Mécanique céleste: Équations du mouvement

Christian Nitschelm

Octobre 2020

1. Introduction

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un trièdre orthonormé direct choisi de telle manière qu'à l'instant t, le plan (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) soit le plan instantané du mouvement, plan contenant le rayon vecteur et le vecteur vitesse.

Soit A un point matériel de masse m en mouvement autour du point fixe O et subissant une accélération centrale $\vec{\gamma}$. Le rayon vecteur du mouvement est donné par l'équation (1), $\vec{n}$ étant le vecteur unitaire radial et $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire directement normal dans le plan instantané du mouvement (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

$$\overrightarrow{OA} = r\vec{n} \tag{1}$$

La vitesse du point A à l'instant t sera alors donnée par l'équation (2), θ étant l'angle (O, $\vec{i}$, $\vec{n}$), angle mesuré dans le plan (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d(r\vec{n})}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{n} + r\frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{n} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\tau} \tag{2}$$

D'après la loi de la gravitation universelle, la force $\vec{F}$ est centrale et colinéaire à l'accélération $\vec{\gamma}$, le facteur de proportionnalité étant la masse du corps A. La masse du corps O est notée M, alors que G représente la constante de la gravitation universelle.

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{n} \tag{3}$$

Calculons le moment cinétique, ou moment angulaire, du système par rapport à un axe instantané passant par le point O et orthogonal aussi bien au rayon vecteur qu'au vecteur vitesse.

$$\vec{L}_{A/O} = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{V} = \vec{r} \wedge m\vec{V} \tag{4}$$

Le calcul de la dérivée du moment cinétique par rapport au temps permet d'observer son évolution temporelle.

$$\frac{d\vec{L}_{A/O}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{V} + \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{V} \wedge m\vec{V} + \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{r} \wedge \vec{\gamma} = \vec{0} \tag{5}$$

Le moment cinétique est constant et reste continuellement colinéaire au vecteur $\vec{k}$.

$$\vec{L}_{A/O} = mr^2\frac{d\theta}{dt}\vec{n} \wedge \vec{\tau} = mr^2\frac{d\theta}{dt}\vec{k} = L_{A/O}\vec{k} \tag{6}$$

Le rayon vecteur $\vec{r}$ et la vitesse $\vec{V}$, restant en permanence orthogonaux au moment cinétique, sont constamment contenus dans le plan fixe (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). La trajectoire de A reste donc perpétuellement incluse dans ce plan.

Remarquons ici que (A, $\vec{n}$, $\vec{\tau}$, $\vec{k}$) forme un trièdre orthonormé direct en mouvement dans le plan (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) et que les dérivées des deux vecteurs en mouvement sont donnée par:

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{\tau} \qquad (7-a)$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{n} \qquad (7-b)$$

2. Constante des aires

Calculons la valeur de l'accélération par dérivation de la vitesse, en se souvenant que cette accélération est radiale.

$$\vec{\gamma} = \gamma\vec{n} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \Big(\frac{d^2r}{dt^2} - r\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2\Big)\vec{n} + \Big(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\Big)\vec{\tau} \qquad (8)$$

La composante de l'accélération sur le vecteur directement normal est ainsi forcément nulle, ce qui permet d'écrire les deux équations suivantes:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2 = \gamma \qquad (9-a)$$

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \qquad (9-b)$$

L'équation (9-b) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{2(\frac{dr}{dt})}{r} + \frac{(\frac{d^2\theta}{dt^2})}{(\frac{d\theta}{dt})} = 0 \qquad (10)$$

Cette équation est intégrable par rapport au temps. On obtient, en notant par commodité $\ln(C)$ la constante d'intégration:

$$2\ln(r) + \ln\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big) = \ln(C) \qquad (11-a)$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C \qquad (11-b)$$

Par passage à l'exponentielle, on retrouve la loi des aires énoncée par Kepler, C étant appelée constante des aires. La deuxième loi de Kepler énonce en effet que l'aire balayée par le rayon vecteur est proportionnelle au temps, puisque $dS = \frac{1}{2}r\, rd\theta = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}dt$:

$$\Delta S = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\Delta t = \frac{1}{2}C\Delta t \qquad (12)$$

On peut alors en déduire deux valeurs pour la composante radiale de l'accélération, par utilisation des équations (3), (9-a) et (12):

$$\gamma = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \tag{13}$$

Ce qui permet finalement d'écrire l'équation (14):

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{GM}{r^2} - \frac{C^2}{r^3} = 0 \tag{14}$$

3. Équations du mouvement

3.1. Rayon vecteur

Il est possible d'intégrer l'équation (14) en remarquant que:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\Big(\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\Big)\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\Big(\frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\Big)\frac{C}{r^2} = \Big[-\frac{2}{r^3}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\Big]\frac{C^2}{r^2} \tag{15}$$

L'équation (14) s'écrit alors sous la forme suivante:

$$-\frac{2C^2}{r^5}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + \frac{C^2}{r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{GM}{r^2} - \frac{C^2}{r^3} = 0 \tag{16}$$

Posons $u = \frac{1}{r}$, c'est-à-dire $r = \frac{1}{u}$. Par dérivations successives, on obtient:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} \tag{17 - a}$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{2}{u^3}\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{17 - b}$$

Ce qui donne pour l'équation (16) la forme suivante:

$$C^2u\Big[-2u^4\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2\frac{1}{u^4} + u^3\Big(\frac{2}{u^3}\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}\Big) + \frac{GM}{C^2}u - u^2\Big] = 0 \tag{18}$$

Par simplification, l'équation (18) se réduit finalement en:

$$C^2u^2\Big(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{GM}{C^2}\Big) = 0 \tag{19}$$

Les solutions sont alors de deux types différents: soit $u = 0$, l'objet A étant à l'infini; soit, en posant que la constante d'intégration prend la valeur $\frac{GM}{C^2}e$, e étant nommée l'excentricité.

$$u = \frac{GM}{C^2}(1 + e\cos(\theta - \theta_0)) \tag{20}$$

Le rayon vecteur a donc pour équation, en posant $p = \frac{C^2}{GM}$, p étant nommé le paramètre de la conique et $\nu = \theta - \theta_0$, ν étant nommée l'anomalie vraie.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \tag{21}$$

On retrouve ici l'équation d'une conique d'excentricité e, un cercle si $e = 0$, une ellipse si $0 < e < 1$, une parabole si $e = 1$ ou une hyperbole si $e > 1$, e étant toujours positif ou nul. Dans le cas d'une excentricité inférieure à un, on retrouve la première loi de Kepler.

3.2. Vitesse

Regardons maintenant s'il est possible d'obtenir une équation correcte pour la vitesse. Remarquons tout d'abord que:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \tag{22}$$

L'équation (2) donnait le vecteur vitesse. Sa normalisation donne alors:

$$V = \Big[\Big(\frac{dr}{dt}\Big)^2 + r^2\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} = \Big[\Big(\frac{dr}{dt}\Big)^2 + \frac{C^2}{r^2}\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{23}$$

Cependant, remarquons qu'il est possible d'établir que:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{e}{p}\sin\nu\frac{d\nu}{dt} = -\frac{eC}{pr^2}\sin\nu \tag{24-a}$$

Ce qui donne la dérivée de la norme du rayon vecteur en fonction du temps:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{eC}{p}\sin\nu \tag{24-b}$$

D'un autre point de vue, nous avons également la relation:

$$r\frac{d\nu}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r} = \frac{C}{p}(1 + e\cos\nu) \tag{24-c}$$

Par substitution, on obtient finalement la valeur de V:

$$V = \Big[\frac{e^2C^2}{p^2}\sin^2\nu + \frac{C^2}{p^2}(1 + \cos\nu)^2\Big]^{\frac{1}{2}} = \frac{C}{p}\sqrt{1 + 2e\cos\nu + e^2} \tag{25}$$

3.3. Conservation de l'énergie

L'équation (21) peut également être déterminée par utilisation de la loi de conservation de l'énergie. En effet, selon cette loi, on peut écrire que la somme des énergies cinétique et potentielle se conserve au cours du temps:

$$E_c + E_p = Constante \tag{26-a}$$

Cette conservation de l'énergie s'écrit, en posant que $F = |\vec{F}| = \frac{GmM}{r^2}$:

$$\frac{1}{2}mV^2 + \int F dr = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GmM}{r} = Constante \tag{26-b}$$

Par utilisation des équations (23) et (11-b), nous savons déjà que:

$$V^2 = \Big[\Big(\frac{dr}{dt}\Big)^2 + r^2\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2\Big] = \Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2\Big[\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + r^2\Big] = \frac{C^2}{r^4}\Big[\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + r^2\Big] \tag{27}$$

En substituant la valeur de V^2 dans l'équation (26-b), on obtient:

$$\frac{1}{r^4}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2GM}{rC^2} - \frac{h}{C^2} = 0 \tag{28}$$

Nous avons posé ci-dessus que le rapport de la constante des équations (26-a) et (26-b) sur la masse m du corps A est égal à h. Posons également que:

$$u = \frac{1}{r} - \frac{GM}{C^2} \tag{29 - a}$$

Par dérivation, on constate également que:

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \tag{29 - b}$$

Par développement du carré de u et par substitution, l'équation (28) devient:

$$\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2 + u^2 = \frac{G^2M^2}{C^4} + \frac{h}{C^2} = q^2 \tag{30}$$

Le paramètre q^2 doit être positif ou nul dans tous les cas pour que l'équation (30) ait un sens. Par séparation et intégration, on obtient successivement:

$$\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2 = q^2 - u^2 \tag{31 - a}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{q^2 - u^2} \tag{31 - b}$$

$$\frac{du}{\sqrt{q^2 - u^2}} = \pm d\theta \tag{31 - c}$$

$$\arccos\frac{u}{q} = \pm(\theta - \theta_0) \tag{31 - d}$$

$$u = q\cos(\theta - \theta_0) \tag{31 - e}$$

Par retour au rayon vecteur et aux paramètres initiaux, on obtient finalement:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{rC^2}\Big(1 + \sqrt{1 + \frac{C^2h}{G^2M^2}}\cos(\theta - \theta_0)\Big) \tag{32}$$

Le paramètre q^2 étant positif, on peut poser que $1 + \frac{C^2h}{G^2M^2} = e^2$, que $\frac{C^2}{GM} = p$ et que $\theta - \theta_0 = \nu$, e, p et ν ayant la même signification que précédemment. On retrouve alors l'équation d'une conique et donc la première loi de Kepler.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \tag{33}$$

3.4. Cas du mouvement elliptique

L'équation précédente (33) nous donne, au périastre et à l'apoastre:

$$\begin{cases} r_p = \frac{p}{1+e} \\ r_a = \frac{p}{1-e} \end{cases}$$

Par construction géométrique de l'ellipse, nous savons que:

$$r_p + r_a = 2\,a$$

Nous pouvons donc calculer cette somme:

$$r_p + r_a = p\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right) = p\left(\frac{1-e+1+e}{(1+e)(1-e)}\right) = \frac{2\,p}{1-e^2} = 2\,a$$

Et nous pouvons finalement déduire de tout cela que:

$$p = a\,(1-e^2) <=> a = \frac{p}{1-e^2}$$

Dans le cas d'un mouvement elliptique, l'excentricité est inférieure à un. Le demi-grand axe de l'ellipse est donc donné par $a = \frac{p}{1-e^2}$ et son demi-petit axe par $b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$. La distance entre l'un des foyers et le centre de l'ellipse s'écrit $c = ae$. La loi générale du mouvement elliptique s'écrit pour le rayon vecteur et la vitesse:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\nu} \tag{34 - a}$$

$$V = \frac{C}{a(1-e^2)}\sqrt{1 + 2e\cos\nu + e^2} \tag{34 - b}$$

Au périastre, l'anomalie vraie prend sa valeur nulle, la distance au centre du mouvement est minimale et la vitesse est maximale. À l'apoastre, l'anomalie vraie a pour valeur cent quatre-vingt degrés, la distance au centre du mouvement est maximale et la vitesse est minimale.

Périastre	$\nu = 0°$	$r_p = a(1-e)$	$V_p = \frac{C}{a(1-e)}$
Apoastre	$\nu = 180°$	$r_a = a(1+e)$	$V_a = \frac{C}{a(1+e)}$

On peut aisément déduire la valeur du carré de la constante des aires de ce qui précède, en particulier de la définition du paramètre p:

$$C^2 = GMp = GMa(1-e^2) \tag{35}$$

Cependant, d'après la deuxième loi de Kepler, l'aire totale de l'ellipse balayée par le rayon vecteur est connue comme étant:

$$A_{ellipse} = \frac{1}{2}CT = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2} \quad (36)$$

Posons $n = \frac{2\pi}{T}$. n est nommé le moyen mouvement sidéral. On peut immédiatement en déduit une valeur du carré de la constante des aires qu'il est alors possible d'égaliser à celle donnée par l'équation (35):

$$C^2 = n^2a^4(1-e^2) = \frac{4\pi^2}{T^2}a^4(1-e^2) = GMa(1-e^2) \quad (37)$$

Ce qui donne pour finir les deux relations suivantes:

$$n^2a^3 = GM \quad (38-a)$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (38-b)$$

On reconnaît immédiatement dans l'équation (38-b) la troisième loi de Kepler.

3.5. Loi du mouvement elliptique: équation de Kepler

Toujours dans le cas du mouvement elliptique, ou dans celui du mouvement circulaire qui n'est qu'un cas particulier du premier, essayons de trouver la loi du mouvement, c'est-à-dire une relation entre d'une part l'anomalie vraie ou le rayon vecteur et d'autre part le temps, connaissant déjà les relations entre le rayon vecteur, la vitesse et l'anomalie vraie.

Le cercle principal d'une ellipse est défini mathématiquement comme étant le cercle de même centre que l'ellipse et de rayon égal au demi-grand axe. Soient $\odot$ le centre du mouvement, généralement le Soleil, P le corps en mouvement, généralement une planète, P_p le périastre et P_a l'apoastre, Ξ le centre de l'ellipse et P' le point du cercle principal dont la projection sur l'ellipse par rapport au grand axe est P. On reconnaît le rayon vecteur r comme étant $\odot$P, le demi-grand axe comme étant ΞP_p et l'anomalie vraie comme étant l'angle $P_p\odot$P. On définie l'anomalie excentrique υ comme étant l'angle $P_p\Xi$P'. Les deux axes $(\Xi, \vec{i})$, variable x, et $(\Xi, \vec{j})$, variable y, sont définis comme étant pour le premier sur l'axe ΞP_p et le second directement orthogonal dans le plan du mouvement.

Dans le repère $(\Xi, \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées cartésiennes de P sont:

$$\begin{cases} x = a\cos\upsilon \\ y = a\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon \end{cases} \quad (39-a)$$

Dans le repère $(\odot, \vec{i}, \vec{j})$, on aura ainsi les relations suivantes:

$$\begin{cases} r\cos\nu = x - ae = a(cos\upsilon - e) \\ r\sin\nu = y = a\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon \end{cases} \quad (39-b)$$

Ces relations permettent d'exprimer le rayon vecteur et l'anomalie vraie en fonction de l'anomalie excentrique selon le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} r = a(1-e\cos\upsilon) \\ \cos\nu = \frac{\cos\upsilon - e}{1-e\cos\upsilon} \\ \sin\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon}{1-e\cos\upsilon} \end{cases} => \begin{cases} \sin^2\frac{\nu}{2} = \frac{(1+e)(1-\cos\upsilon)}{2(1-e\cos\upsilon)} \\ \cos^2\frac{\nu}{2} = \frac{(1-e)(1+\cos\upsilon)}{2(1-e\cos\upsilon)} \end{cases} \quad (40)$$

Le dernier couple de relations permet de trouver la relation reliant l'anomalie vraie à l'anomalie excentrique qui est donnée ci-dessous:

$$tg\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{\upsilon}{2} \tag{41}$$

Notons t_0 l'instant du passage au périhélie. Calculons l'aire balayée à l'instant t depuis le dernier passage au périhélie de l'objet P. Elle est égale à l'aire du secteur elliptique ΞP_pP diminuée de celle du triangle $\Xi\odot$P, mais est aussi égale, d'après la loi des aires, au demi produit de la constante des aires par le temps mis par le corps pour aller de P_p à P:

$$S_{balaye} = \frac{b}{a}\pi a^2 \frac{\upsilon}{2\pi} - \frac{1}{2}aeb\sin\upsilon = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}(\upsilon - e\sin\upsilon) = \frac{1}{2}C(t-t_0) \tag{42}$$

Par utilisation des équations (36) et (42), on obtient finalement:

$$\frac{S_{balaye}}{A_{ellipse}} = \frac{\frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}(\upsilon - e\sin\upsilon)}{\pi a^2\sqrt{1-e^2}} = \frac{\frac{1}{2}C(t-t_0)}{\frac{1}{2}CT} \tag{43}$$

On en déduit immédiatement l'équation suivante, dite équation de Kepler:

$$\upsilon - e\sin\upsilon = \frac{2\pi}{T}(t-t_0) = n(t-t_0) = M \tag{44}$$

La quantité M est nommée l'anomalie moyenne. Elle est égale, comme nous le voyons ci-dessus, au produit du moyen mouvement par le temps mis par le corps P pour aller du périastre à sa position à l'instant t. À un instant donné, il nous faut donc résoudre l'équation de Kepler par approximation, connaissant l'anomalie moyenne, ce qui donne l'anomalie excentrique, puis par les équations (40) et (41), on peut en déduire l'anomalie vraie et le rayon vecteur...

3.6. Mouvement apparent du Soleil

Le mouvement de la Terre autour du Soleil et le mouvement apparent du Soleil peuvent s'étudier indifféremment. Nous allons étudier ici le mouvement apparent du Soleil autour d'un observateur géocentrique. La durée de révolution est de 365.242199 jours, ce qui donne un moyen mouvement de 0.9856473 degrés par jour. Le demi-grand axe de l'orbite terrestre vaut 149.5979 millions de kilomètres. On le pose égal à une unité astronomique. L'excentricité de l'orbite terrestre a pour valeur 0.01673, (orbite faiblement elliptique).

Calculons la longitude écliptique géocentrique et l'ascension droite du Soleil, en notant que la différence entre la longitude écliptique géocentrique du Soleil et la longitude écliptique héliocentrique de la Terre est égale à 180° et en tenant compte de la faible valeur de l'excentricité. Par utilisation du système d'équations (40), on peut déduire que:

$$\sin(\nu-\upsilon) = \sin\nu\,\cos\upsilon - \cos\nu\,\sin\upsilon \tag{45 - a}$$

$$\sin(\nu-\upsilon) = \frac{1}{1-e\cos\upsilon}\Big(e\sin\upsilon - (1-\sqrt{1-e^2})\sin\upsilon\,\cos\upsilon\Big) \tag{45 - b}$$

L'excentricité étant faible et l'ellipse étant proche de son cercle principal, il est parfaitement réaliste de ne garder que les termes du premier ordre en e dans le développement limité de la fonction précédente et d'écrire:

$$\nu - \upsilon \simeq \sin(\nu - \upsilon) \simeq e \sin \upsilon \tag{45 - c}$$

L'utilisation de l'équation de Kepler permet alors d'écrire au premier ordre que:

$$\nu \simeq \upsilon + e \sin \upsilon = (\upsilon - e \sin \upsilon) + 2e \sin \upsilon$$

$$\nu \simeq M + 2e \sin\, M = n(t - t_0) + 2e \sin[n(t - t_0)] \tag{46}$$

Le terme $2e \sin\, M$ s'appelle l'équation du centre. On définit dans le plan de l'écliptique la direction du grand axe de l'orbite apparente du Soleil par la longitude du périgée $\omega_\odot$. La longitude du Soleil à un instant t est donnée par:

$$l_\odot = \omega_\odot + \nu \simeq \omega_\odot + M + 2e \sin\, M = \omega_\odot + n(t - t_0) + 2e \sin[n(t - t_0)] \tag{47}$$

Calculons maintenant l'ascension droite du Soleil. La latitude écliptique du Soleil étant nulle et l'obliquité de l'écliptique étant notée ε, on obtient (voir annexe):

$$tg\alpha_\odot = tg\, l_\odot\, \cos \varepsilon \tag{48 - a}$$

Par un développement limité approprié, on en déduit alors:

$$\alpha_\odot \simeq l_\odot - tg^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2l_\odot \simeq \omega_\odot + M + 2e \sin\, M - tg^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin[2(\omega_\odot + M)] \tag{48 - b}$$

Finalement, on obtient une valeur approchée pour l'ascension droite donnée par:

$$\alpha_\odot \simeq \omega_\odot + n(t - t_0) + 2e \sin[n(t - t_0)] - tg^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin\Big[2\Big(\omega_\odot + n(t - t_0)\Big)\Big] \tag{48 - c}$$

Le terme où apparait le carré de la tangente de la moitié de l'obliquité est appelé réduction à l'équateur. La somme de l'équation du centre et de la réduction à l'équateur est appelée équation du temps. Elle s'écrit de la manière suivante:

$$E_{temps} = 2e \sin[n(t - t_0)] - tg^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin\Big[2\Big(\omega_\odot + n(t - t_0)\Big)\Big] \tag{49}$$

L'angle horaire d'un astre à un instant t en un certain lieu est défini comme étant la différence entre le temps sidéral local et l'ascension droite de l'astre. Dans le cas précédent, on peut écrire l'équation suivante:

$$H_\odot = TS_{local} - \alpha_\odot = TS_{local} - \omega_\odot - n(t - t_0) - E_{temps} \tag{50}$$

Par ailleurs, le temps sidéral local peut s'écrire de la manière suivante, en notant $TS_{Greenwich}[0^h TU]$ le temps sidéral à Greenwich à zéro heure temps universel, $k_{rapport}$, le rapport entre le temps sidéral et le temps moyen, de valeur 1.0027379, avec $TU =$

$t + Constante$, et λ, la longitude terrestre du lieu d'observation comptée positivement, en heures, vers l'ouest:

$$TS_{local} = TS_{Greenwich}[0^h TU] + k_{rapport}TU - \lambda = TS_0 + k_{rapport}t \tag{51}$$

Cette constatation permet d'écrire la relation suivante:

$$H_\odot = TS_0 - (\omega_\odot - nt_0) + (k_{rapport} - n)t - E_{temps} \tag{52}$$

La quantité $H_m = H_\odot + E_{temps}$ s'appelle le temps solaire moyen. En remarquant que $k_{rapport} = 1 + n = 1 + 0.0027379$, avec un moyen mouvement exprimé comme $k_{rapport}$ en tours par jour, et en choisissant comme origine temporelle un certain midi moyen, on obtient simplement $H_m = t$. Au moment oú $H_m = 0$, on aura $H_\odot = -E_{temps}$. Le temps solaire moyen avance ou retarde donc sur le temps solaire vrai. La différence entre le temps sidéral et le temps solaire moyen est l'ascension droite, proportionnelle au temps absolu t, d'un mobile fictif appelé Soleil moyen.

$$TS_{local} - H_m = \alpha_m = (\omega_\odot - nt_0) + nt \tag{53}$$

4. Annexe

Nous donnons ici les changements de coordonnées d'une part entre les coordonnées horizontales et les coordonnées horaires et d'autre part entre les coordonnées équatoriales et les coordonnées écliptiques. Longitude et latitude du lieu sont notées λ et φ alors que l'obliquité de l'écliptique est appelée ε. On note également a l'azimut, z l'angle zénithal, α l'ascension droite, δ la déclinaison, H l'angle horaire, l la longitude écliptique et b la latitude écliptique. On a alors les relations suivantes:

Passage des coordonnées horizontales aux coordonnées horaires:

$$\begin{cases} \sin\,\delta = \sin\,\varphi\,\cos\,z - \cos\,\varphi\,\sin\,z\,\cos\,a \\ \cos\,\delta\,\sin\,H = \sin\,z\,\sin\,a \\ \cos\,\delta\,\cos\,H = \cos\,\varphi\,\cos\,z + \sin\,\varphi\,\sin\,z\,\cos\,a \end{cases} \tag{54-a}$$

Passage des coordonnées horaires aux coordonnées horizontales:

$$\begin{cases} \cos\,z = \sin\,\varphi\,\sin\,\delta + \cos\,\varphi\,\cos\,\delta\,\cos\,H \\ \sin\,z\,\sin\,a = \cos\,\delta\,\sin\,H \\ \sin\,z\,\cos\,a = -\cos\,\varphi\,\sin\,\delta + \sin\,\varphi\,\cos\,\delta\,\cos\,H \end{cases} \tag{54-b}$$

Passage des coordonnées équatoriales aux coordonnées écliptiques:

$$\begin{cases} \sin\,b = \cos\,\varepsilon\,\sin\,\delta - \sin\,\varepsilon\,\cos\,\delta\,\sin\,\alpha \\ \cos\,b\,\cos\,l = \cos\,\delta\,\cos\,\alpha \\ \cos\,b\,\sin\,l = \sin\,\varepsilon\,\sin\,\delta + \cos\,\varepsilon\,\cos\,\delta\,\sin\,\alpha \end{cases} \tag{54-c}$$

Passage des coordonnées écliptiques aux coordonnées équatoriales:

$$\begin{cases} \sin\,\delta = \cos\,\varepsilon\,\sin\,b + \sin\,\varepsilon\,\cos\,b\,\sin\,l \\ \cos\,\delta\,\cos\,\alpha = \cos\,b\,\cos\,l \\ \cos\,\delta\,\sin\,\alpha = -\sin\,\varepsilon\,\sin\,b + \cos\,\varepsilon\,\cos\,b\,\sin\,l \end{cases} \tag{54-d}$$

5. Bibliographie

Acker, A.: **1979**, "Initiation à l'astronomie", 2ème édition, Masson, Paris.

Allen, C. W.: **1973**, "Astrophysical quantities", 3rd edition, The Athone Press, University of London, United Kingdom.

Annuaire de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides: **2018**, "Éphémérides astronomiques pour 2019", Masson, Paris.

Danjon, A.: **1959**, "Astronomie Générale", 2ème édition, J. & R. Sennac, Paris.

"Le grand Atlas Universalis de l'Astronomie", **1986**, Sous la direction de J. Audouze et G. Israël, 2ème édition, Encyclopaedia Universalis, Paris.

Papelier, G.: **1947**, *Éléments de trigonométrie sphérique*, Librairie Vuibert, Paris.

Rösch, J.: **1969**, "Astronomie fondamentale", Les cours de Sorbonne, 2ème édition, Centre de documentation universitaire, Paris.