

Quasar 95

Les Anneaux dans le Système Solaire *Effets de résonances*

Présentation : Octobre 2006

Sommaire

1.	Introduction.....	2
2.	Les anneaux des planètes.....	2
2.1	Le seigneur des anneaux.....	2
2.1.1	Généralités.....	3
2.1.2	Description des anneaux de Saturne.....	3
2.2	L'anneau de Maître Soleil :.....	4
2.3	Les autres systèmes d'anneaux:.....	4
2.3.1	Jupiter.....	4
2.3.2	Neptune.....	5
2.3.3	Uranus:.....	5
3.	Tenter de Comprendre les anneaux planétaires.....	5
3.1	Un peu d'histoire.....	5
3.2	Quelques pistes pour comprendre:.....	6
3.2.1	Les lois élémentaires de la mécanique.....	6
3.2.2	La limite de Roche.....	7
3.2.3	Les phénomènes de résonance.....	8
4.	Annexe : Théorie des résonances en mécanique céleste:.....	10
4.1	Théorie simplifiée d'un résonateur simple:.....	10
4.2	Quelques éléments de mécanique céleste:.....	11
4.2.1	Les équations de Lagrange.....	11
4.2.2	Origine du phénomène de résonance.....	12

1. Introduction

En 1609 Galilée pointe sa lunette vers les deux grosses planètes du système solaire, Jupiter et Saturne. De Jupiter, il parvient à apercevoir les quatre satellites qu'on nomme aujourd'hui « galiléens ». Peu de temps après, au cours de l'été 1610, il pointe aussi sa lunette vers Saturne, mais la piètre qualité optique de son instrument lui révèle une « anomalie » de forme sur la planète mais pas d'anneaux. C'est Huygens qui en 1655 le premier reconnaîtra la structure en anneau de l'anomalie aperçue par Galilée. Il a établi que l'anneau était plat, et ne touchait pas la planète. Au-delà de l'admiration que l'on peut éprouver pour cet objet céleste, la raison nous commande rapidement de comprendre ce qui peut donner naissance à un tel objet que les observations ont révélé fort complexe. Aujourd'hui, malgré l'énorme attirail expérimental et théorique mis en œuvre pour tenter de comprendre tout cela, notre connaissance n'est encore que partielle...

Dans cet exposé de vulgarisation, dans une première partie, nous décrirons les anneaux de Saturne puis ceux des autres planètes. Dans une seconde partie, nous donnerons quelques pistes pour essayer de comprendre fonctionnement de ces anneaux. Parmi ces questions, l'une est implicite mais particulièrement intéressante : Pourquoi n'y a-t-il pas dans le système solaire d'autres structures stables que le satellite *classique* et les anneaux alors que les lois de la mécanique semblent laisser une grande liberté à *Dame Nature* ?

2. Les anneaux des planètes

On se propose dans cette section de donner une description des principaux anneaux du système solaire et de rappeler les grandes étapes de leur découverte et des travaux scientifiques visant à en expliquer la structure.

2.1 Le seigneur des anneaux

Commençons par présenter Saturne en quelques chiffres. (indice T pour Terre). Le tableau suivant donne en quelques chiffres clés les principales caractéristiques du "système Saturne". Nous y reviendrons.

La planète Saturne	Les anneaux et satellites
Masse : $95.16 M_T$	Extensions des anneaux A,B,C,D,F: (R_S = rayon de Saturne) 67000 Km à 140000 Km soit 1.11 à 2.33 R_S
Rayon équatorial : $9.45 R_T$ ou 60268 Km	Distances des satellites (en R_S): 2.276 , 2.31 , 2.349 , 2.510, 2.511, 3.08, 3.95 , 4.88, 4.88, 4.88 (Lagrange de Thétis), 6,26, 6,26 (Lagrange de Dioné) 20.3 (Titan), 24.6 (Hypériorion), 59 (Japet) 215 (Phoebé)
Densité moyenne : 0.69 (eau=1 terre=5.9)	
Pesanteur à la surface : 10.54 m/s^2	
Rotation sidérale : 10.23 heures	
Grand axe de l'orbite : 9.516 UA	
Révolution sidérale : 29.46 ans	
Excentricité de l'orbite : 0.055	
Inclinaison de l'orbite : 2.488°	



Quatre sondes ont visité Saturne :

Sonde	Date du lancement	Date d'arrivée	Résultats
Pionner 11	4 avril 1973	1er septembre 1979	Survol + Photos
Voyager 1	5 septembre 1977	12 novembre 1980	Survol + Photos+ mesures
Voyager 2	20 août 1977	24 janvier 1984	Survol + Photos+ mesures
Cassini	15 octobre 1997	Juin 2004	Cassini en Orbite, Huygens sur Titan

2.1.1 Généralités

Une particularité de la planète Saturne est d'avoir un axe de rotation incliné de $26^{\circ}45'$ sur le plan de l'orbite. Les anneaux tournent autour de cet axe. Comme la planète met 29.46 ans à parcourir son orbite, environ tous les 14 ans, on observe les anneaux par la tranche (1966, mars 1980, mai 1995, ...) puis on observe les anneaux pendant 14 ans soit par le dessus, soit par le dessous.

Dans un ouvrage d'astronomie générale datant de 1974, on peut y lire qu'il existe 3 anneaux nommés (avec beaucoup d'imagination) A, B, C. On sait aujourd'hui notamment grâce aux sondes spatiales qu'il y en a beaucoup plus (des milliers). Le nom de ces anneaux peut varier d'un ouvrage à l'autre, notamment en raison de l'année de publication. Le fait important est qu'il existe de nombreux anneaux séparés les uns des autres par des zones vides appelées "divisions". La première de ces zones vides a été découverte par Cassini. Elle mesure 3600 Km et elle est elle-même peuplée de plusieurs anneaux très fins (découvertes récentes).

2.1.2 Description des anneaux de Saturne.

On sait aujourd'hui que les anneaux sont composés de particules de différentes tailles qui tournent toutes autour de Saturne comme de minuscules satellites. Vu de la terre, il est commode de considérer qu'il y a 3 anneaux, même si leur nombre est bien plus grand. L'anneau extérieur (A) est légèrement plus sombre que la planète. Il s'étend sur 15000 Km Il est lui-même partagé en deux par la "division de Encke". L'anneau B de 25000 Km de largeur est sensiblement aussi brillant que la planète et l'anneau C (anneau de crêpe) faiblement lumineux apparaît comme un disque sombre. Avant l'anneau C, on peut en principe apercevoir un petit anneau appelé D. L'épaisseur de ces anneaux est extrêmement faible, elle est de l'ordre de 1 à 3 Km seulement. Deux autres "grands anneaux" F et G situés à 140000 et 170000 Km ont été découverts grâce à des sondes spatiales. Enfin, un anneau E bien plus éloigné (550000 Km) a été observé depuis la terre lorsqu'il est vu par la tranche.

A proximité immédiate des anneaux gravitent de petits satellites appelés "Satellites bergers" et qui semblent participer à la conservation d'anneaux très fins, empêchant par une interaction gravitationnelle complexe, les petits objets de l'anneau de le quitter.

Notons que ce qui différencie la haute atmosphère et ses particules des premiers anneaux est la vitesse de ces éléments. Avec une température mesurée dans l'infrarouge de -150°C soit environ 120°K , les molécules de méthane (NH_4) de la haute atmosphère auraient une vitesse cinétique moyenne de 250 m/s et les atomes d'hydrogène de l'ionosphère (1000°K) une vitesse de 4 Km/s. Les mêmes molécules auraient une vitesse d'entraînement liée à la rotation de la planète de 10.6 Km/s à 0.05 Rs d'altitude. Pour cette même altitude, la vitesse d'une particule satellisée est de 24,5 Km/s, donc bien supérieure. C'est donc bien la vitesse qui distingue l'anneau des hautes couches de l'atmosphère de Saturne.

Composition:

L'observation des anneaux de Saturne révèle des différences de luminosité et de couleurs. Ces différences proviennent à priori, de différence de densité et de composition. L'ensemble des observations semble indiquer la présence de particules de glace de méthane ou d'ammoniaque et même d'eau. La réponse spectrale, c'est-à-dire la réflexion de la lumière indique que la lumière violette est bien plus réfléchie que la lumière rouge. Cette constatation suggère que les anneaux soient constitués non seulement de particules solides mais aussi de gaz.

2.2 L'anneau de Maître Soleil :

Bien qu'il n'y ait pas "officiellement" d'anneau tournant autour du soleil, la ceinture d'astéroïdes gravitant entre Mars et Jupiter a souvent été comparée au système d'anneau de Jupiter. Qui plus est, sa structure comprenant à la fois des zones vides (Lacunes de Kirwood) et des zones à forte densité a conduit les théoriciens à utiliser les mêmes méthodes pour tenter de comprendre les observations. Dans le cas de la ceinture d'astéroïdes, c'est clairement l'action de Jupiter qui est en cause puisque les orbites dont les périodes P_X sont dans un rapport simple avec la période P_J de Jupiter correspondent soit à des

- Lacunes pour $P_X/P_J=1/3, 2/5, 3/7, 1/2$
- Zones de fort peuplement pour $P_X/P_J=2/3, 3/4$
- Configurations de Lagrange à $\pm 60^\circ$ pour $P_X/P_J=1/1$

Malgré d'importants efforts théoriques, on a toujours du mal à comprendre le fonctionnement de la ceinture d'astéroïdes. Il semble qu'il faille associer au seul effet de Jupiter, d'autres mécanismes telles que les collisions ou encore des explications telles que les effets statistiques d'observations.

Une explication souvent avancée est l'hypothèse dite "statistique" qui dit qu'un corps soumis à une résonance reste peu de temps avec les mêmes 6 éléments orbitaux et qu'on a plus de chance de l'observer lorsque ses paramètres ont suffisamment varié pour qu'il soit loin de la résonance.

Lorsqu'on observe un *histogramme de peuplement*, on constate que la majeure partie des astéroïdes est située dans une zone s'étendant de 2.1 UA à 3.3 UA, ce qui peut faire penser à l'anneau B de Jupiter.

Par ailleurs, le côté « désordonné » des astéroïdes comparé à la perfection des anneaux de Saturne peut surprendre. Sans prétendre tout expliquer par les échelles de temps et d'espace très différentes, on peut toutefois remarquer que si l'on prend comme « constante de temps » pour l'évolution de ces systèmes, la période de révolution, la constante de temps des anneaux de Saturne est de la classe 10 à 20 heures alors qu'elle est de 5 à 10 ans pour les astéroïdes. L'évolution d'un système d'astéroïdes est donc nécessairement plus longue.

2.3 Les autres systèmes d'anneaux:

Il est tout à fait remarquable que les grosses planètes gazeuses du système solaire possèdent toutes des anneaux. Cette observation suggère un mécanisme commun à la genèse et à l'évolution de ces formations. Dans le détail, les anneaux ne se ressemblent pas, sans doute à cause de la disparité de taille et de masse des planètes et aussi à cause des configurations très diverses de leurs satellites. Aujourd'hui, on a peu de certitudes sur leurs âges et sur les mécanismes précis de leur formation.

2.3.1 Jupiter

Les anneaux de Jupiter ont été découverts le 4 mars 1979 par la sonde Voyager I, via les images qu'elle a transmises sur terre. Ces anneaux ont été observés cinq jours plus tard dans l'infrarouge (2.2μ). On s'aperçut alors que ces anneaux avaient été traversés cinq ans auparavant par la sonde Pioneer-11, provoquant un afflux inexplicable de particules chargées.

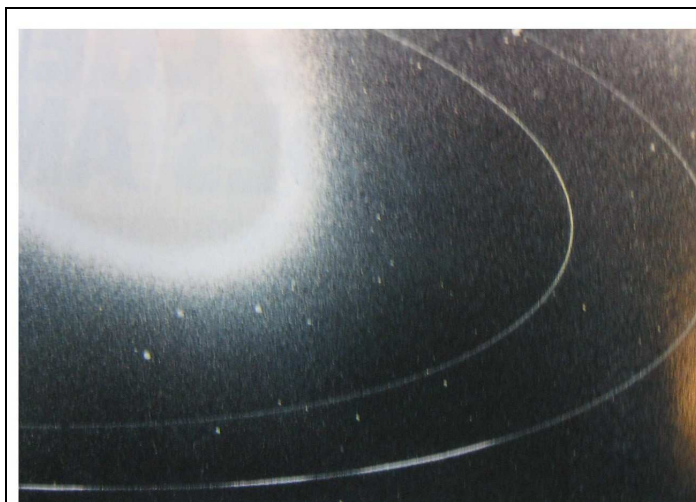
La densité de ces anneaux est environ 1 milliard de fois plus faible que ceux de Saturne. Ils sont diffus, relativement transparents et accompagnés d'un halo de matière. On distingue en tout 4 anneaux situés à l'intérieur de la magnétosphère de Jupiter.



2.3.2 Neptune

Les anneaux de Neptune sont un peu particuliers, ils contiennent des arcs de matière. Ces arcs ont été découverts depuis la terre pas André Brahic et William Hubbard en observant des occultations d'étoiles en 1984 et 1985. Cette découverte a conduit à modifier le programme de la sonde Voyager 2. Les anneaux ont été photographiés par la sonde. Ce fut la dernière mission de la sonde.

On compte 4 systèmes d'anneaux situés entre 38000 Km et 63000 Km



2.3.3 Uranus:

Uranus est une curieuse planète dont l'axe de rotation est pratiquement couché sur le plan de l'écliptique (en fait 8°). Uranus a été survolé le 24 janvier 1986 par Voyager 2. Les images transmises ont révélé qu'Uranus est entouré de 9 (ou 10) anneaux distincts assez sombres. (Ils ne réfléchissent que 3% de la lumière solaire) On ne connaît pas la matière dont sont constitués ces anneaux. Ces anneaux sont situés entre 42000 et 52000 Km du centre de la planète. Chaque anneau mesure quelques kilomètres de largeur. Trois anneaux sont circulaires et 6 sont elliptiques et de largeurs variables. Comme dans le cas de Saturne, l'axe de rotation de ces anneaux est pratiquement confondu avec l'axe de rotation de la planète. Le plan des anneaux est donc pratiquement "vertical" par rapport au plan de l'écliptique.

3. Tenter de Comprendre les anneaux planétaires

On se propose dans ce qui suit de donner quelques pistes pour comprendre les propriétés extraordinaires de ces formations. Mais, d'abord un peu d'histoire...

3.1 Un peu d'histoire

Après la découverte de Galilée puis d'Huygens, c'est Cassini qui le premier a émis l'hypothèse que les anneaux étaient composés de petits objets gravitant ensemble autour de la planète. Laplace le premier a tenté de faire la théorie des anneaux de Saturne en les assimilant à une sorte de tore aplati. Laplace a tenté de calculer la densité des anneaux considérés comme une sorte de "fluide". En 1898 à l'observatoire américain de Lick, l'astronome Keeler a mesuré le décalage doppler de la lumière des parties gauche et droite des anneaux, démontrant pour la première fois le mouvement des particules composant les anneaux. Poincaré reprendra les calculs de Laplace et trouvera des densités moyennes des anneaux bien plus faibles que Laplace. La question de la nature "solide" ou non de l'anneau a été reprise par Maxwell. Sophie Kovaleska a tenté vers la même époque de préciser la forme de la section des anneaux, toujours par le calcul.

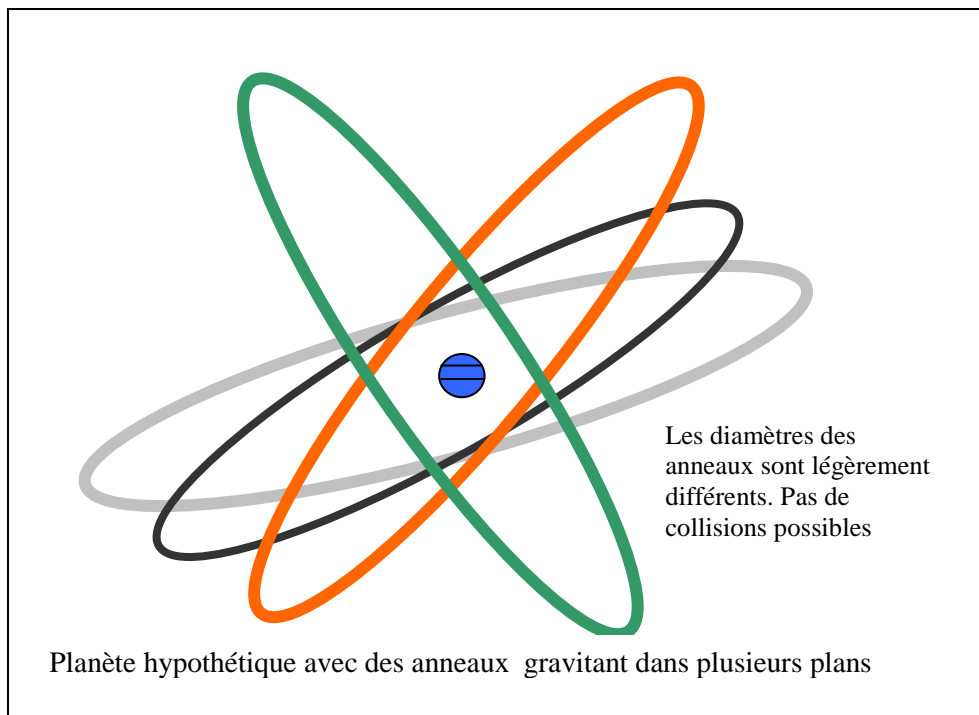
Après un « demi-sommeil » dans la première moitié de 20^{ème} siècle, les travaux ont repris dans la seconde moitié de ce siècle à l'aide de deux outils, les ordinateurs qui ont permis d'effectuer des calculs numériques d'orbites sur des périodes très longues et les sondes automatiques lancées dans les années 70/80 puis 1997 pour Cassini.

3.2 Une question iconoclaste

Celui qui s'interroge sur la nature et le fonctionnement d'un anneau doit admettre que la principale règle du jeu n'est autre que la troisième loi de Kepler qu'on peut traduire par la formule littérale :

$$\text{Orbite circulaire telle que Force centrifuge} = \text{Force d'attraction gravitationnelle.}$$

L'astronome curieux devra donc se demander pourquoi les deux seules possibilités sont apparemment le satellite ou les anneaux. (Une comète est un satellite particulier) En effet, des formations telles que des orbites avec toutes sortes d'axes et des distances légèrement différentes sont possibles mais ne s'observent pas ...



Pour tenter de comprendre le fonctionnement des anneaux, il faut utiliser un certain nombre d'outils mathématiques... Dans la suite, on présente les quelques outils de base qui permettent de comprendre les propriétés essentielles. On donne aussi quelques indications sur les outils de la mécanique céleste qui permettent d'entrevoir les explications des phénomènes plus fins tels que les résonances ou les « zones interdites » dans les anneaux. La question est complexe ! Le lecteur trouvera dans ce qui suit quelques éléments de réponses

3.3 Quelques pistes pour comprendre:

Les éléments techniques exposés ci-dessous ont été classés en 3 catégories de difficultés croissantes:

- Les lois élémentaires de la mécanique qui mènent aux lois de Kepler, que nous établirons dans le cas simple des orbites circulaire
- La théorie de la "limite de Roche" qui sera énoncée et dont la démonstration ne sera que suggérée
- Le formalisme des équations de Lagrange d'où découlent les phénomènes de résonances.

3.3.1 Les lois élémentaires de la mécanique.

Le mouvement des corps célestes est régi par les lois de la mécanique, ou plus précisément celles de la dynamique dont l'objet est de déterminer la position \mathbf{r} des corps en fonction du temps, ce qui revient à déterminer une fonction vectorielle $\mathbf{r}(t)$. La principale des lois de la dynamique s'écrit sous la forme

$$\mathbf{F} = m.\mathbf{\Gamma}$$

Cette expression est en fait une équation différentielle dans laquelle "m" est la masse du corps dont on cherche la trajectoire et \mathbf{F} la force qui agit sur lui. En astronomie, la force \mathbf{F} est en principe connue, c'est la force d'attraction en $1/r^2$ énoncée par Newton. Toutefois, cette force n'est parfaitement connue que si l'on connaît la distance « r » entre le corps attracteur et celui dont on cherche la trajectoire...

Par ailleurs, le terme $\mathbf{\Gamma}$ est l'accélération du corps. Sachant que l'accélération est la variation de la vitesse « \mathbf{v} » avec le temps et la vitesse est elle-même la variation de la distance « r » avec le temps... Mathématiquement, la variation d'une quantité avec le temps est donnée par sa « dérivée » ($\mathbf{\Gamma} = d\mathbf{v}/dt$ et $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ¹). Rappelons que la dérivée d'une fonction en un point est la pente de la courbe représentative en ce point.

En définitive l'équation fondamentale ci-dessus s'écrit symboliquement:

¹ Pour plus de détails, voir (par exemple) le petit cours de mathématiques donné au club en 2004.

$F(\text{dépendant de } r) = m \cdot \Gamma(\text{dépendant de } r \text{ via des dérivées})$

On dispose d'outils pour résoudre ce genre d'équations où l'inconnue est une fonction $r(t)$.

Cas particulier important:

Il existe aussi des cas particuliers pour lesquels on sait obtenir des résultats importants avec un minimum de calculs élémentaires. Un tel cas se rencontre par exemple pour l'orbite circulaire d'un corps de masse « m » (un satellite) gravitant autour d'un corps principal de masse « M ». L'accélération dans ce cas prend le nom de « force centrifuge » et est donnée par : $\Gamma_c = m \cdot v^2 / r$. Si l'on égale cette quantité à l'attraction entre m et M on trouve l'équation bien connue avec G désignant la constante de gravitation:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

La vitesse est constante et est donnée en fonction de la période P de rotation par $v = 2\pi \cdot r / P$. On notera aussi que la masse « m » disparaît de l'équation. L'équation ci-dessus relie donc la vitesse v ou la période P à la distance r du satellite au centre du corps principal. En pratique, il est préférable d'utiliser la vitesse angulaire, c'est-à-dire l'angle ω décrit par le satellite par unité de temps. On montre aisément que ω est donné par $\omega = v / r$. En définitive, cette relation qui n'est autre que la troisième loi de Kepler qui s'écrit sous l'une des 3 formes suivantes:

$P^2 / r^3 = \text{Constante}$	$\omega = \text{Constante} \cdot r^{3/2}$	$V = \text{Constante} / r^{1/2}$
--------------------------------	---	----------------------------------

Dans les 3 cas, la constante ne dépend que de la masse M de l'astre principal.

Le moment cinétique:

Le moment cinétique σ d'un corps en rotation autour d'un point O est égal à la vitesse du corps par sa masse et par le "bras de levier", c'est à dire la distance entre O et le corps (en fait σ est un vecteur):

$$\sigma = r \cdot (m \cdot v)$$

Cette définition ne serait qu'une définition parmi tant d'autre si le moment cinétique n'avait de très intéressantes propriétés. L'une des propriétés les plus remarquables est dans un système isolé, ce moment se conserve. Autrement dit, si le rayon "r" diminue alors la vitesse augmente. Cette propriété permet aux patineurs sur glace d'augmenter leur vitesse de rotation ou au contraire de la ralentir en écartant plus ou moins les bras.

Dans une planète comme Saturne qui tourne (rapidement) sur elle-même, le moment cinétique de la planète est porté par l'axe de rotation. Le moment cinétique des anneaux est porté par l'axe de symétrie des anneaux. Sous l'effet de diverses perturbations et en particulier de l'attraction du bourrelet équatorial, et des collisions, le moment des anneaux a tendance à s'aligner sur celui de la planète.

3.3.2 La limite de Roche

Au 19^{ème} siècle, le mathématicien² Édouard Roche s'intéressa entre autres choses au problème des satellites gravitant très près d'une planète. On a vu dans ce qui précède, que si l'on considère deux parties de satellites situés respectivement à la distance « r » et « r+a » du centre attracteur, en principe, elles ne tournent pas à la même vitesse, ou plutôt, elle ne devrait pas tourner à la même vitesse sauf si une force de cohésion maintient fermement les deux parties.

Exprimé autrement, tout se passe comme si une force tendait à séparer ces deux parties du satellite. D'une façon plus générale, E. Roche a montré que cette force est d'autant plus grande que la distance du satellite est faible. Vers 1850, Roche démontra qu'il existe une limite en deçà de laquelle un satellite serait détruit par des forces dites de marées. Il montra que cette limite est de l'ordre de 2.5 fois le rayon R_p de la planète.

Cette limite peut en pratique s'interpréter selon deux points de vue complémentaires:

- Si un satellite gravite à une distance comprise entre R_p et $2.5 \cdot R_p$ il finira par être détruit.

² Une époque où les mathématiciens s'occupaient aussi de mécanique céleste. Poincaré est un autre exemple

- Si des "débris" gravitent entre R_p et $2.5 \cdot R_p$, ils ne pourront jamais se rassembler pour former un satellite massif.

Si l'on consulte le tableau sur les satellites et anneaux de Saturne, on constate qu'ils sont précisément situés entre 1.1 et 2.33 rayons de Saturne. La théorie de Roche s'applique donc parfaitement aux anneaux de Saturne.

3.3.3 Les phénomènes de résonance

Chacun connaît au moins un phénomène de résonance s'il a un jour joué avec une balançoire... D'un point de vue physique, une balançoire est une sorte de pendule qui oscille avec une période T liée à la longueur du cordage mais qui finit par s'arrêter par le jeu des frottements. Pour entretenir le mouvement, voire l'amplifier, il faut exciter le système avec une fréquence comparable à la fréquence propre de la balançoire.

A titre d'illustration, considérons la situation suivante. Un père installe son enfant sur une balançoire A de 9 m de hauteur ($T_A=6$ sec.). A côté d'eux, un autre enfant utilise tranquillement une autre balançoire B de seulement 4m de haut ($T_B=4$ sec.). Ne sachant pas comment fonctionne cet engin, le père décide de regarder discrètement à côté de lui et de donner une impulsion sur la balançoire A chaque fois B est au plus haut...

Résultat : Il ne se passera à peu près rien et au bout d'une heure, le père se fera insulter par son gamin...

Comment passer de la balançoire aux planètes ? La réponse n'est pas simple pour plusieurs raisons. Tout d'abord, dans le cas de la balançoire, on a des phénomènes de frottement qu'on ne rencontre pratiquement pas en mécanique céleste. Ensuite, la mécanique céleste est fort complexe et le terme "résonance" peut recouvrir plusieurs réalités. Ainsi, le confinement d'une planète en un point de Lagrange est considéré comme une résonance même si le mécanisme sous-jacent en est différent.

Pour tenter de comprendre la résonance en mécanique céleste, on peut soit faire appel à des analogies et à des explications quantitatives, soit faire appel au formalisme des équations de Lagrange tout en mettant en évidence les points communs avec des problèmes plus simples de résonances. En pratique, on présentera les explications "quantitatives" dans le texte principal et les explications plus techniques seront placées en annexe.

La théorie des perturbations des planètes et des satellites a pour objectif de partir des 6 éléments d'une orbite képlérienne simple et de calculer en fonction des perturbations les petites corrections qu'il convient d'apporter en fonction du temps à chacun des 6 éléments de l'orbite.

Supposons qu'on s'intéresse à un corps X. Les 6 éléments de son orbite seront notés $(a, e, i, t^\circ, \omega, \Omega)$. Ces éléments sont supposés connus à une certaine époque " t_0 " et on cherche leurs valeurs à une époque t quelconque, généralement postérieure à t_0 . Le principe est d'écrire des équations différentielles pour chacun de ces termes puis de résoudre l'équation. En pratique, l'équation est relativement simple, elle est de la forme, Q désignant ici l'un des 6 paramètres de l'orbite:

$$dQ/dt = \text{Somme de termes "connus" relatifs à l'astre étudié et aux astres perturbateurs}$$

En pratique, l'application des équations de la mécanique céleste fait rapidement apparaître des centaines de termes au second membre. Ces termes sont en particulier composés de fonctions trigonométriques de la forme

$$\cos(2\pi \cdot t(p/T_x \pm q/T_p)) \text{ (ou sinus de la même chose)}$$

Dans cette expression, T_x et T_p sont les périodes de révolutions du corps X et du corps perturbateur P et p et q sont des entiers. Généralement, l'expression $E = p/T_x \pm q/T_p$ est quelconque et le cosinus prend une valeur quelconque (positive ou négative) et qui change avec le temps. La dérivée dQ/dt est ainsi en général la somme d'une multitude de termes qui changent de valeurs avec le temps et dont la somme reste modeste. Cependant, il peut arriver que la valeur de T_x soit telle que l'expression $E = p/T_x - q/T_p$ soit nulle. Dans ce cas, le cosinus (rappel $\cos(0)=1$) garde une valeur constante, indépendante du temps. Prenons par exemple $p=2$ et $q=3$. Dire que $E=0$ revient à écrire que $2/T_p = 3/T_x$. Autrement dit, Au bout de 3 périodes T_x , les deux astres se retrouvent dans la même configuration, P n'ayant parcouru que 2 fois son orbite. Si pendant ces 3 périodes T_x , (ou $2 \cdot T_p$) l'effet de la gravitation a modifié un paramètre Q d'une petite quantité δQ , pendant les 3 périodes suivantes, Q sera encore modifié de la même petite quantité δQ ... Et ainsi de suite.

L'effet cumulé de toutes ces actions prend le nom de résonance.

Prenons maintenant le cas où le paramètre Q est le grand axe a_x de l'orbite du corps X . Clairement, la dérivée da_x/dt va varier sous l'effet du terme résonnant et par conséquent la valeur de a_x va varier. Autrement dit, si le a_x de départ correspond via l'équation $a_x^2/T_x^3=Cste$ à une période en résonance, la valeur de a_x va se modifier au cours du temps (en même temps que T_x) jusqu'à ce que les conditions de la résonance aient disparues. Un tel processus aura néanmoins un résultat important :

Il n'y aura pas de corps gravitant à la distance a_x de départ.

Dans la pratique, les phénomènes mis en jeu sont plus nombreux et plus complexes mais le principe du mécanisme demeure.

4. Annexe : Théorie des résonances en mécanique céleste:

Pour présenter la théorie des résonances sous une forme très simplifiée, on procédera en 3 étapes:

1° On présentera sous forme mathématique le phénomène de la résonance pour un résonateur simple de façon à mettre en évidence le point commun à tous ces phénomènes.

2° dans une seconde étape, on évoquera de façon aussi simple que possible la théorie des perturbations telle que l'a établi Lagrange pour déterminer les trajectoires des planètes au-delà du problème simple à deux corps qui est insuffisant.

3° Dans une troisième étape, on montrera comment l'écriture des équations de Lagrange en fonction de paramètres supposés connus de corps perturbateur permet de calculer les paramètres des orbites, puis comment on se retrouve avec des expressions qui ressemblent à celles du problème de la balançoire et qui conduisent donc à des résonances.

4.1 Théorie simplifiée d'un résonateur:

Afin de bien comprendre le mécanisme de la résonance, on se propose de traiter l'exemple élémentaire d'un résonateur mécanique tel par exemple qu'un pendule ou une balançoire.

En écrivant que la masse suspendue est soumise à un couple de rappel en

$$C = -(L \cdot \sin\theta) * (m \cdot g)$$

Avec $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ et possède un moment d'inertie $I = m \cdot L^2$

On obtient l'équation du mouvement, c'est-à-dire la variation temporelle de $\theta(t)$ en écrivant que

$$I \cdot d^2\theta/dt^2 = C,$$

soit en se limitant aux petits angles et en éliminant la masse "m" du pendule:

$$d^2\theta/dt^2 + (g/L) \cdot \theta = 0$$

Une telle équation différentielle possède deux caractéristiques:

- Il n'y a pas de second membre à l'équation, donc pas d'excitation imposée
- Il n'y a pas de terme de frottement, (ce qui n'est qu'une approximation).

La solution de cette équation est bien connue. Si l'on appelle A^2 la quantité positive g/L , la solution est de la forme

$$\theta(t) = K \cdot \cos(A \cdot t + b)$$

Ce mouvement est appelé « oscillation libre ». On note que l'équation différentielle ne détermine que A , les constantes (K , b) restant arbitraires et dépendant des conditions initiales. Dans la suite, on supposera $b=0$, ce qui est un simple choix de l'origine des temps.

Supposons maintenant qu'on excite le système avec un couple de la forme $C = m \cdot \delta \cdot \sin(B \cdot t)$. L'équation devient :

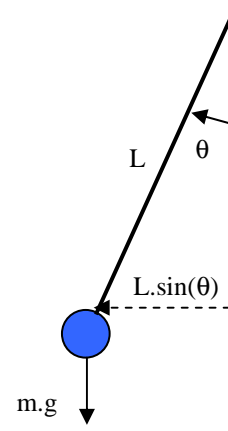
$$d^2\theta/dt^2 + A^2 \cdot \theta = \delta \cdot \sin(B \cdot t).$$

Que devient le mouvement ?

Intuitivement, on s'attend à avoir un mouvement sinusoïdal d'amplitude δ et de pulsation B . En fait, deux régimes cohabitent, le régime d'oscillation libre et le régime d'oscillation forcée. On peut montrer que la solution complète s'écrit :

$$\theta(t) = K \cdot \cos(A \cdot t) + \frac{\delta}{A^2 - B^2} \sin(B \cdot t)$$

Autrement dit, les oscillations du régime forcée ont une amplitude qui n'est pas simplement égale à δ mais est proportionnelle à la quantité $(\delta / (A^2 - B^2))$ qui devient très grande lorsque B se rapproche de A .



Que se passe-t-il si B devient égal à A ? On divise δ par une quantité nulle, l'amplitude de l'oscillation devient donc en principe infini... On dit qu'il y a résonance. En pratique, la résonance modifie les conditions d'apparition du phénomène et rien ne devient infini.

Nous allons voir que dans le ciel, des résonances apparaissent aussi lorsqu'on divise une certaine expression liée à un effet perturbateur, par zéro.

4.2 Quelques éléments de mécanique céleste:

4.2.1 Les équations de Lagrange

La mécanique céleste a pour objet le calcul de la position des astres en fonction du temps en appliquant les lois de la physique, et en particulier la loi citée plus haut ($\mathbf{F} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{\Gamma}$).

En appliquant la formule ci-dessus à un système à 3 corps (ou plus !), on montre que les coordonnées (x,y,z) d'un astre de masse m tournant autour d'un corps principal de masse M et étant soumis à une force perturbatrice \mathbf{F}_p dérivant d'une fonction $R(x,y,z,...)$ vérifient les 3 équations différentielles du second ordre suivantes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu \cdot \frac{x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu \cdot \frac{y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\mu \cdot \frac{z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Dans ces formules, on a posé $\mu=G\cdot(M+m)$ et on a placé le centre du système de coordonnées au centre du corps principal.

En l'absence de perturbations ($R=0$) on sait résoudre ce système, **exactement**, la solution bien connue étant une trajectoire elliptique parcourue suivant les lois de Kepler. Pour définir une telle ellipse avec une orientation quelconque, il faut se donner 6 paramètres constants:

- Deux paramètres pour définir l'ellipse : (a, e), le grand axe et l'ellipticité
- Trois angles pour positionner l'ellipse dans l'espace (Ω , ω , i) la longitude de nœud ascendant, l'argument du périastre, l'inclinaison de l'orbite.
- L'instant τ de passage au périastre.

La liaison entre les coordonnées (x,y,z) et les paramètres (a, e, Ω , ω , i, τ) est élémentaire:

Les coordonnées (x, y, z) se calculent en fonction du rayon vecteur « r » et des angles (Ω , ω , i) ainsi que de l'anomalie vraie « f ». La distance « r » se calcule par

$$1/r = (1+e\cdot\cos(f))/(C^2/\mu).$$

Il reste ensuite à calculer l'angle f en fonction du temps. Le calcul est classique, on trouve avec $M=n\cdot(t-\tau)$ le facteur "n" désignant conventionnellement la quantité $2\pi/P$ où P est la période de rotation :

$$f = M + (2e-e^3/4)\cdot\sin(M) + (1.25e^2-11e^4/24)\cdot\sin(2M) + (13e^3/12-...)\cdot\sin(3M) \dots \dots$$

On retiendra de cette formule et de toutes celles qui en découlent que de nombreux paramètres sont des sommes de fonctions trigonométriques d'argument M, 2M, 3M ...

Effet des perturbations :

En présence de plus de deux corps, les équations ci-dessus ne sont plus tout à fait exactes. Lagrange a montré qu'on pouvait obtenir la position vraie du corps de masse m à condition de faire varier légèrement au cours du temps les 6 paramètres (a, e, Ω , ω , i, τ) qui deviennent 6 fonctions du temps :

$$(a(t), e(t), \Omega(t), \omega(t), i(t), \tau(t))$$

Et qui au temps $t=0$ prennent la valeur connue car tirée de l'observation ($a_0, e_0, \Omega_0, \omega_0, i_0, \tau_0$)

Pour cela, on doit résoudre 6 équations différentielles du premier ordre mais couplées de la forme :

$$dQ/dt = \text{Fonction des paramètres de l'astre étudié et du ou des corps perturbateurs.}$$

Q est l'un des 6 paramètres (a, e, Ω, ω, i, τ) du mouvement. On donne pour mémoire la forme exacte de ces 6 équations élaborées par Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{2}{a.n^2} \frac{\partial R}{\partial \tau} & \frac{de}{dt} &= -\frac{1-e^2}{a^2.n^2.e} \frac{\partial R}{\partial \tau} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2.a.e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cot \text{an}(i)}{a^2.n\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2.\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} & \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2.\sqrt{1-e^2} \sin(i)} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2.e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot \text{an}(i)}{a^2.n\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} & \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{2}{a.n^2} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1-n^2}{n^2.a^2.e} \frac{\partial R}{\partial e} \end{aligned}$$

Dans le cadre de cet exposé, on ne cherchera pas à résoudre ces équations.

4.2.2 Origine du phénomène de résonance

Pour résoudre le système ci-dessus, il faut expliciter tous les termes connus qui sont soit des éléments de l'astre perturbateur, soit des éléments de l'astre étudié. D'une façon générale, les éléments des seconds membres se calculent via les équations de Kepler et aboutissent systématiquement à des expressions trigonométriques dont l'argument principal est *le moyen mouvement* M_x des corps en interaction. :

$$M_x = n_x.(t-\tau_x),$$

C'est ainsi qu'on se retrouve avec des sommes et produits de sinus et cosinus d'expressions en

$$p.M_a \pm q.M_b$$

Où p et q sont des entiers et les M_a ou M_b sont des « moyens mouvements » des astres a et b, (a, b) pouvant être indifféremment l'astre perturbé ou perturbateur.

La transformation des produits de fonctions trigonométriques en sommes et différences fait donc apparaître en second membre toutes sortes de sommes telles que :

$$dQ/dt = \sum C_{a,b} \cdot \frac{\text{Sin}}{\text{Cos}} \left\{ (p.n_a.t - q.n_b.t) \right\}$$

On obtient Q(t) par intégration de cette somme terme à terme. L'intégration est élémentaire, on trouve des sommes telles que :

$$Q = Q_0 + \sum \frac{C_{a,b}}{p.n_a - q.n_b} \cdot \frac{-\text{Cos}}{\text{Sin}} \left\{ (p.n_a.t - q.n_b.t) \right\}$$

En général, dans cette somme, chaque terme perturbateur prend au cours du temps, différentes valeurs, positives et négatives qui se compensent partiellement. Cependant, si l'expression $(p.n_a - q.n_b)$ s'annule, deux phénomènes apparaissent :

- Le terme perturbateur devient très grand, puisqu'on divise par zéro.
- Ce terme ne dépend plus du temps (0.t=0 !), Autrement dit, l'effet de ce terme perdure.

L'effet de ce *grand terme* est de modifier de façon importante le paramètre Q. On est en présence d'une résonance qui a pour effet d'interdire la valeur initiale Q_0 de rester sensiblement invariante.