag{4}$$

El cálculo de la diferencial del momento cinético con respecto al tiempo permite observar su evolución temporal.

$$\frac{d\vec{L}_{A/O}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{V} + \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{V} \wedge m\vec{V} + \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{r} \wedge \vec{\gamma} = \vec{0} \tag{5}$$

El momento cinético es constante y queda siempre colineal al vector $\vec{k}$.

$$\vec{L}_{A/O} = mrV\vec{n} \wedge \vec{\tau} = L_{A/O}\vec{k} \tag{6}$$

El radio vector $\vec{r}$ y la velocidad $\vec{V}$, quedando en permanencia ortogonales al momento cinético, están siempre contenidos en el plano fijo (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). La trayectoria de A queda así constantemente incluida en este plano.

Debemos anotar aquí que la marcación (A, $\vec{n}$, $\vec{\tau}$, $\vec{k}$) forma un triedro orto-normado directo en movimiento en el plano (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) y que las diferenciales de ambos vectores unitarios en movimiento están dadas por:

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{\tau} \tag{7-a}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{n} \tag{7-b}$$

2. Constante de las áreas

Podemos calcular el valor de la aceleración por diferenciación de la velocidad, sin olvidar que esta aceleración es radial.

$$\vec{\gamma} = \gamma\vec{n} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \Big(\frac{d^2r}{dt^2} - r\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2\Big)\vec{n} + \Big(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\Big)\vec{\tau} \tag{8}$$

La componente de la aceleración sobre el vector directamente normal es así siempre nula, lo que permite escribir las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2 = \gamma \tag{9-a}$$

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \tag{9-b}$$

Podemos escribir la ecuación (9-b) según la manera siguiente:

$$\frac{2(\frac{dr}{dt})}{r} + \frac{(\frac{d^2\theta}{dt^2})}{(\frac{d\theta}{dt})} = 0 \tag{10}$$

Esta ecuación es integrable con respecto al tiempo. Podemos obtener, anotando por comodidad $\ln(C)$ la constante de integración:

$$2\ln(r) + \ln\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big) = \ln(C) \tag{11-a}$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C \tag{11-b}$$

Con un paso al exponencial, podemos encontrar la ley de las áreas descubierta por Kepler, C siendo llamada constante de las áreas. La segunda ley de Kepler dice en efecto que el área barrido por el radio vector es proporcional al tiempo, puesto que:

$$dS = \frac{1}{2}r\,r d\theta = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}dt$$

Y, entonces:

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \Delta t = \frac{1}{2} C \Delta t \tag{12}$$

Podemos entonces deducir dos valores de la componente radial de la aceleración, por utilización de las ecuaciones (3), (9-a) y (12):

$$\gamma = \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \tag{13}$$

Lo que permite finalmente escribir la ecuación (14):

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{GM}{r^2} - \frac{C^2}{r^3} = 0 \tag{14}$$

3. Ecuaciones del movimiento

3.1. Radio vector

Es posible integrar la ecuación (14) anotando que:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\Big(\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\Big)\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\Big(\frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\Big)\frac{C}{r^2} = \Big[-\frac{2}{r^3}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 r}{d\theta^2}\Big]\frac{C^2}{r^2} \tag{15}$$

La ecuación (14) se escribe entonces de la manera siguiente:

$$-\frac{2C^2}{r^5}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + \frac{C^2}{r^4}\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \frac{GM}{r^2} - \frac{C^2}{r^3} = 0 \tag{16}$$

Planteamos $u = \frac{1}{r}$, lo que significa $r = \frac{1}{u}$. Por diferenciaciones sucesivas, podemos obtener:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} \tag{17-a}$$

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{2}{u^3}\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2 u}{d\theta^2} \tag{17-b}$$

Lo que, por la ecuación (16), da la forma siguiente:

$$C^2 u\Big[-2u^4\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2\frac{1}{u^4} + u^3\Big(\frac{2}{u^3}\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2 u}{d\theta^2}\Big) + \frac{GM}{C^2}u - u^2\Big] = 0 \tag{18}$$

Por simplificación, la ecuación (18) se reduce finalmente a:

$$C^2 u^2\Big(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u - \frac{GM}{C^2}\Big) = 0 \tag{19}$$

Las soluciones son entonces de dos tipos diferentes: $u = 0$, el objeto A siendo al infinito, o planteando que la constante de integración toma el valor $\frac{GM}{C^2}e$, e siendo llamada la excentricidad.

$$u = \frac{GM}{C^2}(1 + e\cos(\theta - \theta_0)) \tag{20}$$

El radio vector tiene entonces por ecuación, planteando $p = \frac{C^2}{GM}$, p siendo llamado el parámetro de la cónica y $\nu = \theta - \theta_0$, ν siendo llamada la anomalía verdadera.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \tag{21}$$

Encontramos aquí la ecuación de una cónica de excentricidad e, un círculo si $e = 0$, un elipse si $0 < e < 1$, una parábola si $e = 1$ o una hipérbola si $e > 1$, e siendo siempre positivo o nulo. En el caso de una excentricidad inferior a uno, encontramos la primera ley de Kepler.

3.2. Velocidad

Miramos ahora si es posible obtener una ecuación correcta por la velocidad. Anotamos al principio que:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \tag{22}$$

La ecuación (2) daba el vector velocidad. Su normalización da entonces:

$$V = \Big[\Big(\frac{dr}{dt}\Big)^2 + r^2\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} = \Big[\Big(\frac{dr}{dt}\Big)^2 + \frac{C^2}{r^2}\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{23}$$

Sin embargo, podemos anotar que es posible establecer que:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{e}{p}\sin\nu\frac{d\nu}{dt} = -\frac{eC}{pr^2}\sin\nu \tag{24-a}$$

Lo que da la diferencial de la norma del radio vector con respecto al tiempo:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{eC}{p}\sin\nu \tag{24-b}$$

De un otro punto de vista, tenemos igualmente la relación:

$$r\frac{d\nu}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r} = \frac{C}{p}(1 + e\cos\nu) \tag{24-c}$$

Por sustitución, conseguimos finalmente el valor de V:

$$V = \Big[\frac{e^2C^2}{p^2}\sin^2\nu + \frac{C^2}{p^2}(1 + \cos\nu)^2\Big]^{\frac{1}{2}} = \frac{C}{p}\sqrt{1 + 2e\cos\nu + e^2} \tag{25}$$

3.3. Conservación de la energía

La ecuación (21) puede también ser determinada por utilización de la ley de conservación de la energía. En efecto, según esta ley, podemos escribir que la suma de las energías cinetica y potencial tiene conservación con respecto al tiempo:

$$E_c + E_p = Constante \qquad (26-a)$$

Esta conservación de la energía se escribe, planteando que $F = |\vec{F}| = \frac{GmM}{r^2}$:

$$\frac{1}{2}mV^2 + \int F dr = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GmM}{r} = Constante \qquad (26-b)$$

Por utilización de las ecuaciones (23) y (11-b), sabemos ya que:

$$V^2 = \Big[\Big(\frac{dr}{dt}\Big)^2 + r^2\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2\Big] = \Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2\Big[\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + r^2\Big] = \frac{C^2}{r^4}\Big[\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + r^2\Big] \qquad (27)$$

Sustituyendo el valor de V^2 en la ecuación (26-b), obtenemos:

$$\frac{1}{r^4}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2GM}{rC^2} - \frac{h}{C^2} = 0 \qquad (28)$$

Hemos planteado más arriba que la relación de la constante de las ecuaciones (26-a) y (26-b) dividida por la masa m del cuerpo A es igual a h. Planteamos también que:

$$u = \frac{1}{r} - \frac{GM}{C^2} \qquad (29-a)$$

Por diferenciación, comprobamos igualmente que:

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \qquad (29-b)$$

Por desarrollo del cuadrado de u y por sustitución, la ecuación (28) se vuelve:

$$\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2 + u^2 = \frac{G^2M^2}{C^4} + \frac{h}{C^2} = q^2 \qquad (30)$$

El parámetro q^2 debe ser positivo o nulo en todos los casos para que la ecuación (30) tenga un sentido. Por separación e integración, obtenemos sucesivamente:

$$\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2 = q^2 - u^2 \qquad (31-a)$$

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{q^2 - u^2} \qquad (31-b)$$

$$\frac{du}{\sqrt{q^2 - u^2}} = \pm d\theta \qquad (31-c)$$

$$\arccos\frac{u}{q} = \pm(\theta - \theta_0) \qquad (31-d)$$

$$u = q\cos(\theta - \theta_0) \qquad (31-e)$$

De vuelta al radio vector y a los parámetros iniciales, conseguimos finalmente:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{rC^2}\Big(1 + \sqrt{1 + \frac{C^2 h}{G^2 M^2}} \cos(\theta - \theta_0)\Big) \tag{32}$$

El parámetro q^2 siendo positivo, podemos plantear que $1 + \frac{C^2 h}{G^2 M^2} = e^2$, que $\frac{C^2}{GM} = p$ y que $\theta - \theta_0 = \nu$, e, p y ν teniendo el mismo significado que antes. Podemos entonces encontrar de nuevo la ecuación de una cónica y así la primera ley de Kepler.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \tag{33}$$

3.4. Caso del movimiento elíptico

La ecuación anterior (33) nos da, al periastro y al apoastro:

$$\begin{cases} r_p = \frac{p}{1+e} \\ r_a = \frac{p}{1-e} \end{cases}$$

Por construcción geométrica del elipse, sabemos que:

$$r_p + r_a = 2\,a$$

Podemos entonces calcular esta suma:

$$r_p + r_a = p\Big(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\Big) = p\Big(\frac{1-e+1+e}{(1+e)(1-e)}\Big) = \frac{2\,p}{1-e^2} = 2\,a$$

Y podemos deducir de todo eso que:

$$p = a\,(1-e^2) <=> a = \frac{p}{1-e^2}$$

En el caso de un movimiento elíptico, la excentricidad es inferior a uno. El semieje mayor del elipse está entonces dado por $a = \frac{p}{1-e^2}$ y su semieje menor por $b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$. La distancia entre uno de los focos y el centro del elipse se escribe $c = ae$. La ley general del movimiento elíptico se escribe por el radio vector y la velocidad:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\nu} \tag{34 - a}$$

$$V = \frac{C}{a(1-e^2)}\sqrt{1 + 2e\cos\nu + e^2} \tag{34 - b}$$

Al periastro, la anomalía verdadera toma su valor nulo, la distancia al centro del movimiento es mínima y la velocidad es máxima. Al apoastro, la anomalía verdadera tiene por valor ciento ochenta grados, la distancia al centro del movimiento es máxima y la velocidad es mínima.

Periastro	$\nu = 0°$	$r_p = a(1-e)$	$V_p = \frac{C}{a(1-e)}$
Apoastro	$\nu = 180°$	$r_a = a(1+e)$	$V_a = \frac{C}{a(1+e)}$

Podemos fácilmente deducir el valor del cuadrado de la constante de las áreas de lo que precede, especialmente de la definición del parámetro p:

$$C^2 = GMp = GMa(1-e^2) \tag{35}$$

Sin embargo, según la segunda ley de Kepler, el área total del elipse barrido por el radio vector está conocida como siendo:

$$A_{elipse} = \frac{1}{2}CT = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2} \tag{36}$$

Planteamos $n = \frac{2\pi}{T}$. n está designado el movimiento mediano sideral. Podemos inmediatamente deducir un valor del cuadrado de la constante de las áreas que es entonces posible igualar con lo cual dada por la ecuación (35):

$$C^2 = n^2a^4(1-e^2) = \frac{4\pi^2}{T^2}a^4(1-e^2) = GMa(1-e^2) \tag{37}$$

Lo que da por fin las dos relaciones siguientes:

$$n^2a^3 = GM \tag{38 − a}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \tag{38 − b}$$

Podemos inmediatamente reconocer en la ecuación (38-b) la tercera ley de Kepler.

3.5. Ley del movimiento elíptico: ecuación de Kepler

Siempre en el caso del movimiento elíptico, o en el movimiento circular que es un caso peculiar del primero, probamos encontrar la ley del movimiento, lo que significa una relación entre la anomalía verdadera o el radio vector y el tiempo, ya conociendo las relaciones entre el radio vector, la velocidad y la anomalía verdadera.

El círculo principal de un elipse está definido matemáticamente como el círculo de mismo centro que el elipse y de radio igual al semieje mayor. Usando $\odot$ el centro del movimiento, generalmente el Sol, P el cuerpo en movimiento, generalmente un planeta, P_p el periastro y P_a el apoastro, Ξ el centro del elipse y P' el punto del círculo principal que tiene P como proyección sobre el elipse con respecto al eje mayor. Podemos reconocer el radio vector r como siendo $\odot$P, el semieje mayor como siendo ΞP_p y la anomalía verdadera como siendo el ángulo $P_p\odot$P. Podemos introducir la anomalía excéntrica υ como siendo el ángulo $P_p\Xi$P'. Los dos ejes (Ξ, $\vec{i}$), variable x, y (Ξ, $\vec{j}$), variable y, están definidos por el primero sobre el eje ΞP_p y el segundo directamente ortogonal en el plano del movimiento.

En la marcación (Ξ, $\vec{i}$, $\vec{j}$), las coordenadas cartesianas de P son:

$$\begin{cases} x = a\cos\upsilon \\ y = a\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon \end{cases} \tag{39 − a}$$

En la marcación ($\odot$, $\vec{i}$, $\vec{j}$), tendremos así las relaciones siguientes:

$$\begin{cases} r\cos\nu = x - ae = a(\cos\upsilon - e) \\ r\sin\nu = y = a\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon \end{cases} \tag{39 − b}$$

Estas relaciones permiten exprimir el radio vector y la anomalía verdadera con respecto a la anomalía excéntrica según el sistema siguiente de ecuaciones:

$$\begin{cases} r = a(1 - e\cos\upsilon) \\ \cos\nu = \frac{\cos\upsilon - e}{1 - e\cos\upsilon} \\ \sin\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon}{1-e\cos\upsilon} \end{cases} => \begin{cases} \sin^2\frac{\nu}{2} = \frac{(1+e)(1-\cos\upsilon)}{2(1-e\cos\upsilon)} \\ \cos^2\frac{\nu}{2} = \frac{(1-e)(1+\cos\upsilon)}{2(1-e\cos\upsilon)} \end{cases} \tag{40}$$

Este último sistema de ecuaciones permite encontrar la relación entre la anomalía verdadera y la anomalía excéntrica:

$$tg\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{\upsilon}{2} \tag{41}$$

Anotamos t_0 el instante del paseo al perihelio. Podemos calcular el área barrido al instante t desde el último paseo al perihelio del objeto P. Es igual al área del sector elíptico ΞP_pP menos el área del triangulo $\Xi\odot$P, pero es también igual, según la ley de las áreas, a la mitad del producto de la constante de las áreas por el tiempo necesario por el cuerpo para ir desde P_p hasta P:

$$S_{barrido} = \frac{b}{a}\pi a^2\frac{\upsilon}{2\pi} - \frac{1}{2}aeb\sin\upsilon = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}(\upsilon - e\sin\upsilon) = \frac{1}{2}C(t-t_0) \tag{42}$$

Por utilización de las ecuaciones (36) y (42), obtenemos finalmente:

$$\frac{S_{barrido}}{A_{elipse}} = \frac{\frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}(\upsilon - e\sin\upsilon)}{\pi a^2\sqrt{1-e^2}} = \frac{\frac{1}{2}C(t-t_0)}{\frac{1}{2}CT} \tag{43}$$

Podemos deducir inmediatamente la ecuación siguiente, llamada ecuación de Kepler:

$$\upsilon - e\sin\upsilon = \frac{2\pi}{T}(t-t_0) = n(t-t_0) = M \tag{44}$$

La cantidad M está llamada la anomalía mediana. Es igual, como podemos verlo arriba, al producto del movimiento mediano por el tiempo que necesita el cuerpo P para ir desde el periastro hasta su posición al instante t. En un cierto instante, necesitamos entonces resolver la ecuación de Kepler por aproximación, conociendo la anomalía mediana, lo que da la anomalía excéntrica. Después, gracias a las ecuaciones (40) y (41), podemos deducir la anomalía verdadera y el radio vector...

3.6. Movimiento aparente del Sol

El movimiento de la Tierra alrededor del Sol y el movimiento aparente del Sol pueden estudiarse indiferentemente. Vamos a estudiar ahora el movimiento aparente del Sol alrededor de un observador geocéntrico. La duración de revolución es de 365.242199 días, lo que da un movimiento mediano de 0.9856473 grados por día. El semieje mayor de la órbita terrestre es igual a 149.5979 millones de kilómetros. Lo planteamos igual a una unidad astronómica. La excentricidad de la órbita terrestre tiene como valor 0.01673 (órbita débilmente elíptica).

Podemos calcular la longitud eclíptica geocéntrica y la ascensión recta del Sol, anotando que la diferencia entre la longitud eclíptica geocéntrica del Sol y la longitud eclíptica heliocéntrica de la Tierra es igual a 180° y el valor débil de la excentricidad. Por utilización del sistema de ecuaciones (40), podemos deducir que:

$$\sin(\nu - \upsilon) = \sin\nu\,\cos\upsilon - \cos\nu\,\sin\upsilon \tag{45-a}$$

$$\sin(\nu - \upsilon) = \frac{1}{1 - e\cos\upsilon}\Big(e\sin\upsilon - (1 - \sqrt{1-e^2})\sin\upsilon\,\cos\upsilon\Big) \tag{45-b}$$

La excentricidad siendo débil y el elipse siendo cercano de su círculo principal, es muy realista de quedar solamente los términos de primer orden en e dando el desarrollo limitado de la última función y de escribir:

$$\nu - \upsilon \simeq \sin(\nu - \upsilon) \simeq e\sin\upsilon \tag{45-c}$$

La utilización de la ecuación de Kepler permite entonces escribir al primer orden que:

$$\nu \simeq \upsilon + e\sin\upsilon = (\upsilon - e\sin\upsilon) + 2e\sin\upsilon$$

$$\nu \simeq M + 2e\sin\,M = n(t - t_0) + 2e\sin[n(t - t_0)] \tag{46}$$

El terma $2e\sin\,M$ se llama la ecuación del centro. Podemos definir dentro el plano del eclíptico la dirección del eje mayor de la órbita aparente del Sol por la longitud del perigeo $\omega_\odot$. La longitud del Sol a un instante t está dada por:

$$l_\odot = \omega_\odot + \nu \simeq \omega_\odot + M + 2e\sin\,M = \omega_\odot + n(t - t_0) + 2e\sin[n(t - t_0)] \tag{47}$$

Podemos calcular ahora la ascensión recta del Sol. La latitud eclíptica del Sol siendo nula y la oblicuidad del eclíptico siendo anotada ε, conseguimos (ver el anexo):

$$tg\alpha_\odot = tg\,l_\odot\,\cos\varepsilon \tag{48-a}$$

Por un desarrollo limitado adecuado, podemos entonces deducir:

$$\alpha_\odot \simeq l_\odot - tg^2\frac{\varepsilon}{2}\sin 2l_\odot \simeq \omega_\odot + M + 2e\sin\,M - tg^2\frac{\varepsilon}{2}\sin[2(\omega_\odot + M)] \tag{48-b}$$

Finalmente, obtenemos un valor aproximado por la ascensión recta dada con:

$$\alpha_\odot \simeq \omega_\odot + n(t - t_0) + 2e\sin[n(t - t_0)] - tg^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\Big[2\Big(\omega_\odot + n(t - t_0)\Big)\Big] \tag{48-c}$$

El terma donde parece el cuadrado de la tangente de la mitad de la oblicuidad está llamada reducción al ecuador. La suma de la ecuación del centro y de la reducción al ecuador está llamada ecuación del tiempo. Se escribe de la manera siguiente:

$$E_{tiempo} = 2e\sin[n(t - t_0)] - tg^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\Big[2\Big(\omega_\odot + n(t - t_0)\Big)\Big] \tag{49}$$

El ángulo horario de un astro a un instante t en un cierto lugar está definido como siendo la diferencia entre el tiempo sideral local y la ascensión recta del astro. En el último caso, podemos escribir la ecuación siguiente:

$$H_\odot = TS_{local} - \alpha_\odot = TS_{local} - \omega_\odot - n(t - t_0) - E_{tiempo} \tag{50}$$

Por un otro lado, el tiempo sideral local puede escribirse de la manera siguiente, anotando $TS_{Greenwich}[0^h TU]$ el tiempo sideral de Greenwich a cero hora Tiempo Universal, k_{ratio}, la relación entre el tiempo sideral y el tiempo medio, de valor 1.0027379, con $TU = t + Constante$, y λ, la longitud terrestre del lugar de observación contada positivamente, en horas, hacia el Oeste:

$$TS_{local} = TS_{Greenwich}[0^h TU] + k_{ratio} TU - \lambda = TS_0 + k_{ratio} t \tag{51}$$

Eso permite escribir la relación siguiente:

$$H_\odot = TS_0 - (\omega_\odot - nt_0) + (k_{ratio} - n)t - E_{tiempo} \tag{52}$$

La cantidad $H_m = H_\odot + E_{tiempo}$ se llama el tiempo solar medio. Anotando que $k_{ratio} = 1 + n = 1 + 0.0027379$, con un movimiento mediano exprimido como k_{ratio} en ciclos por día, y eligiendo como origen temporal un cierto mediodía mediano, conseguimos sencillamente $H_m = t$. Al momento cuando $H_m = 0$, tendremos $H_\odot = -E_{tiempo}$. El tiempo solar medio adelanta o retrasa entonces sobre el tiempo solar verdadero. La diferencia entre el tiempo sideral y el tiempo solar medio es la ascensión recta, proporcional al tiempo absoluto t, de un móvil ficticio llamado Sol medio.

$$TS_{local} - H_m = \alpha_m = (\omega_\odot - nt_0) + nt \tag{53}$$

4. Anexo

Damos aquí los cambios de coordenadas entre las coordenadas horizontales y las coordenadas horarias, y entre las coordenadas ecuatoriales y las coordenadas eclípticas. Longitud y latitud del lugar están anotadas λ y φ, mientras tanto la oblicuidad del eclíptico está llamada ε. Anotamos también a el acimut, z el ángulo cenital, α la ascensión recta, δ la declinación, H el ángulo horario, l la longitud eclíptica y b la latitud eclíptica. Tenemos entonces las relaciones siguientes:

Conversión de las coordenadas horizontales hacia las coordenadas horarias:

$$\begin{cases} \sin\delta = \sin\varphi\cos z - \cos\varphi\sin z\cos a \\ \cos\delta\sin H = \sin z\sin a \\ \cos\delta\cos H = \cos\varphi\cos z + \sin\varphi\sin z\cos a \end{cases} \tag{54-a}$$

Conversión de las coordenadas horarias hacia las coordenadas horizontales:

$$\begin{cases} \cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H \\ \sin z\sin a = \cos\delta\sin H \\ \sin z\cos a = -\cos\varphi\sin\delta + \sin\varphi\cos\delta\cos H \end{cases} \tag{54-b}$$

Conversión de las coordenadas ecuatoriales hacia las coordenadas eclípticas:

$$\begin{cases} \sin\,b = \cos\,\varepsilon\,\sin\,\delta - \sin\,\varepsilon\,\cos\,\delta\,\sin\,\alpha \\ \cos\,b\,\cos\,l = \cos\,\delta\,\cos\,\alpha \\ \cos\,b\,\sin\,l = \sin\,\varepsilon\,\sin\,\delta + \cos\,\varepsilon\,\cos\,\delta\,\sin\,\alpha \end{cases} \qquad (54-c)$$

Conversión de las coordenadas eclípticas hacia las coordenadas ecuatoriales:

$$\begin{cases} \sin\,\delta = \cos\,\varepsilon\,\sin\,b + \sin\,\varepsilon\,\cos\,b\,\sin\,l \\ \cos\,\delta\,\cos\,\alpha = \cos\,b\,\cos\,l \\ \cos\,\delta\,\sin\,\alpha = -\sin\,\varepsilon\,\sin\,b + \cos\,\varepsilon\,\cos\,b\,\sin\,l \end{cases} \qquad (54-d)$$

5. Bibliografía

Acker, A.: **1979**, *Initiation à l'astronomie*, 2ème édition, Masson, Paris.

Allen, C. W.: **1973**, *Astrophysical quantities*, 3rd edition, The Athone Press, University of London, United Kingdom.

Annuaire de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides: **2018**, *Éphémérides astronomiques pour 2019*, Masson, Paris.

Danjon, A.: **1959**, *Astronomie Générale*, 2ème édition, J. & R. Sennac, Paris.

Le grand Atlas Universalis de l'Astronomie, **1986**, Sous la direction de J. Audouze et G. Israël, 2ème édition, Encyclopaedia Universalis, Paris.

Nitschelm, C.: **hiver 1991-1992** (dernière mise à jour **octobre 2020**), *Mécanique céleste: Équations du mouvement*, http://www.astrosurf.com/nitschelm/Mecanique.pdf

Papelier, G.: **1947**, *Éléments de trigonométrie sphérique*, Librairie Vuibert, Paris.

Rösch, J.: **1969**, *Astronomie fondamentale*, Les cours de Sorbonne, 2ème édition, Centre de documentation universitaire, Paris.