Quasar 95

Les marées et la limite de Roche

Présentation : 20 avril 2012

La mécanique céleste étudie l'attraction de corps ponctuels et éloignés. On examine ici ce qui se passe quand les corps ne sont plus suffisamment ponctuels par rapport à leur distance mutuelle.

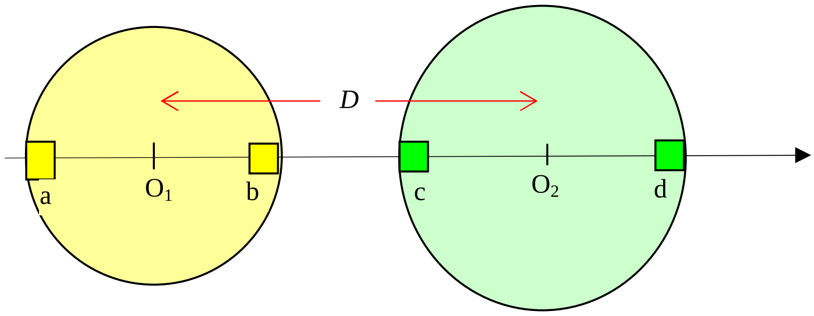
Sommaire

1. Introduction

1.1 Généralités

La mécanique céleste étudie principalement l'attraction de corps *ponctuels* et *éloignés*.

A partir de la loi de gravitation de Newton, on retrouve ainsi les lois de Kepler qui décrivent le mouvement relatif des corps considérés comme ponctuels et rigides. On examine ici ce qui se passe quand les corps ne sont plus suffisamment ponctuels par rapport à leur distance. Pour cela, considérons deux corps sphériques, sensiblement de même diamètre et très proches l'un de l'autre.



La loi de l'attraction universelle nous dit que les 2 corps s'attirent avec une force F donnée par la formule bien connue dans laquelle m_1, m_2 sont les masses des 2 corps et D la distance O_1O_2.

$$F = G.\frac{m_1 m_2}{D^2}$$

Maintenant, considérons 4 fragments de matière notés *a, b, c, d*, de même taille et de même masse, comme indiqué sur la figure ci-dessus. Il est clair que les fragments (*b*, *c*) ont une distance inférieure à D alors que les fragments (*a*, *d*) ont une distance supérieure à D. Si l'on appelle f_{12} la force d'attraction entre deux fragments identiques aux autres et situés en (O_1 et O_2) on a clairement

$$f(a,d) < f_{12} < f(b,c)$$

Cette inégalité pose plusieurs questions :

- Les forces exercées en 2 points du corps étant différentes, y a-t-il déformation de ce corps ?
- Si les forces appliquées aux différents points du corps sont très différentes, le corps peut-il se briser.
- Si l'on additionne toutes les forces élémentaires $f(x,y)$ entre 2 fragments *x*, et *y* obtient-on la force F de la loi de Newton énoncée ci-dessus, et si oui, pour quelle distance ?

On se propose dans la suite, de répondre à ces trois questions. La première question appliquée à un astre relativement rigide et entouré d'une enveloppe fluide telle que l'eau conduit à la théorie des marées océaniques.

Le second point a été étudié au 19$^{\text{ème}}$ siècle par un astronome français, Edouard Roche (1820-1883) et est connu sous le nom de « limite de Roche », c'est-à-dire, limite inférieure en deçà de laquelle les « forces de marées » sont supérieures aux forces de cohésion gravitationnelles. Les premiers calculs sur le sujet avaient été entrepris par Lagrange.

Le dernier point nous conduit à une simplification qui consiste à représenter un corps par une masse unique concentrée en son centre de gravité. Ce point est un peu plus technique et sera traité en annexe pour les lecteurs curieux.

2. L'origine des marées océaniques

2.1 Un peu d'histoire

On sait tous aujourd'hui que ce sont la Lune et le Soleil qui sont à l'origine des marées. Ce savoir n'a pas été simple à acquérir. Chez les Grecs, on en a discuté sans vraiment analyser le phénomène. Pour les anciens, le phénomène est difficile à comprendre car l'eau des mers n'est pas la seule à se déplacer. Les fleuves aussi sont mobiles. De là à imaginer qu'ils « poussent » la mer, il n'y a qu'un pas.

Pour d'autres, tel Platon, on imagine que la mer rentre et sort de gouffres sous-marin. Le premier à imaginer que la Lune et le Soleil on un rôle est Héraclide (388 – 315 av JC). Le grand Aristote lui-même imaginera une sorte d'élasticité des eaux qui fait que l'eau du fond est écrasée par l'eau en surface.

Le premier à avoir fait une description un peu précise du phénomène et de son rapport avec les positions de la Lune est un romain, Pline l'ancien (23- 79). Pline remarque en particulier le caractère semi diurne des marrées (environ 2 marées par jour) et le décalage systématique entre le passage de la Lune et les heures de marées hautes.

Plus tard, des ecclésiastiques comme Saint Augustin ou Saint Thomas d'Aquin attribueront aussi la cause des marées à la Lune mais sans fournir d'explications rationnelles.

A la renaissance, Kepler fait encore appel à la Lune, mais à travers des arguments ésotériques qu'il utilisait souvent, en particulier au début de sa carrière.

Galilée fait une étude un peu plus « sérieuse » sur le rôle de la Lune mais se trompe complètement.

Un peu plus tard, Descartes invoque encore la Lune, mais à travers des interactions liés à des « tourbillons ».

C'est Newton qui fait la première théorie sérieuse des marées à l'aide de la loi de la gravitation. S'il a compris la relation entre l'amplitude des marées et l'alignement du Soleil et de la Lune, en revanche, son modèle reste purement statique. Un modèle statique serait pertinent si la Lune orbitait sur une orbite géostationnaire à 42000 km du centre de notre globe, ce qui n'est pas le cas.

Au siècle suivant, Laplace (1749 – 1827) va enfin développer une théorie dynamique des marées :

L'ensemble des mers est un grand système résonant et le mouvement est entretenu par la Lune et le Soleil, un peu à la manière d'une balançoire sur laquelle on donne régulièrement de petites impulsions.

Au 19ème siècle, de nombreux « géomètre vont poursuivre le travail de Laplace, en Europe comme en Amérique.

MÉMOIRE

SUR LA THÉORIE DES MARÉES,

PAR M. CH. DELAUNAY.

Cette théorie dynamique a encore cours aujourd'hui même si elle a été améliorée par quelques astronomes parmi lesquels il faut citer le célèbre Henri Poincaré (1854 – 1912).

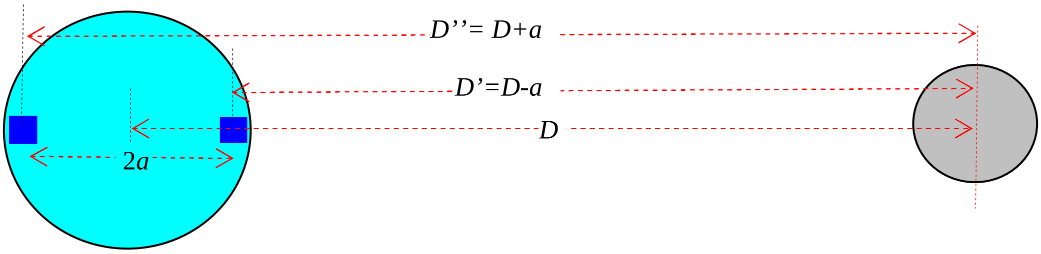
2.2 La force génératrice des marées

Les marrées sont dues à un effet différentiel d'attraction de la Lune et du Soleil sur la partie liquide de la Terre, c'est-à-dire les océans.

Considérons la Lune, de masse m_L. Elle tourne autour de la Terre (de masse m_T) en 27.3 jours à une distance moyenne de D=384400 km. A cette distance, il y a équilibre entre l'attraction F et la force centrifuge, ce qui contraint la Lune à rester sur son orbite. Par le principe d'égalité entre *action* et *réaction*, cette force F est aussi celle que la Lune exerce, non pas en n'importe quel point du globe mais précisément en son centre. On a donc, avec $G=6.673\times10^{-11}$

$$F = G\frac{m_T.m_L}{D^2} \qquad (1.)$$

Si l'on considère un autre point situé à une distance D' différente de D, la force va varier. Sur Terre, à chaque point situé à une distance $D'=D-a$, on peut associer un autre point situé à une distance $D''=D+a$.



La différence entre les 2 forces pour une même masse δm est donnée par :

$$\delta F = G.m_L.\delta m\times\left\{\frac{1}{(D-a)^2}-\frac{1}{(D+a)^2}\right\}$$

Cette expression se met sous la forme :

$$\delta F = G.m_L.\delta m\times\frac{2Da}{(D^2-a^2)^2}$$

Soit encore,

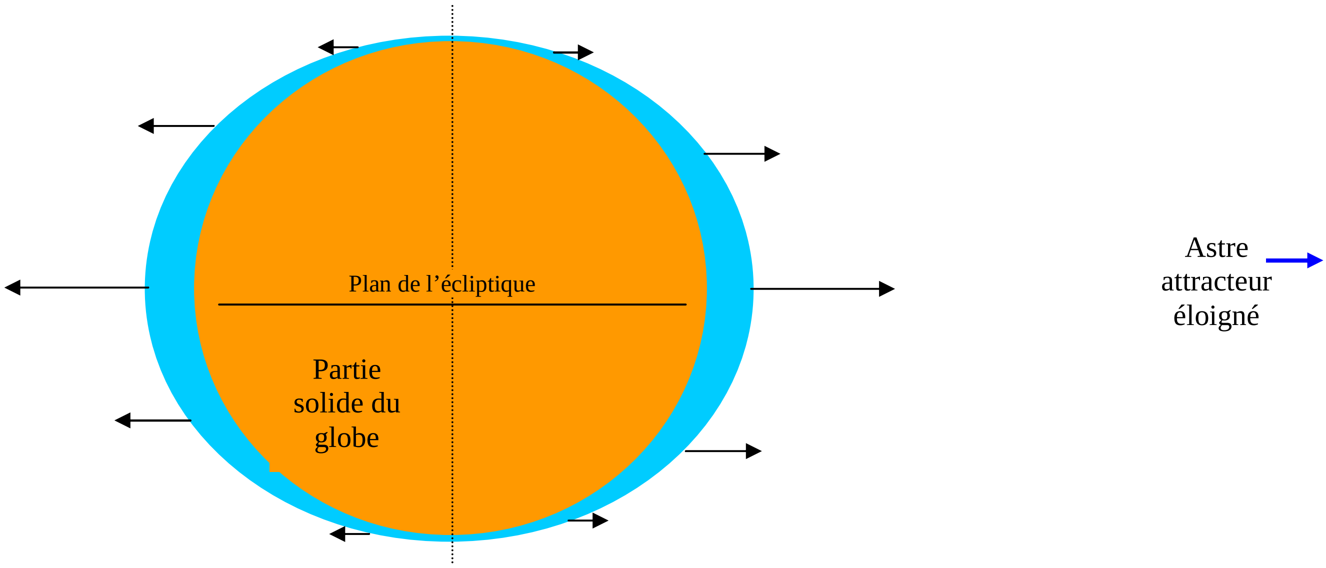
$$\delta F = G.m_L.\delta m\times\frac{2a}{D^3}\frac{1}{(1-a^2/D^2)^2}$$

Le terme en a^2/D^2 est très petit (au maximum $6378^2/384400^2=2.75\times10^{-4}$) et sera donc négligé dans la suite. En définitive, le différentiel de forces exercées sur deux masses δm espacées de $2a$ est

$$\delta F = G.m_L.\delta m\times\frac{2a}{D^3} \qquad (2.)$$

Autrement dit, il est en $1/D^3$ alors que la gravitation est en $1/D^2$. Par ailleurs, la longueur « a » doit être considérée comme algébrique. Ainsi, tout se passe comme si l'eau qui « voit » l'astre attracteur était attirée alors que l'eau situé « *derrière* » la Terre par rapport à l'astre attracteur est repoussée par cet astre. Physiquement, on peut expliquer ce phénomène en disant que les 2 forces sont relatives par rapport à la force qui agit sur la Terre en son centre.

Cette force différentielle est maximum lorsque la distance a est maximum, autrement dit pour $a = R_t$, le rayon terrestre. Appliquons ce calcul à l'ensemble des particules d'eau constituant les océans et supposons pour simplifier que la Terre soit entièrement recouverte d'océans. La figure suivante indique l'intensité des forces. (Flèches noires)



Si l'on admet que la hauteur d'eau est proportionnelle à la force différentielle, cette force va donc créer 2 bourrelets d'eau diamétralement opposés sur Terre.

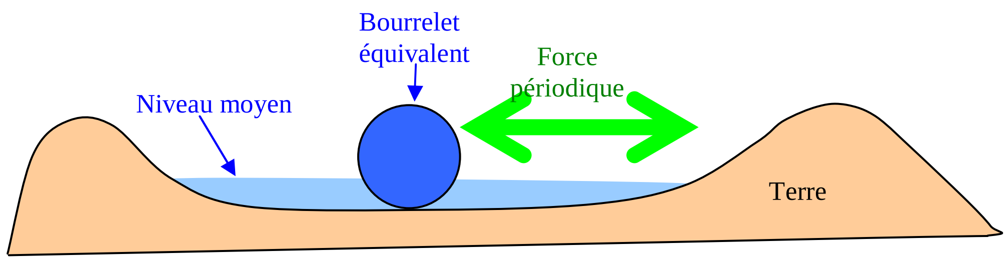
En pratique, ce bourrelet a 2 origines, la Lune et le Soleil. Dans le référentiel terrestre, le Soleil fait un tour en 24 heures. La Lune qui se déplace autour de la Terre retrouve la même position par rapport au Soleil au bout de 29.53 jours. Par rapport au référentiel terrestre, la Lune présente une période P un peu plus longue que le jour solaire et donnée par la formule (en jours).

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{1j} - \frac{1}{29.53j}$$

Soit P=1.0351 jour ou 24.84 heures soit encore, 24h 50m.

Tout de passe donc comme si le double bourrelet océanique était poussé par deux forces, l'une de période 24 heures et l'autre de 24 heures et 50 minutes.

Si la Terre était entièrement recouverte d'eau, on pourrait imaginer un double bourrelet d'eau se déplaçant avec une période de 24 h ou de 24h 50 m. En fait, il n'en est rien à cause des continents qui barrent la route aux flots. On peut donner des marrées l'image simple suivante :



Un bourrelet d'eau est soumis d'une part à une force périodique, donc alternative, et d'autre part à des contraintes topographiques. Il en résulte une sorte de système oscillant dont la période dépend des deux excitations possibles, la Lune et le Soleil, et ce dans le rapport de leur force respectives. Comme tout système résonant, celui-ci va se comporter comme si les deux forces agissaient indépendamment, et sera la somme vectorielle des deux comportements. En reprenant l'image simple ci-dessus, si on néglige les frottements, la sphère équivalente au bourrelet d'eau va osciller entre les deux rives avec une certaine période de résonnance P_r. Si cette période est très différente de celle P de la force d'attraction, l'amplitude des mouvements sera faible. En revanche, si les deux périodes sont proches, il y aura résonnance et donc la sphère montera assez haut, autrement dit, l'amplitude de la marée sera importante.

Ainsi, la méditerranée, par sa taille, présente une période propre bien trop faible pour qu'elle soit le siège de marées.

<u>Période des marées</u> :

La Lune et le Soleil sont clairement impliqués dans le phénomène des marées. Mais quelle force est prépondérante. Il y a deux façons de répondre, par l'observation et par le calcul.

Supposons que le Soleil ait un rôle primordial. La période serait alors de 24 heures et on retrouverait donc au bord de nos côtes la mer à la même hauteur tous les jours. On saurait ainsi que la mer est haute à la Baule à 11h 33 et basse à Brest à 5h 19 du matin et ce, tous les jours de l'année... On sait tous qu'il n'en est rien…

L'acteur principal est donc bien la Lune. En regardant un horaire des marées, on trouve d'ailleurs assez bien le décalage de 50 minutes par jour pour 2 marées.

Analysons le phénomène par le calcul en comparant l'intensité des 2 forces

$$\delta F_{\text{Lune}} = G.m_L.\delta m \times \frac{2a}{D_L^{\ 3}} \qquad \delta F_{\text{Soleil}} = G.m_S.\delta m \times \frac{2a}{D_S^{\ 3}} \qquad (3.)$$

Soit encore, en faisant le rapport des 2 forces

$$\frac{\delta F_{Lune}}{\delta F_{Soleil}} = \frac{m_L}{m_S} \times \left(\frac{D_S}{D_L}\right)^3 \qquad (3.a)$$

Par rapport à la Terre, on a $m_L = m_T/81.3$ et $m_S = 333\,000\ m_T$, soit $m_L/m_S = 1/27\times10^6$

Pour les distances moyennes, on a $D_S/D_L = 149600\ 000/384400$, soit 389.2

Soit tout calcul fait, un rapport de $389.2^3/27\times10^6 = 2.2$

$$\frac{\delta F_{Lune}}{\delta F_{Soleil}} = 2.2.$$

La Lune a donc une influence 2.2 fois plus forte que le Soleil sur les marées. C'est donc elle qui impose sa période sur les marrées. Notons toutefois que le rapport 1/2.2 n'est pas négligeable et que, comme c'est la somme vectorielle des effets qui crée les marées, on doit s'attendre à des effets bien différents en amplitude suivant que les 3 astres Terre, Lune, Soleil sont ou pas alignés.

Ainsi, au moment de la pleine Lune et nouvelle Lune (on parle de syzygie) les trois astres sont alignés donc les marées de fortes amplitudes. Cette circonstance se retrouve deux fois par mois. En revanche, lorsque le Soleil et la Lune sont en quadrature, l'amplitude des marées est minimale.

L'examen d'un horaire des marées avec des coefficients continuellement variables avec deux maxima par mois confirme ce comportement.

Le tableau ci-dessous donne les heures de marées à Dives/Mer en avril 2012.

DIVES-SUR-MER
Calvados

AVRIL 2012 — Heure légale

Date	Pleines mers				Basses mers	
	Matin h mn	Coef	Soir h mn	Coef	Matin h mn	Soir h mn
1 D	06 08	**32**	19 05	**35**	00 05	12 51
2 L	07 36	**40**	20 18	**46**	01 42	14 30
3 M	08 40	**54**	21 11	**62**	03 14	15 46
4 M	09 28	**71**	21 54	**79**	04 19	16 46
5 J	10 10	**87**	22 34	**95**	05 14	17 39
6 V	10 51	**101**	23 14	**106**	06 04	18 28
7 S	11 33	**110**	23 55	**113**	06 51	19 14
8 D	– –	–	12 17	**114**	07 36	19 57
9 L	00 39	**113**	13 02	**110**	08 19	20 39
10 M	01 24	**106**	13 50	**101**	09 00	21 20
11 M	02 11	**94**	14 39	**86**	09 41	22 01
12 J	03 01	**78**	15 35	**70**	10 24	22 46
13 V	03 58	**62**	16 44	**55**	11 13	23 44
14 S	05 13	**49**	18 11	**46**	– –	12 20
15 D	06 42	**45**	19 36	**47**	01 02	13 42
16 L	08 01	**50**	20 40	**54**	02 27	15 04
17 M	08 59	**59**	21 27	**64**	03 45	16 15
18 M	09 43	**68**	22 05	**72**	04 43	17 07
19 J	10 21	**76**	22 40	**79**	05 28	17 46
20 V	10 56	**81**	23 13	**83**	06 05	18 21
21 S	11 29	**84**	23 44	**84**	06 38	18 53
22 D	– –	–	12 00	**84**	07 10	19 24
23 L	00 14	**83**	12 31	**82**	07 40	19 54
24 M	00 44	**80**	13 03	**78**	08 08	20 22
25 M	01 16	**76**	13 36	**72**	08 36	20 50
26 J	01 48	**69**	14 12	**65**	09 05	21 20
27 V	02 25	**61**	14 53	**56**	09 38	21 56
28 S	03 09	**52**	15 46	**48**	10 17	22 40
29 D	04 07	**44**	16 56	**42**	11 08	23 40
30 L	05 24	**41**	18 17	**42**	– –	12 18

Heure d'été en vigueur du 25/03/2012 à 2h du matin au 28/10/2012 à 3h du matin.

On note que le coefficient qui reflète l'amplitude des marées varie de 114 à 46 en une semaine environ et que deux maxima de ce coefficient sont séparés de deux semaines, soit une période d'un demi-mois lunaire. Cette particularité est due au caractère « semi-diurne » des marées en France. Tout se passe comme si la période de résonnance était de la moitié de la période de l'excitation. On peut aussi remarquer que l'attraction luni-solaire provoque, non pas un mais deux bourrelets d'eau, d'où la période semi-diurne.

2.3 Les effets des marées

2.3.1 Freinage de la rotation terrestre

Il est clair que même si l'eau glisse sur les fonds marins, cette eau n'est pas infiniment fluide et qu'elle exerce une force moyenne sur la partie solide du globe. Cette friction continue provoque un freinage, et donc un ralentissement de la durée du jour.

2.3.2 Eloignement progressif de la Lune

La mécanique nous enseigne que certaines quantités doivent rester constantes pour un système isolé. Prenons quelques exemples. Le premier est celui de la pétanque. Une boule étant fixe au sol, une autre vient l'impacter, la déplace violement et … prend sa place. Ce scénario, fréquemment observé est dû à deux principes de conservation, l'impulsion (ou quantité de mouvement) et l'énergie cinétique totale.

Autre exemple plus proche de notre propos, celui du patineur. Un patineur décrit une belle courbe puis soudain s'immobilise en un point. Il se met à tourner sur lui-même à petite vitesse, puis soudain, sa rotation s'accélère brusquement. Comment fait-il, Tout simplement, il conserve son énergie cinétique de rotation, mais modifie son moment d'inertie en rassemblant ses membres autour de son axe de rotation.

Dans le couple Terre-Lune, il y a 3 mouvements de rotation :

- La Terre sur elle-même
- La Lune sur elle-même
- La Lune autour de la Terre.

A ces 3 mouvements correspond à la fois une énergie cinétique de rotation et un moment cinétique de rotation qui doit rester constant. Ce moment cinétique total de rotation doit rester constant.

Explication physique :
La Lune crée un bourrelet d'eau. Le grand axe de ce bourrelet est un peu en avance sur la direction Terre-Lune. La raison de cette avance est que la Terre tourne plus vite sur elle-même (24h) que la Lune autour de la Terre (27.3 j). Elle entraîne donc avec elle cet *ellipsoïde de marée*. La Lune tire sur le bourrelet, et de ce fait ralentit la vitesse de rotation terrestre. En échange, le bourrelet tire sur la Lune, l'accélère, et donc l'éloigne de la Terre.

On donne en annexe un calcul élémentaire fondé sur le caractère constant du moment cinétique de l'ensemble Terre-Lune.

Pour une diminution de la durée du jour de 2 ms par siècle, on trouve un éloignement de 4.4 cm par ans. On a encore très largement le temps de rêver au clair de Lune…

2.3.3 Rotation synchrone des couples planète/satellites

Le freinage dû aux marées s'arrête lorsque la rotation a atteint un état d'équilibre stable, telle que la période de révolution orbitale soit égale à la période de rotation.

On parle alors de rotation synchrone. La planète ou le satellite présentent alors toujours la même face au corps qui a créé ces effets de marées. Le cas typique est bien-sûr le couple Terre-Lune.

On note d'ailleurs que le ralentissement de la Terre inhérente aux marées est donc aussi attribuable à la Lune. Toutefois, avec une diminution du jour de l'ordre de 2 ms/siècle, le jour terrestre n'est pas près d'atteindre un mois lunaire.

3. La limite de Roche

Edouard Roche est un astronome français (1820 – 1883) qui a démontré vers 1850 qu'il y a une distance minimum entre la planète et son satellite pour que celui-ci résiste aux forces de gravitations différentielles qui tendent à le briser. Ce phénomène est donc le pendant des marées océaniques et terrestres auxquelles est soumise la planète.

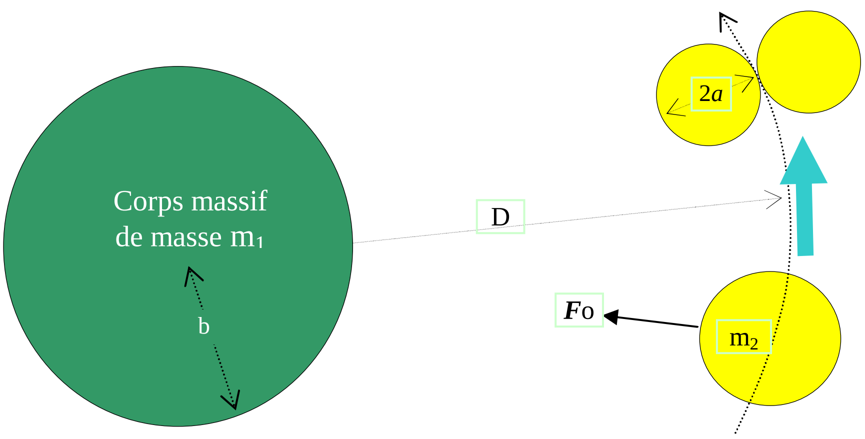
3.1 Théorie simplifiée

Considérons un petit astre (un satellite par exemple) de masse m_2, gravitant autour d'un astre plus massif ou corps principal de masse m_1. On a vu en introduction que chaque élément de l'astre est soumis à des forces fonction de sa distance au corps principal. Il existe deux autres forces agissant sur l'astre :

La propre force de cohésion de ses éléments entre eux sous l'effet de la gravitation du corps.

La force centrifuge qui le maintient à distance constante (on suppose l'orbite circulaire) du corps principal. Notons que cette force n'est pas homogène pour l'ensemble de l'astre puisque les parties les plus éloignées on tendance à tourner plus lentement que les parties proches.

Roche a montré que le calcul complet (un peu délicat) peut être remplacé par un calcul plus simple. Pour cela, on remplace le petit astre sphérique par deux sphères tangentes de masses $m_2/2$, de masse volumique moyenne ρ_2 et de rayon a.



La force d'attraction entre les 2 sphères est

$$F_a = G\frac{(m_2/2)^2}{(2a)^2} = G\frac{m_2^{\ 2}}{16.a^2}$$

Soit encore, exprimés en fonction de la masse volumique ρ_2, avec $m_2/2=4\pi a^3\rho_2/3$

$$F_a = G\frac{4\pi^2}{9}\rho_2^2.a^4$$

Les deux sphères subissent aussi une force différentielle de la part de m_1 en

$$\delta F = G.m_1.\frac{m_2}{2}\times\left\{\frac{1}{(D-a)^2}-\frac{1}{(D+a)^2}\right\}$$

Ce qui donne :

$$\delta F = G.m_1.m_2 \times \frac{2a}{D^3.(1-a^2/D^2)^2}$$

Soit encore, en négligeant a^2/D^2 devant 1 :

$$\delta F = G.m_1.m_2 \times \frac{2a}{D^3}$$

Remplaçons les masses par leurs expressions en fonction de a et b (b est le rayon de l'astre principal)

$$m_2 = 8\pi a^3 \rho_2/3 \quad \text{et} \quad m_1 = 4\pi b^3 \rho_1/3$$

$$\delta F = G.\frac{64\pi^2}{9} \times \frac{a^4 b^3}{D^3} \times \rho_1.\rho_2$$

Les 2 forces (F_a, δF) sont égales pour :

$$D^3 = 16 \times b^3 \times \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Posons

$$D_o = 2.52 \times b \times \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

Pour $D<D_o$, la force δF l'emporte sur la force F_a de cohésion.

Cette distance D_o est appelée « Limite de Roche ».

La racine cubique du rapport des masses volumiques et toujours proche de l'unité. (e.g. $\sqrt[3]{2} = 1.26$). Le terme essentiel de cette formule est donc 2.5×*Rayon de la planète*. Edouard Roche, à l'aide d'un calcul un peu plus rigoureux a trouvé un résultat proche, le coefficient 2.52 étant remplacé par 2.44.

En pratique, le problème est un peu plus complexe pour un corps liquide car il a tendance à se déformer, ce qui modifie les caractéristiques de l'attraction et de la cohésion.

Ainsi, pour la Terre, on a environ $D_o \approx 16000$ km, mesuré depuis le centre, distance bien inférieure à celle de la Lune.

3.2 Applications

La formule démontrée fixe une limite entre deux régions

- Celle où des satellites peuvent graviter sans être détruit.
- Celle, plus proche où ces satellites risquent d'être détruits.

Cette limite n'est par une frontière nette dans la mesure où un astre entièrement solide aurait une résistance à l'éclatement donnée par sa gravitation propre, mais aussi par la résistance propre de sa structure rocheuse.

Cependant, la limite de Roche peut fonctionner dans l'autre sens. Supposons que des roches éparpillées gravitent autour d'une planète. Si la distance de ces débris est supérieure à la limite de Roche, ils pourront finir par se rassembler pour former un astre plus important. En revanche, si leurs distance est inférieures à la limite de Roche, ils continueront à orbiter séparément à la manière des anneaux de Saturne.

Quelques exemples :

On a vu que pour le couple Terre-Lune, cette limite se situe (en tenant compte des densités) aux environ de 18000 km. La Lune n'a donc aucun souci à se faire.

Prenons l'exemple de Mars et de son petit satellite Phobos situé seulement à 9400 km du centre. La limite de Roche donne environ 10000 km. On est donc à la limite, et ce sont les forces de cohésion propres qui assurent l'intégrité du satellite.

Pour Déimos en revanche, situé à 23000 km, il n'y a aucun risque de destruction par la force de marées.

Les satellites et anneaux de Saturne :

Le cas de cette planète est intéressant, car il montre que cette limite existe bien mais n'est pas une sorte de barrière infranchissable. La raison en est bien connue, le calcul de cette limite ne tient par compte de la cohésion propre de l'astre. Cela revient à dire qu'on applique le même calcul à un galet et à une poignée de sable. Une autre remarque importante est que cette limite dépend de la densité de l'astre perturbé. Autrement dit, si plusieurs « amas de matières » de densités différentes gravitent autour d'une planète, ils n'auront pas la même limite de Roche.

Avec une densité de 0.69, la limite de Roche pour des densités de 1 (liquide) et 3 (solide), est de

$$D_r(1) = 2.3\times R_s \text{ et } D_r(3) = 1.6\times R_s$$

Vu de la Terre, il est commode de considérer qu'il y a 3 anneaux, même si leur nombre est plus grand. L'anneau extérieur (A) est légèrement plus sombre que la planète. Il s'étend sur 15000 Km Il est lui-même partagé en deux par la "division de Encke". L'anneau B de 25000 Km de largeur est sensiblement aussi brillant que la planète et l'anneau C (anneau de crêpe) faiblement lumineux apparaît comme un disque sombre. Avant l'anneau C, on peut en principe apercevoir un petit anneau appelé D. L'épaisseur ce ces anneaux est extrêmement faible, elle est de l'ordre de 1 à 3 km seulement. Deux autres "grands anneaux" F et G situés à 140000 et 170000 Km ont été découverts grâce à des sondes spatiales. Enfin, un anneau E bien plus éloigné (550000 Km) a été observé depuis la Terre lorsqu'il est vu par la tranche.

A proximité immédiate des anneaux gravitent de petits satellites appelés "Satellites bergers" et qui semblent participer à la conservation d'anneaux très fins, empêchant par une interaction gravitationnelle complexe, les petits objets de l'anneau de le quitter.

En résumé, en appelant R_S le rayon de Saturne (60270 km), les anneaux s'étendent de 67000 km à 140000 km soit

$$1.11\times R\text{s} \quad \text{à} \quad 2.33\times R_S$$

Clairement, ces 2 distances sont bien dans les ordres de grandeur des 2 limites données plus haut.

Examinons maintenant les distances des satellites (en R_S):

- 2.276 , 2.31 , 2.349
- 2.510 , 2.511 , 3.08 , 3.95 ,
- 4.88 , 4.88 , 4.88 (Thétis et les *Lagrange* de Thétis) ,
- 6,26 , 6,26 , 6.26 (Dioné et les *Lagrange* de Dioné)
- 20.3 : Titan ,
- 24.6 : Hypérion ,
- 59 : Japet
- 216 : Phoebé

Clairement, mis à part les tous premiers petits satellites, ils orbitent tous au-delà de la limite de Roche, ce qui assure leur pérennité.

4. Annexes

4.1 Attraction de 2 corps sphériques proches:

Soient deux corps sphériques de rayons a_1, a_2. Chaque corps orbite dans le champ de gravitation de l'autre. On suppose que les 2 corps sont rigides et de densité ρ_1, ρ_2 fonction seulement de la distance au centre. Par raison de symétrie, le corps (1) crée un champ $\boldsymbol{E}$ qui vérifie partout l'équation de Poisson :

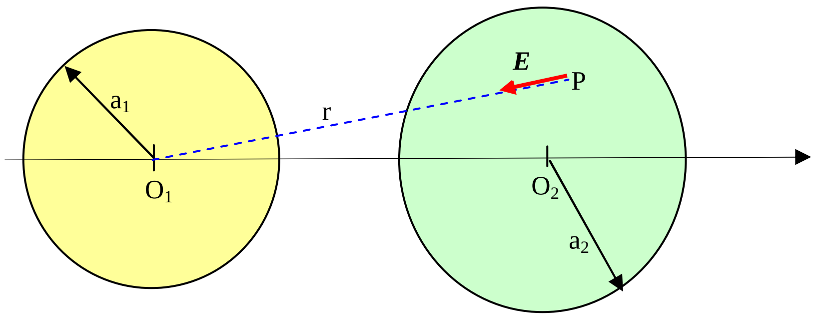
$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = -4\pi G.\rho_1.$$

L'application du théorème de Gauss (formule intégrale de la divergence) au premier corps donne le champ de gravitation $\boldsymbol{E}$ généré par ce corps et dans lequel baigne le second corps. Ce champ $\boldsymbol{E}$ est à symétrie centrale autour de O_1 et pour $r>a_1$, le champ en P est donné par :

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{u}Gm_1/r^2 , \quad r=O_1P$$

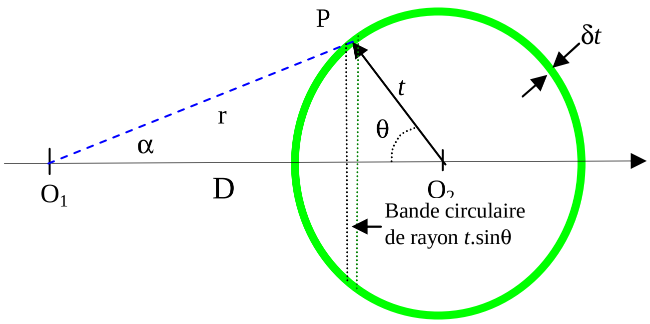
Par définition, un fragment du corps (2) de masse δm situé au point P subit une force d'attraction :

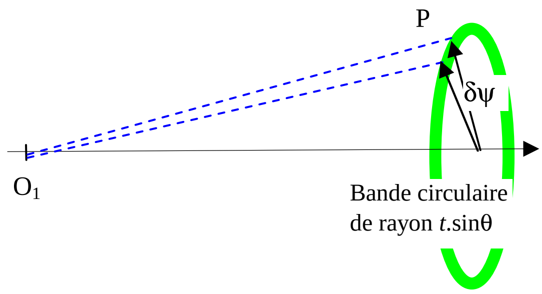
$$\delta\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}.\delta m$$



Pour obtenir la force totale, il faut sommer toutes les forces élémentaires relatives à l'ensemble des masses δm du corps (2). Par raison de symétrie, on sait déjà que le vecteur représentant la force est porté par la droite O_1O_2.

Pour calculer cette somme, on décompose le corps (2) en coquilles sphériques de rayon t ($0<t<a_2$) et d'épaisseur δt. Ensuite, chaque coquille est à son tour décomposée en bandes circulaires.





La contribution d'un élément de volume $\delta v=\delta t\times(t.\delta\theta)\times(t.\sin\theta.\delta\psi)$ est, en tenant compte de la projection

$$\delta F(\delta v) = \cos\alpha\times m_1.G\times(\delta v.\rho_2(t))/r^2$$

Il est facile de sommer sur l'angle ψ, ce qui donne un volume :

$$\delta V=\delta t\times(t.\delta\theta)\times(t.\sin\theta.2\pi)$$

Et la force correspondante

$$\delta F(\delta V) = \cos\alpha\times m_1.G\times(\delta t\times(t^2.\delta\theta)\times(\sin\theta.2\pi).\rho_2(t))/r^2$$

Pour exploiter cette expression, il faut relier D, r et θ Pour cela, on écrit pour le triangle O_1O_2P :

$$r^2 = D^2 + t^2 - 2tD\cos\theta$$

Soit en différenciant :

$$r.\mathrm{d}r = tD.\sin\theta.\mathrm{d}\theta$$

Par ailleurs, on a $\cos\alpha = (D - t.\cos\theta)/r$ et $t.\cos\theta = (D^2+t^2-r^2)/2D$, soit encore,

$$\cos\alpha = \frac{D^2 + r^2 - t^2}{2D.r}$$

La force $\delta F(\delta V)$ devient :

$$\delta F(\delta V) = G.m_1\pi\frac{D^2 + r^2 - t^2}{D.r^3}\times\left(t^2.\rho_2(t).\delta t\right)\times\left(\sin\theta.\delta\theta\right)$$

Soit encore, en remplaçant $\sin\theta.\delta\theta$ par $r\delta r/(tD)$

$$\delta F(\delta V) = G.m_1\pi\frac{D^2 + r^2 - t^2}{D^2.r^2}\times\left(\delta r\right)\times\left(t.\rho_2(t).\delta t\right)$$

Il est maintenant possible d'intégrer sur le volume Vc d'une coquille pour un rayon t constant.

$$\delta F(\delta V) = \frac{G.m_1}{D^2}\times\left(\pi.t.\rho_2(t).\delta t\right)\int_{D-t}^{D+t}\frac{D^2 + r^2 - t^2}{r^2}dr$$

L'intégrale est élémentaire, on trouve :

$$\mathrm{I} = \int_{D-t}^{D+t}\left(1 + \frac{D^2 - t^2}{r^2}\right)dr = 2t - (D^2-t^2)\times\left(\frac{1}{D+t} - \frac{1}{D-t}\right) = 2t - (D-t) + (D+t) = 4t$$

On a donc,

$$\delta F(\delta Vc) = \frac{G.m_1}{D^2}\times\left(4\pi.t^2.\rho(t).\delta t\right)$$

Le terme $4\pi t^2$ est la surface de la coquille et $4\pi t^2.\delta t$ est le volume δVc de la coquille.

Pour obtenir la force cherchée, il reste à intégrer la *parenthèse* sur le rayon t, entre 0 et a_2, ce qui donne simplement la masse m_2.

La force d'attraction entre les deux corps est donc bien, comme si les deux corps étaient ponctuels :

$$F = \frac{G.m_1.m_2}{D^2}$$

Cette formule simplifie considérablement les équations de la mécanique céleste.

4.2 Eloignement de la Lune

On se propose de calculer grossièrement cet éloignement annuel en utilisant la *constance du moment cinétique* et le *ralentissement mesuré de la Terre*, de l'ordre de 20 µs par an. Pour cela, on écrit que le moment cinétique du couple Terre-Lune, calculé au centre de masse des 2 corps est constant :

$$\sigma_{TL} = J_T.\omega_T + J_L.\omega_L + \mu D^2.\omega_L$$

Avec, D la distance Terre-Lune, $J_T = (2/5)m_T.R_T^2$, $J_L = (2/5)m_L.R_L^2$, $\mu = m_T.m_L/(m_T+m_L)$, $\omega = 2\pi/T$.

Pour faire ce calcul, on utilise aussi la loi de Kepler écrite sous la forme $\omega^2.D^3 = \text{cte} = \omega_o^2.D_o^3$

En éliminant ω_L dans l'expression de σ_{TL}, il vient :

$$\sigma_{TL} = J_T.\omega_T + J_L.\omega_L + \mu D^2.\omega_{oL}\times\left(\frac{D_o}{D}\right)^{3/2}$$

Soit encore,

$$\sigma_{TL} = J_T.\omega_T + J_L.\omega_L + \mu D^{1/2}.\omega_{oL}\times D_o^{3/2}$$

Soit en différentiant et en supposant le second terme constant et négligeable,

$$J_T.\delta\omega_T + \frac{\mu}{2\sqrt{D}}\omega_{oL}\times D_o^{3/2}.\delta D$$

On calcule le $\delta\omega_T$ par l'intermédiaire de $\omega_T = 2\pi/T_T$ et de sa dérivée :

$$\delta\omega_T = \frac{-2\pi}{T_T^2}\times\frac{dT_T}{dt}\times\delta t$$

La dérivée dT_T/dt vaut 20µs/1 an et le δt est pris égal à 1 an pour avoir le δD sur un an. On a $T_T = 86164$ s. Au final, le δD s'exprime par :

$$\delta D = \frac{2.J_T.\delta\omega_T}{\mu.\omega_{oL}.D_o}$$

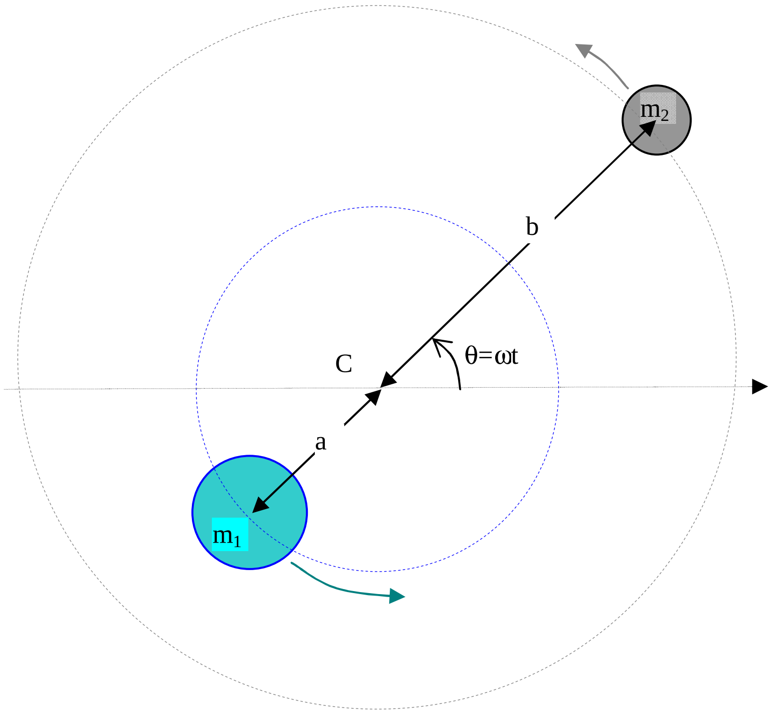
On calcule alors séparément :$J_T = 9.75\times10^{37}$, $\delta\omega_T = 1.69\times10^{-14}$, $\mu = 7.38\times10^{22}$, puis enfin,

$$\delta D = 4.38 \text{ cm/an.}$$

C'est bien la valeur compatible avec la fourchette annoncée par les spécialistes : (3.5 cm/an – 6 cm/an).

4.3 Notion de force centrifuge

Considérons deux corps de masses m_1 et m_2 tournant, dans un référentiel inertiel, à vitesse constante ω autour de leur barycentre commun C. On appelle $D=a+b$ leur distance relative supposée constante. Les deux orbites étant des cercles.



Ecrivons les lois de la dynamique pour chaque corps supposé ponctuel :

$$m_1.\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{u}G\frac{m_1m_2}{D^2} \quad \text{et} \quad m_2.\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{u}G\frac{m_1m_2}{D^2}$$

Le vecteur unitaire $\vec{u}$ étant dirigé dans le sens 1→2, soit $\vec{u}$ = $\mathbf{r}_2/r_2$ ou $\vec{u}$ = $-\mathbf{r}_1/r_1$

L'addition des 2 équations donne :

$$m_1.\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2.\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = 0$$

Soit par intégration et en choisissant les constantes arbitraires nulles

$$m_1.\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2.\frac{d\vec{r}_2}{dt} = 0 \;\text{ et }\; m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2 = 0$$

La dernière égalité est vérifiée en plaçant l'origine au centre de gravité, (ou barycentre), donc avec

$$a.m_1 = b.m_2$$

Pour déterminer complètement le mouvement, il reste à calculer les deux accélérations en supposant un mouvement circulaire et uniforme en $\theta=\omega t$. Le vecteur $\mathbf{r}_2$ par exemple a pour coordonnées :

$$\mathbf{r}_2 \equiv [b.\cos(\omega t)\;,\; b.\sin(\omega t)\;]$$

dont la dérivée seconde est :

$$\mathbf{r}_2'' \equiv [-\omega^2 b.\cos(\omega t)\;,\; -\omega^2 b.\sin(\omega t)] = -\omega^2.\mathbf{r}_2$$

Le vecteur $\mathbf{r}_1$ a pour coordonnées $[-a.\cos(\omega t)\;,\; -a.\sin(\omega t)\;]$ et sa dérivée seconde est

$$\mathbf{r}_1'' = -\omega^2.\mathbf{r}_1$$

Projetons les 2 équations de départ sur la droite portant les 2 astres. On obtient :

$-m_1.a.\omega^2 = -G\dfrac{m_1.m_2}{(a+b)^2}$	$-m_1.a.\omega^2 = -G\dfrac{m_1.m_2}{(a+b)^2}$	(4.)

Soit en simplifiant, la valeur de ω^2 :

$$\omega^2 = G.\frac{m_2/a}{(a+b)^2} \quad \text{et} \quad \omega^2 = G.\frac{m_1/b}{(a+b)^2}$$

Ce qui donne la condition $m_2/a = m_1/b$ ou encore, $a.m_1 = b.m_2$. On retrouve la condition sur la position du barycentre.

On additionne ensuite $a.\omega^2+b.\omega^2$, ce qui donne une forme de la loi de Kepler :

$$\omega^2 = G.\frac{m_1+m_2}{(a+b)^3} = G.\frac{m_1+m_2}{D^3}$$

Sur le référentiel constitué par la droite qui relie les 2 masses, les 2 corps ne bougent pas. La force totale exercée sur chacun d'eux est donc nulle. Une composante de cette force est l'attraction. L'autre est une force fictive appelée force centrifuge. Pour le corps (1) par exemple, on peut écrire :

$$\vec{u}G\frac{m_1 m_2}{D^2} + \left(-m_1.\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}\right) = 0$$

Cette force en $1/D^2$ est égale à l'accélération *changée de signe* et multiplié par la masse m_1 du corps. La somme de ces 2 forces est bien nulle. Par ailleurs, l'accélération est dirigée vers le centre du cercle (donc centripète). En changeant de signe, cette force devient « centrifuge ». Cette force fictive est le produit de 3 termes :

- La masse du corps
- le rayon du cercle décrit (ici *a*)
- La vitesse de rotation au carré : ω^2 avec $\omega=2\pi$/Période de rotation